

**JAQUELINE APARECIDA FORATTO LIXANDRÃO
SANTOS**



**O MOVIMENTO DO PENSAMENTO PROBABILÍSTICO
MEDIADO PELO PROCESSO DE COMUNICAÇÃO COM
ALUNOS DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

**ITATIBA
2010**

371.399.51 Santos, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão.
S235m O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo
processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino
fundamental / Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos. --
Itatiba, 2010.
183 p.

Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação
Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco.
Orientação de: Regina Célia Grando.

1. Probabilidades. 2. Processo estocástico. 3. Resolução de
problemas. I. Grando. Regina Célia. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelas bibliotecárias do Setor de
Processamento Técnico da Universidade São Francisco.

JAQUELINE APARECIDA FORATTO LIXANDRÃO
SANTOS

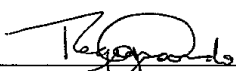


O MOVIMENTO DO PENSAMENTO PROBABILÍSTICO
MEDIADO PELO PROCESSO DE COMUNICAÇÃO COM
ALUNOS DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

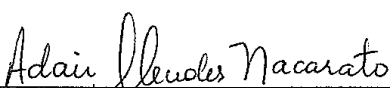
Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, da Universidade São Francisco, sob orientação da Profa. Dra. Regina Célia Grando para obtenção do título de Mestre em Educação, na linha de pesquisa: Matemática, Cultura e Práticas Pedagógicas.

ITATIBA
2010

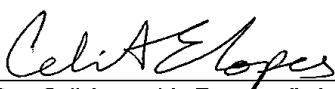
SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão "**O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental**" Dissertação defendida e aprovada no programa de Pós Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco em 16 de março de 2010 pela Banca examinadora constituída pelos professores:



Profa. Dra. Regina Célia Grando
Presidente



Profa. Dra. Adair Mendes Nacarato
Examinadora



Profa. Dra. Celi Aparecida Espasandin Lopes
Examinador

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à memória de minha mãe, Maria Izabel, que partiu muito cedo deste plano enquanto eu estava envolvida na pesquisa, mesmo não compreendendo o motivo de minha dedicação e esforço com relação aos estudos ela não deixava de se orgulhar de mim. Com amor, muito obrigada!

Dedico também aos meus filhos Igor e Yasmin, à minha avó materna Francisca, ao meu marido Carlos, ao meu irmão André Luiz (Théo). Vocês são a minha fonte de alegria e amor.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Profa. Dra. Regina Célia Grando que com carinho, alegria e dedicação me mostrou os melhores caminhos, contribuindo não só para minha formação acadêmica, mas também para a minha formação profissional e pessoal.

À Profa. Dra. Adair Mendes Nacarato pelas preciosas contribuições durante o meu percurso no mestrado, no Grucomat e no Exame de Qualificação.

À Profa. Dra. Celi Espasandin Lopes, pelas valiosas contribuições e sugestões no Exame de Qualificação e em suas pesquisas realizadas.

À Profa. Dra. Beatriz D'Ambrósio e Prof. Dr. Arthur Powell pelas relevantes sugestões dadas a pesquisa nos encontros que tivemos.

Aos demais professores do mestrado e a todos os professores que passaram pela minha vida.

Aos funcionários da USF/Itatiba que (in) diretamente me auxiliaram durante meu percurso na Universidade.

Aos colegas e amigos do mestrado e do Grucomat.

Aos meus alunos, a Tuani e Estefânia, a Diretora e aos Coordenadores, aos professores da Escola “Dionysia”, aos Supervisores de Ensino que contribuíram para que essa pesquisa se realizasse;

A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pela ajuda financeira com a concessão da bolsa mestrado.

Aos meus amigos que em especial contribuíram (in) diretamente nessa minha caminhada: Adriana, Brás, Carlinhos, Luisinho, Neusa, Maira Inês, Mariana e Paula.

As pessoas que deram suporte aos meus filhos em minha ausência, meu marido Carlos, minha mãe, no princípio, meus compadres Miguel e Niete, Raynara, Rayanne, Adeilson, Solange, Máira, Fuzzaro, Elisângela, Taiane e Sandra.

Aos meus familiares e demais amigos.

A Deus, por permitir que eu viva esse momento.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano de ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação), 2010, 183 p. Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação. Universidade São Francisco, Itatiba/SP.

RESUMO

A presente pesquisa centrou-se na seguinte questão de investigação: Quais são as ideias sobre linguagem e pensamento probabilístico que os alunos apresentam em um contexto de resolução de problemas mediado pelo processo de comunicação? Tinha como objetivos: (1) identificar ideias probabilísticas que emergem do processo de comunicação oral e escrita, no contexto de resolução de problemas em uma perspectiva investigativa; (2) analisar as ideias ali surgidas durante a interação e a negociação entre alunos e professora-pesquisadora. Desenvolvida em duas fases, na primeira delas, a pesquisa propôs aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino uma sequência de 18 tarefas — divididas em três etapas: introdução, desenvolvimento e socialização —, envolvendo problemas relacionados à estocástica e à perspectiva investigativa. Na segunda fase, foram propostas a quatro alunos, que também participaram da primeira sequência, sete tarefas, na mesma perspectiva que as anteriores, para serem realizadas individualmente. Essa segunda sequência pretendia analisar se as concepções apresentadas nas primeiras tarefas também estariam presentes em outros contextos. O material de análise foi composto por registros escritos dos alunos; transcrições de vídeos resultantes da socialização da primeira sequência de tarefas e de entrevistas individuais realizadas na segunda fase; e diário de campo da professora-pesquisadora. A análise possibilitou constatar que a metodologia adotada em sala de aula, no contexto de resolução de problemas, mediada pelo processo de comunicação oral e escrita, favorece o movimento das ideias probabilísticas dos alunos e, consequentemente, o desenvolvimento do pensamento probabilístico. Oportunizou também perceber que os alunos compreendem que os termos probabilísticos expressam as chances dos acontecimentos; que os utilizam, ao estimar as probabilidades de determinados eventos; e que promover tarefas relacionadas à linguagem estocástica possibilita que os alunos criem um repertório linguístico apropriado à expressão do pensamento probabilístico. Também possibilitou evidenciar equívocos quanto aos significados das palavras “possibilidade” e “probabilidade”, que muitos alunos compreendem como sinônimas; e equívocos de linguagem, promovidos pelos enunciados das tarefas, os quais podem gerar dificuldades no processo de ensino-aprendizagem da probabilidade e ocasionar avaliações equivocadas a respeito do real conhecimento dos alunos em relação aos conceitos probabilísticos.

Palavras-chaves: ideias probabilísticas, linguagem probabilística, linguagem estocástica, pensamento probabilístico, pensamento estocástico, probabilidade, estocástica, resolução de problemas, cenários de investigação, processo de comunicação

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **The movement of probabilistic thought mediated by the process of communication with 7th grade students of basic teaching.** Dissertation (Masters in Education), 2010, 183 p. Post Graduation *Stricto Sensu* Program in Education. Universidade São Francisco, Itatiba/SP.

Abstract

This research was centered in the following question of investigation: Which are the ideas about language and probabilistic thought that students present in a context of resolution of problems mediated by the communication process? It had as objectives: (1) to identify probabilistic ideas that emerge of the process of oral and written communication in the context of resolution of problems in an investigative perspective; (2) to analyze the ideas that appeared during the interaction and negotiation between students and teacher-researcher. Developed in two phases, on the first one the research proposed to the students of the 7th year of Basic Education of a school integrated in the state network of education, a sequence of 18 tasks - divided in three stages: introduction, development and socialization -, involving problems related to stochastic and to the investigative perspective. In the second phase, it was proposed to four students, who had also participated of the first sequence, seven tasks, in the same perspective than the previous ones, to be carried through individually. This second sequence intended to analyze if the conceptions presented in the first tasks would also be present in other contexts. The data was composed by written registers of the students; transcriptions of videos that resulted from the socialization of the first sequence of tasks, individual interviews that were conducted in the second phase and a field diary of the teacher-researcher. The analysis allowed to evidence that the methodology adopted in the classroom, in the context of resolution of problems, mediated by the process of oral and written communication, favors the movement of probabilistic ideas of the students and, consequently, the development of probabilistic thought. It also allowed to perceive that the students understand that the probabilistic terms express the possibilities of events and that they use them when calculating the probabilities of specific events; that to promote tasks related to stochastic language allows the students to create a linguistic repertoire appropriated to the expression of probabilistic thought. It also allowed to evidence the misunderstandings related to the meanings of the words “possibility” and “probability”, that many students understand as synonyms; and language misunderstandings, promoted by the questions of the tasks, which can generate difficulties in the process of teach-learning of probability and cause ineffective evaluations regarding the real knowledge of the students in relation to the probabilistic concepts.

Key Words: probabilistic ideas, probabilistic language, stochastic language, probabilistic thought, stochastic thought, probability, stochastic, resolution of problems, sceneries of investigation, process of communication

SÚMARIO

Introdução. De professora a pesquisadora: trajetória pessoal, estudantil e profissional.....	1
Trajetoária pessoal e estudantil.....	1
Trajetoária acadêmica e profissional.....	3
Ingresso no Programa de Pós-Graduação <i>Stricto Sensu</i> em Educação: expectativas renovadas.....	4
 Capítulo I. O movimento das concepções probabilísticas.....	8
1.1 O que dizem as pesquisas sobre o pensamento probabilístico de adolescentes e jovens.....	9
1.2 As concepções sobre probabilidade.....	12
1.2.1 O conceito clássico ou laplaciano.....	13
1.2.2 Conceito frequentista ou empírico.....	14
1.2.3 Conceito subjetivista.....	15
1.2.4 Conceito axiomático ou formal.....	17
1.3 As concepções estocásticas.....	18
1.4 Considerações sobre o capítulo.....	22
 Capítulo II. Resolução de Problemas / Cenários de investigações: uma perspectiva de trabalho, um ambiente propício à pesquisa.....	24
2.1 O que é problema?.....	24
2.2 Resolução de problemas: desencadeadora do processo de aprendizagem.....	25
2.3 Cenários de investigação: possibilidades educacionais.....	27
2.4 Dinâmica das tarefas: favorecendo a comunicação matemática.....	29
2.5 A escrita dos alunos como elemento fundamental do processo de resolução de problemas.....	31
 Capítulo III. Procedimentos Metodológicos: focando o objeto de investigação.....	35
3.1 As opções metodológicas.....	35
3.2 O foco de investigação.....	35
3.3 As tarefas.....	37
3.3.1 As tarefas: primeira fase.....	38

3.3.2 As tarefas: segunda fase.....	49
3.4 A Escola, a Comunidade e a Comunidade Escolar.....	41
3.5 Alunos.....	42
3.6 Contextos gerais da pesquisa de campo.....	44
3.7 Análise dos dados.....	45

Capítulo IV. "Mergulhando na sala de aula": alunos e professora-pesquisadora

compartilhando aprendizagens sobre probabilidade.....	47
4.1 A sequência de tarefas.....	47
4.1.1 Os alunos frente a dinâmica proposta.....	47
4.2 Tarefas: primeira etapa.....	49
4.2.1 A linguagem probabilística.....	49
4.2.1.1 Tarefas: 1, 2 e 3.....	50
4.2.2 A análise de possibilidades.....	59
4.2.2.1 Tarefas: 4, 5, 6, 7, 8 e 9.....	60
4.2.3 A medida e o experimento.....	68
4.2.3.1 Tarefas: 10 e 11.....	68
4.2.4 Medida de chance.....	72
4.2.4.1 Tarefas: 12, 13, 14, 15 e 16.....	72
4.2.5 Jogos: aleatoriedade e esperança.....	80
4.2.5.1 Tarefas: 17 e 18.....	81
4.3 Tarefas: segunda etapa.....	94
4.3.1 As tarefas: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.....	95
4.3.2 Entrevista: considerações e reconsiderações.....	100
4.3.2.1 Entrevista com Humberto.....	100
4.3.2.2 Entrevista com Maicon.....	103
4.3.2.3 Entrevista com Júlio.....	104
4.3.2.4 Entrevista com Júlia.....	107
4.3.3 Jogo: corrida de cavalos.....	108
4.3.3.1 As apostas.....	109
4.4 Encaminhamentos para a pesquisa.....	111

Capítulo V – As ideias sobre linguagem probabilística apresentadas pelos alunos do ensino fundamental.....	112
5.1 O despertar para a linguagem probabilística: primeiras considerações.....	112
5.2 A produção de cartas favorecendo a apropriação da linguagem probabilística.....	119
5.2.1 A escrita e a reescrita das reflexões do primeiro grupo.....	120
5.2.2 A escrita e a reescrita das reflexões do segundo grupo.....	123
5.3 A linguagem dos enunciados conduzindo a diferentes interpretações.....	126
5.4 Considerações sobre o capítulo.....	131
 Capítulo VI – O movimento das ideias probabilísticas apresentadas pelos alunos.....	 133
6.1 O movimento das concepções probabilísticas de Humberto.....	133
6.1.1 As concepções probabilística apresentadas por Humberto e seu grupo na primeira fase da pesquisa.....	134
6.1.2 As concepções probabilísticas apresentadas por Humberto na segunda fase da pesquisa.....	141
6.2 O movimento das concepções probabilísticas apresentadas por Júlio.....	145
6.2.1 As concepções probabilísticas apresentadas por Júlio e seu grupo na primeira fase da pesquisa.....	146
6.2.2 As concepções probabilísticas apresentadas por Júlio na segunda fase da pesquisa.....	150
6.3 O movimento das concepções probabilísticas de Júlia	154
6.3.1 As concepções probabilísticas apresentadas por Júlia e seu grupo na primeira fase da pesquisa.....	159
6.4 O movimento das concepções probabilísticas de Maicon.....	162
6.4.1 As concepções probabilísticas apresentadas por Maicon e seu grupo na primeira fase da pesquisa.....	162
6.4.2 As concepções probabilísticas apresentadas por Maicon na segunda fase da pesquisa.....	167
6.5 Considerações sobre o capítulo.....	170
 Reflexões sobre a pesquisa.....	 173
Referências bibliográficas.....	178

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Concepções estocásticas segundo Shaughnessy (1992).....	18
Quadro 2: Resumo das hipóteses do conhecimento probabilístico segundo Azcárate e Cardenoso.....	20
Quadro 3: Instrumentos de dados.....	46
Quadro 4: Síntese das respostas da tarefa 2.....	55
Quadro 5: Previsões do Tempo – Tarefa 3, item 2.....	58
Quadro 6: Síntese das respostas das tarefas 12, 13 e 14.....	75
Quadro 7: Síntese - “O jogo do Lobo Mau e Chapeuzinho”.....	78
Quadro 8: Tarefa 1 - Análise de acontecimentos.....	97
Quadro 9: Tarefa 2 - Exemplos de acontecimentos.....	97
Quadro 10: Tarefa 3 - Estimando as chances da retiradas de bolas de ténis.....	98
Quadro 11: Tarefa 4 – Probabilidade dos resultados relacionados a soma obtida no lançamento de dois dados.....	99
Quadro 12: Tarefa 5 - Resultado que tem maior probabilidade de sair ao lançar dois dados e somar os números obtidos.....	99
Quadro 13: Tarefa 6 – Acontecimento mais provável.....	99
Quadro 14: Alterações da tarefa 1 - Humberto.....	100
Quadro 15: Ideias equivocadas a respeito da linguagem probabilística.....	115
Quadro 16: Alterações da tarefa 2 - Humberto.....	130
Quadro 17: justificativas de Humberto na tarefa 4.....	143

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Linguagem gráfica – Inaf 2002.....	8
--	---

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Possibilidades de soma I	66
Tabela 2: Possibilidades de soma II.....	67
Tabela 3: Tarefa 17 - Equipes vencedoras.....	85
Tabela 4: Tarefa 17 - Somas registradas.....	86
Tabela 5: Tarefa 17 - Tabuleiros da tarefa 17 do grupo de Humberto.....	138

Tabela 6: Tarefa 17 - Tabuleiros da tarefa 17 do grupo de Júlio.....	149
Tabela 7: Tabela 7 – Tabuleiros da tarefa 17 do grupo de Júlia.....	158

Introdução

De professora a pesquisadora: trajetória pessoal, estudantil e profissional

Esta pesquisa visa analisar o movimento do pensamento probabilístico dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual de ensino de uma cidade do interior do Estado de São Paulo, em que a professora-pesquisadora ministra aulas de Matemática.

Com esse propósito, organizamos uma sequência de tarefas, tendo como metodologia a resolução de problemas em uma perspectiva investigativa e como foco questões estocásticas¹. Optamos pela divisão do ambiente de aprendizagem em três fases; a fase do “antes” — introdução da tarefa; a fase do “durante” — realização da tarefa; e a fase do “depois” — socialização da tarefa, como sugerido por Van de Walle (2001), em que os sujeitos foram organizados em pequenos grupos, em contexto de sala de aula.

Consideramos pertinente apresentar, a respeito da professora-pesquisadora, algumas informações pessoais e profissionais que (in) diretamente estão relacionadas com o objeto de investigação. Dessa forma, procurei² trazer também algumas lembranças que considero relevantes à minha formação como pesquisadora, as quais descrevo a seguir.

Trajетória pessoal e estudantil

Sou natural de uma pequena cidade, Monte Alegre do Sul, no interior de São Paulo. Na minha infância a principal fonte econômica desse município era a agricultura, porém, atualmente, o turismo também representa parte dessa economia. Dessa forma, havia poucas oportunidades de emprego aos moradores, e a maioria trabalhava nas cidades vizinhas. Ser funcionário público, portanto, parecia um privilégio diante desse quadro. Talvez pela simplicidade ou pela pouca instrução, meus pais não conversavam comigo, nem com meu irmão, sobre futuro pessoal ou

¹ Entende-se “estocástica” como termo europeu utilizado para incluir probabilidade e estatística. *Stochastics the common European term to include “probability and statistics”* SHAUGHNESSY 1992).

² Durante a descrição da trajetória pesquisadora, a forma verbal será na primeira pessoa do singular; quando o texto se referir à investigação como um todo, será empregada a primeira pessoa do plural, visto que foi um processo compartilhado entre pesquisadora e orientadora.

profissional; apenas diziam que precisávamos ir à escola. Mesmo morando na zona rural, minha mãe matriculou-me na pré-escola, aos cinco anos. Estudei na única escola da cidade que, naquela época, oferecia todos os níveis de ensino, e meu percurso, como aluna dessa escola, foi interessante: participava de teatros, desfiles, apresentações, tarefas múltiplas, atividades todas bastante vivas em minha memória até hoje e das quais tenho imensa saudade.

Sempre tive boas notas, principalmente nas disciplinas da área de ciências exatas, porém, compreender todas as regras e suas exceções nas aulas de Língua Portuguesa não era, para mim, tarefa fácil. Minha prática de leitura resumia-se aos gibis que meu vizinho me emprestava e a alguns livros que a professora distribuía nas aulas de leitura. Minhas aulas de Matemática foram marcadas pelas longas listas de exercícios e pelo uso de fórmulas, na maioria das vezes, apresentadas pelos meus professores, de forma que os exercícios só poderiam ser resolvidos por meio delas. Quando havia prova, ao estudar, seguia os passos dados pela professora na sala de aula, refazia todos os exercícios do caderno e, geralmente, eu me saía bem. Aulas práticas não faziam parte da rotina da escola, mas do meu dia a dia, sim: desde muito pequena ia à padaria e ao supermercado para minha mãe, prática comum nas cidades do interior, onde a maioria das pessoas se conhece. Comprava o que ela me pedia, calculava o quanto gastaria e qual deveria ser o meu troco antes de chegar ao balcão. Os jogos de béstia e bisca³, realizados com baralho, tradicionais entre os descendentes de italiano da zona rural do interior de São Paulo, faziam parte de nossas reuniões familiares. As crianças, para não atrapalharem os adultos, recebiam um baralho para também jogar. Aprendi a jogar cedo e demonstrava habilidade, elaborava diversas estratégias para tentar vencer, mas, às vezes, o azar não permitia que isso acontecesse; e, para tentar livrar-nos dele, criávamos alguns rituais, como não cruzar as pernas na hora de receber as cartas, esfregar as mãos quando se iniciava um novo jogo, trazer alguns amuletos no bolso, etc. As quatro operações, necessárias para a realização do jogo, eram feitas mentalmente por mim, sem grandes dificuldades.

Cursei e concluí em escola pública o Ensino Médio que, na época, era profissionalizante no período noturno, e recebi o diploma de Técnico em Processamento de Dados. Paralelamente ao ensino profissionalizante, no período da manhã, fiz o magistério em

³ Regra disponível no site: <<http://www.jogosdecartas.com.br/default.asp?area=61&id=1&nome=Bisca>>. Último acesso em: 01/10/2009.

uma cidade vizinha, também em escola pública da rede estadual. Foi uma época muito difícil, pois minha família passava por sérias dificuldades financeiras; muitas vezes pensei em desistir de estudar e arrumar emprego, porém a vontade de estudar era maior, e a oportunidade não tardou a aparecer, pois comecei a atuar como professora em uma escola particular de Educação Infantil, antes mesmo de formar-me.

Trajetória acadêmica e profissional

Em 1994 iniciei a graduação em Ciências com habilitação em Matemática, na Faculdade de Ciências e Letras “Plínio Augusto do Amaral”, atual Unifia – Centro Universitário Amparense, na cidade de Amparo/SP. Assim que conclui a graduação, tive a oportunidade de trabalhar como professora coordenadora, e essa oportunidade conduziu-me ao curso de Pedagogia, na mesma Universidade.

Sobre minha experiência como docente, como já mencionei, comecei a trabalhar como auxiliar de professor, quando estava no último ano do curso de magistério (1993), em uma escola particular de Educação Infantil. Dois meses depois, fui contratada como professora.

Uma nova oportunidade surgiu com a minha aprovação em um concurso público para o cargo de professora de Educação Infantil no município em que morava, o que me despertou interesse em fazer Pós-Graduação em Educação Infantil. Nesse município trabalhei por 13 anos: além da Educação Infantil, ministrei aulas no Ensino Fundamental I e desempenhei a função de professora Coordenadora no Ensino Fundamental II. Durante esse tempo, também me efetivei como professora de Matemática na rede estadual de ensino. Trabalhei, portanto, em municípios, escolas, funções, cidades, segmentos e, principalmente, realidades muito distintas. .

Assim, vivenciei as mudanças que ocorriam a cada troca de Secretário de Educação. Houve aquele que não exigiu metodologia alguma: cada professor utilizava o que conhecia ou o que lhe era conveniente. Houve momentos em que trabalhamos com uma “metodologia holística”, em que fazíamos relaxamento com as crianças, caminhadas na areia, eventos com pais tocando violões, coleções de pedras, etc. Depois veio o momento do construtivismo, em que desenvolvíamos tarefas individuais para identificar em que fase do conhecimento lógico-matemático os alunos se encontravam. O sistema apostilado também foi adotado, com o discurso de “unificar o ensino nas escolas municipais”. A descontinuidade de metodologias e concepções

é prática comum a cada nova troca de Secretário, pois, sob o ponto de vista político, as administrações são marcadas pela diferença e, com isso, adotam — ou impõem — modismos, deixando de lado o processo, neste caso específico de ensino, e os agentes (professores), que raramente são ouvidos, atendidos ou bem interpretados pelos novos gestores.

Durante os anos de atuação como professora de Matemática de crianças e adolescentes observei o que me deixava muito angustiada: os alunos habitualmente apresentavam dificuldades em resolver problemas, insistindo em encontrar números e “fazer uma conta”, sem a preocupação de “pensar sobre” o problema encontrado. Muitos alunos diziam não gostar da disciplina porque não encontravam sentido no que faziam ou nos problemas convencionais propostos pelos materiais didáticos.

Procurei colegas da área para refletirmos sobre essas questões e ouvi muitos comentários, como: *“Eles não sabem ler e interpretar e só o professor de Língua Portuguesa pode auxiliá-los nisso”*; *“falta conhecimento prévio e não sou professor primário e não sei como resolver isso”*; *“eles não têm interesse e isso não é culpa minha e sim da família que não os incentiva, etc.”*.

Para minimizar essas angústias (e talvez criar outras), resolvi fazer o mestrado, pois busco, através dos estudos e pesquisas, redimensionar minhas crenças e meus valores sobre o ensino da Matemática, com o propósito de que, por meio de minhas aulas, os alunos possam “fazer matemática”; possam viver situações nas quais tenham seu próprio pensar. Busco um fazer que atenda não somente às minhas expectativas, mas também às dos alunos.

Ingresso no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação: expectativas renovadas

Durante a realização dos créditos em disciplinas no mestrado, alguns estudos conduziram-me à [resolução de problemas e às investigações matemáticas](#) como uma perspectiva metodológica. Observei, com esses estudos, que a dinâmica com a qual a resolução de problemas era desenvolvida em sala de aula, por mim e por outros colegas, distanciava-se daquelas apresentadas por autores como Mason, Schoenfeld, Lester e Van de Walle. Assim, o interesse por uma investigação nessa perspectiva, “saltou aos meus olhos”.

A resolução de problemas, em uma perspectiva investigativa, foi solidificada com as leituras de Skovsmose (2008, p. 16), que enfatiza que a matemática “não é somente um assunto a ser ensinado e aprendido”, e, sim, “um tópico sobre o qual é preciso refletir”, é “parte de nossas

estruturas tecnológicas, militares, econômicas e políticas” como enfatiza D’Ambrósio (apud SKOVSMOSE, 2008, p. 17). Partindo desse pressuposto, o autor sugere o cenário de investigação como um ambiente de aprendizagem.

Acreditamos que o cenário de investigação vem ao encontro do formato de aula com resolução de problemas, apresentado por Van de Walle (2001), Nessa dinâmica, a aula é organizada em três fases:

- A **fase do antes**: momento em que o professor apresenta a tarefa que será desenvolvida e passa as devidas orientações.
- A **fase do durante**: momento do trabalho em grupos; o apoio do grupo e do professor é importante nesta fase, para que os alunos avancem nas formulações de conjecturas.
- A **fase do depois**: etapa em que ocorre a socialização das conclusões desenvolvidas pelos grupos.

Na concepção de autores que vêm trabalhando com a perspectiva de resolução de problemas e investigações matemáticas, as tarefas proporcionam situações de conhecimento amplo, pois os alunos agem como protagonistas e estabelecem relações significativas com a matemática. Além disso, as questões relacionadas a valores são marcantes nesse tipo de aula, pois os diferentes pontos de vista entre os alunos e entre os grupos são aspectos positivos e fundamentais para o trabalho investigativo.

Confesso que, ao experimentar trabalhar com algumas tarefas dessa natureza, com alunos do 6º ano, no ano de 2008, fiquei insegura, tinha medo de falar demais e deixar a tarefa simples, de forma que não despertasse o interesse dos alunos; e medo de falar de menos e não auxiliá-los em suas conjecturas. Essa insegurança fez com que eu deixasse tudo muito organizado: tarefas impressas, material necessário, organização dos grupos, tempo estimado para cada fase, repertório com os possíveis questionamentos feitos pelos alunos a mim, durante a realização da tarefa, minhas possíveis respostas, etc.

Acredito que a organização da tarefa, do material, dos grupos e a previsão do tempo foram importantes, mas, no decorrer da tarefa, os questionamentos, a organização e as discussões entre os alunos seguem caminhos interessantes, não previstos pelo professor, e esse é um dos momentos mais fecundos dessa metodologia. Depois dessa experiência, ficou claro que esta seria a metodologia adotada nas tarefas em sala de aula em minha pesquisa, mesmo porque tem uma relação direta com meus princípios e projetos como professora.

Em conjunção com o exposto, novas ideias e ocasiões começaram a surgir e conduziram-me para um assunto pouco ou mal explorado nas aulas de Matemática, mas que se faz presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e em currículos de diversos Estados brasileiros: a probabilidade, hoje, aparece no mesmo bloco que a estatística, mas desconectadas e sem a perspectiva da resolução de problemas. Penso que o tema escolhido nos permitiria ousar metodologicamente; e, ao mesmo tempo, seria passível de análise e discussão no Grupo Colaborativo de Matemática — Grucomat⁴ —, o que poderia ser mais um espaço coletivo para discussões dos dados da pesquisa, uma vez que esse era o conteúdo de estudo do grupo naquele momento.

Algumas pesquisas (LOPES, 2009) apontam para a necessidade de discutir a estocástica, até mesmo na Educação Infantil. Trata-se de um conteúdo relevante na sociedade atual, pois as questões relacionadas à incerteza fazem-se presentes em nosso dia a dia. Segundo Costa (2007, p. 59), ser alfabetizado matematicamente não significa somente alfabetizar-se pela matemática usual, mas principalmente pela matemática das possibilidades. Isso nos remete ao significado de cidadania e ao papel da escola apresentado por Lopes (2004, p. 189): “Entendemos que cidadania também seja a capacidade de atuação reflexiva, ponderada e crítica de um indivíduo em seu grupo social. Sendo assim, urge que a escola cumpra seu papel de educar para a cidadania”.

Nesse sentido, vi na resolução de problemas, na perspectiva investigativa Matemática e na probabilidade uma possibilidade de atender às minhas expectativas, como professora, e encontrar resposta para a questão que surgiu, a qual descrevo abaixo:

Quais são as ideias sobre linguagem e pensamento probabilístico que os alunos apresentam em um contexto de resolução de problemas mediados pelo processo de comunicação?

Tal questão objetiva, assim:

- Identificar ideias probabilísticas que emergem do processo de comunicação oral e escrita, tendo como contexto a resolução de problemas em uma perspectiva investigativa.
- Analisar as ideias que emergem em um contexto de interação e negociação entre alunos e professora-pesquisadora em resolução de problemas.

A pesquisa foi realizada, como já apontado no início desta introdução, em duas salas do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino, situada no interior do

⁴ Nos primeiros anos, denominado Oficina de Geometria, posteriormente Grucogeo, e atualmente Grucomat, existe desde 2003 na Universidade São Francisco (USF), em Itatiba/SP e é constituído por professoras formadoras, professores de Matemática, alunos da Pós-Graduação e da Graduação.

Estado de São Paulo, local em que a professora-pesquisadora ministra aulas. O presente trabalho está organizado em seis capítulos. A introdução trouxe informações e lembranças sobre a trajetória de professora a pesquisadora: suas angústias, suas experiências e seus questionamentos, que nos conduziram aos objetivos da pesquisa.

Discutiremos, no primeiro capítulo, os princípios e os elementos teóricos que consideramos importantes na construção e na análise das concepções estocásticas dos alunos.

O segundo capítulo trará reflexões teóricas acerca da resolução de problemas e dos cenários de investigação que nos deram subsídios para organizar a sequência de tarefas, além de algumas discussões sobre a leitura e a escrita nas aulas de Matemática.

No terceiro capítulo apresentaremos o percurso metodológico da pesquisa, descreveremos os procedimentos utilizados, o contexto e as ações desenvolvidas, objetivando responder a questão de investigação.

As tarefas propostas, assim como algumas informações sobre sua aplicação e observações realizadas durante esse momento da pesquisa, estarão descritas no quarto capítulo.

O quinto capítulo trará a análise da linguagem estocástica de que os alunos foram se apropriando a partir das tarefas desenvolvidas. Identificaremos quais são as ideias que os alunos têm sobre o vocabulário estocástico, como eles se apropriam de palavras e expressões utilizadas no cotidiano e como expressam tais ideias por meio da linguagem.

No sexto capítulo propomo-nos a apresentar as concepções probabilísticas de quatro alunos: Humberto, Júlio, Júlia e Maicon, evidenciadas no decorrer das tarefas propostas.

As considerações finais buscarão expor uma síntese do trabalho desenvolvido, a questão respondida e as perspectivas para novas pesquisas.

Capítulo I

O Movimento das Concepções Probabilísticas

Neste capítulo propomo-nos a discutir os princípios e os elementos teóricos que consideramos importantes na construção e na análise das concepções probabilísticas dos alunos.

A importância do ensino de Estatística e Probabilidade nas escolas desde as séries iniciais vem sendo discutida por autores de diversos países, inclusive do Brasil. O tema em nosso país é sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e no currículo da maioria dos Estados e das escolas; em algumas delas, desde a Educação Infantil.

Apesar disso, os dados do ⁵Indicador Nacional de Analfabetismo Funcional (INAF) apontam um alto índice de desconhecimento e/ou dificuldade da população sobre o assunto, o que pode ser verificado por meio do gráfico⁶ abaixo:

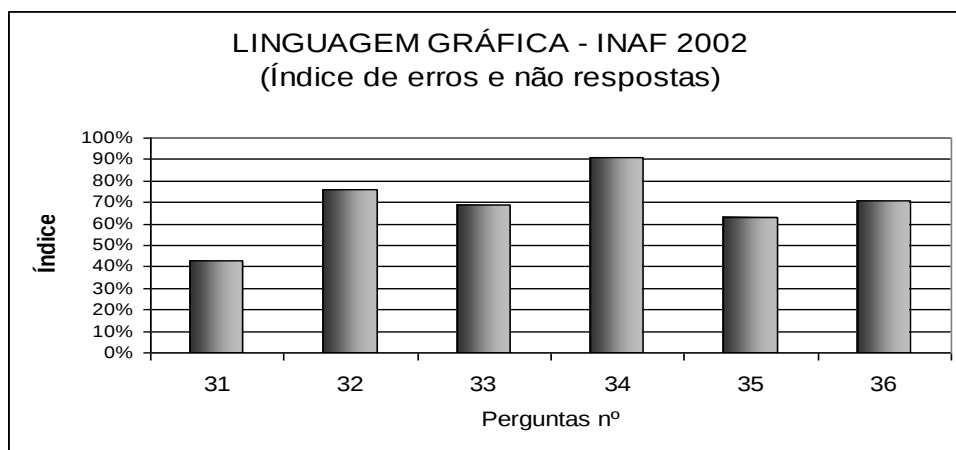


Figura 1 – Linguagem gráfica – Inaf 2002

Fonte: Lopes, 2004

As questões 31 a 36 eram relativas às habilidades de interpretação e de domínio da linguagem gráfica. Nota-se, pelo gráfico anteriormente representado, que o índice de erros ou mesmo de não respostas das pessoas entrevistadas é bastante alto, em torno dos 70%.

⁵ O Indicador Nacional de Analfabetismo Funcional — Inaf — consiste em um levantamento periódico de dados sobre as habilidades de leitura, escrita e matemática da população brasileira. (FONSECA, 2004).

⁶ Valores correspondentes às perguntas sobre a compreensão da linguagem gráfica do Inaf 2002. (LOPES, 2004).

Atentos a isso, pesquisadores buscam soluções para minimizar o problema, pois acreditam que o ensino da estatística e da probabilidade seja de suma importância para a sociedade atual, já que suas implicações se refletem diretamente na interpretação das informações, nas tomadas de decisões profissionais e pessoais, nas questões éticas, na postura crítica diante das situações do dia a dia. Shaughnessy (1992) defende a ideia de um ensino frequente e de forma significativa, em que as situações apresentadas aos alunos sejam de seu interesse. De modo semelhante, Lopes (2008) sugere que tal processo de ensino e aprendizagem deva ser baseado em investigações e resoluções de problemas.

Para Borovnick e Peard (apud CIRINO, 2007) existem duas razões para a introdução do pensamento probabilístico nas séries iniciais. A primeira seria o tipo específico de pensamento resultante da perspectiva probabilística, tal como o pensamento algébrico e o pensamento geométrico. Os autores dão ênfase à relação entre o valor aproximado e o valor exato e à impossibilidade de controlar o resultado em uma única experiência; e afirmam que o estudo das probabilidades na escola pode beneficiar o pensamento probabilístico. A segunda razão resulta das aplicações dos modelos probabilísticos que delineiam diretamente a realidade ou o fazem por meio da estatística.

Em conjunção com as razões apresentadas para a importância do ensino da probabilidade nas escolas, as pesquisas realizadas apontam informações importantes, como as que apresentaremos no próximo item.

1.1 O que dizem as pesquisas sobre o pensamento probabilístico de adolescentes e jovens

Em nosso trabalho nos deteremos no estudo da teoria das probabilidades, porém os termos “estocástica” e “estatística” estarão presentes, tendo em vista a relação existentes entre seus conceitos.

Segundo Costa (2007, p. 25), o estudo matemático das probabilidades estabelece relação com a estatística na “utilização de técnicas analíticas para identificar e caracterizar eventuais relações entre as variáveis em estudos e os níveis de relação entre tais variáveis que se fundamenta na Teoria das Probabilidades”. Dessa forma, entendemos que não seja possível tratarmos do pensamento probabilístico isolado de uma perspectiva mais ampla, que inclui a estatística, como é proposto pelos estudos no campo da estocástica.

No nosso trabalho pedagógico com os alunos da educação básica, é comum observarmos que eles apresentam muito mais dificuldades em aplicar noções probabilísticas do que outros conceitos matemáticos. Sáenz (1999) justifica tal situação pela dificuldade em pensar no enfoque de quantificar o azar, situação não presente em geometria, por exemplo. Para o autor, a concepção de probabilidade não é natural nem intuitiva; é fruto de reflexão e prolongado contraste com a realidade. Dessa forma, a compreensão dos princípios probabilísticos é importante, já que as primeiras noções sobre o assunto podem levar ao erro.

Ao verificar a literatura, segundo Sáenz (1999), encontram-se dois enfoques de pesquisas quanto ao pensamento e à aprendizagem em probabilidade. O primeiro, de caráter psicológico, encontrado nas obras de autores como: Hogarth (1987); Kahneman, Slovic e Iversky (1982); Pérez Echeverría (1990); Scholz (1991); e o segundo, com enfoque didático, abordado por: Batanero (1995); Borovnick e Bentz (1991); Garfield e Ahlgren (1988); Godino, Batanero e Cañizares (1987); Sáenz (1995); Shaughnessy (1992). No Brasil, destacamos as pesquisas realizadas por Lopes (1998, 2003) e Coutinho (1994, 2001). Acreditamos que essas perspectivas não estejam dissociadas, quando consideramos um olhar voltado ao pensamento de alunos em sala de aula de Matemática; entretanto, há que considerar as matrizes teóricas e metodológicas de pesquisa para a realização dos estudos de cada uma dessas perspectivas.

Além disso, Shaughnessy (1992) afirma que há diferentes linhas de investigação dentro desses enfoques, procedentes de diversas concepções, que se contrapõem epistemologicamente. De um lado encontram-se os racionalistas, que atribuem ao processo de aquisição a pura razão, defendida por filósofos como Descartes, Leibniz e Spinoza; e, de outro, os empiristas, que sustentam que o conhecimento está baseado em inferências desde observações sensoriais, difundidas por Locke, Berkeley e Hume.

Shaughnessy (1992), ao analisar os trabalhos de Green, pesquisador que conduziu investigações com tarefas de probabilidade com cerca de três mil estudantes britânicos com idades entre 11 e 16 anos, encontrou, no raciocínio desses estudantes, vestígios de ambos os enfoques: racionalista e empirista.

Sáenz (1999) analisou as principais linhas de investigação sobre as ideias probabilísticas de adolescentes, dentre elas as pesquisas desenvolvidas por Fischbein (1975, 1987, 1991), Shaughnessy (1981, 1985, 1992), Falk (1983, 1988), Pollatsek et al. (1981) e outros. A seguir apresentaremos suas interpretações e considerações sobre os referidos trabalhos:

- As investigações empíricas de Fischbein são consideradas pelo autor como um conjunto muito rico de achados sobre o pensamento probabilístico dos estudantes na faixa etária entre 11 e 17 anos e de sugestões para o ensino de probabilidade.

- Sáenz baseia-se em Kahneman et al. (1982) para enquadrar os trabalhos sobre compreensão probabilística de Shaughnessy dentro do paradigma de heurística e acrescenta que eles possuem uma forte vertente didática. O autor define heurística como uma estratégia, deliberada ou não, baseada na avaliação natural, e necessária para produzir uma estimativa ou predição, normalmente de forma não reflexiva (LOPES, 2003).

- Os trabalhos de Falk sobre independência e probabilidade condicionada são considerados importantes por Sáenz, que os classifica em um mesmo viés cognitivo que os trabalhos de Shaughnessy. Sáenz observou em suas investigações que a literatura é abundante em sugestões didáticas com a finalidade de alterar as intuições equivocadas dos estudantes acerca das noções de probabilidade condicionada, porém é escassa quanto à eficácia dessas sugestões.

- Quanto às pesquisas de Pollatsek, Lima e Well (1981) sobre a compreensão que têm os estudantes da relação entre média amostral e média populacional, questão fundamental na inferência estatística⁷, Sáenz traz a seguinte interpretação acerca da confusão dos estudantes sobre a média amostral em situações em que se deve calcular como uma média ponderada: a compreensão da maioria dos estudantes sobre média consiste em um algoritmo em que se adicionam todos os resultados e se divide essa soma pelo número de resultados. O estudante, além de apresentar uma visão instrumental de média, tem dela uma compreensão parcial, na medida em que realiza a média aritmética, e não a ponderada.

- Para Sáenz, as investigações empíricas sobre a compreensão probabilística realizadas por Borovcnik y Bentz y Bentz (1991) são mais sugestivas por apresentarem uma detalhada análise das tarefas utilizadas pelos pesquisadores por ele citados – dentre elas, as respostas dadas pelos sujeitos, os padrões de explicação das concepções equivocadas (conhecimento *versus* vieses), os enunciados – e porque podem conduzir às soluções dos estudantes.

Em síntese, compreendemos, a partir dos resultados de tais pesquisas, que o pensamento probabilístico dos adolescentes depende, e muito, das ações didáticas que necessitam ser realizadas com os alunos, nas escolas, uma vez que pouca ou nenhuma experiência probabilística é

⁷ No campo da inferência estatística convergem a teoria das probabilidades e a da estatística. A teoria das probabilidades encarrega-se da modelagem dos fenômenos aleatórios, enquanto a estatística regulamenta a aplicação da probabilidade ao mundo real. (SÁENZ, 1999).

experienciada e/ou observada por eles, sem que haja uma intervenção. Além disso, as noções primeiras podem, muitas vezes, vir carregadas de falsas concepções e ideias errôneas acerca da aleatoriedade, das formas de medidas de chance, de cálculos de médias ponderadas, etc., como apontado por Vasques (2007).

Em uma análise mais psicológica sobre o pensamento probabilístico dos alunos, Piaget e Inhelder (apud COSTA, 2007) apontam que a dificuldade dos alunos ao tentar quantificar as probabilidades se dá por não possuírem procedimentos combinatórios e está relacionada à incapacidade de estabelecer relação parte-todo — selecionar entre todos os resultados possíveis, os favoráveis. Tais autores (apud SÁENZ, 1999) também afirmam que só após atingir o pensamento formal⁸ o sujeito será capaz de compreender e utilizar os conceitos probabilísticos.

A afirmação de Piaget e Inhelder não é contemplada por Kahneman et al. (apud SÁENZ, 1999), pois estes, em suas pesquisas, encontraram sujeitos adultos que, embora tivessem atingido o pensamento formal e apresentassem conhecimento em estatística, cometiam erros de juízo probabilístico.

É importante acrescentar, a essa análise, considerações a respeito do conceito de probabilidade. Para ampliar nossa análise, apresentaremos algumas concepções sobre probabilidade presentes em algumas pesquisas.

1.2 As concepções sobre probabilidade

As diferentes abordagens das concepções probabilísticas, de acordo com Fernandes (1999), apresentam caráter multifacetado e podem induzir a diferentes perspectivas. De modo semelhante, Shaughnessy (1992) ressalta que a tradição dualista da noção de probabilidade — como grau de crença e como cálculo de frequências —, que ainda é bastante comum, conduz a debates de pesquisas de maneira quase ardilosa. Acrescenta ainda que os méritos das diferentes concepções sobre probabilidade têm sido apresentados, por meio da literatura, como se houvesse uma batalha a ser vencida.

Hawkins e Kapadia (1984) e Orton (apud CIRINO, 2007, p. 33), além de Godino, Batanero e Cañizares (1996) distinguem os conceitos de probabilidade em quatro grupos que se aproximam de:

⁸ Pensamento formal: estágio da evolução do pensamento descrito por Piaget e Inhelder, em que o adolescente agrupa as relações não determinadas de fenômenos aleatórios, seguindo esquemas operacionais (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996).

- (1) o conceito clássico,
- (2) o conceito frequentista ou empírico,
- (3) o conceito subjetivista,
- (4) o conceito axiomático ou formal.

Outros autores, como Fernandes, 1999; Borovcnik y Bentz y Bentz (apud CIRINO, 2007, p. 34) também apresentam classificações dos conceitos de probabilidade, algumas das quais coincidem com as classificações apresentadas acima; outras utilizam outros termos, porém descrevem características semelhantes.

A seguir, apresentaremos com mais detalhes as análises dos diferentes conceitos de probabilidade, segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996) e Fernandes (1999).

1.2.1 O conceito clássico ou laplaciano

A obra de Laplace *Théorie analytique des probabilités*, publicada em 1812, é considerada como detentora da definição de concepção clássica, na qual a probabilidade é definida pela razão entre números de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que esteja explícito que todos os resultados são igualmente prováveis. Nessa definição de probabilidade,

[...] assume-se implicitamente a equiprobabilidade de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral e constitui uma abordagem a priori da probabilidade, pois calculam-se probabilidades antes da realização de qualquer experiência física. (FERNANDES, 1999, p. 59)

Tal definição também é contemplada por Godino, Batanero e Cañizares (1996), ao retomarem que a característica de equiprobabilidade também é garantida pela estratégia de utilização de simetria física.

Nos jogos de azar baseados em moedas, em dados (não viciados) e em extração de bolas em urnas, é possível enquadrar esta perspectiva teórica, por tratar-se de fenômenos cujas variáveis são discretas, e supõe-se que seja possível selecionar, como espaço amostral, um conjunto de sucessos elementares que garantam a equiprobabilidade (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996). No lançamento de uma moeda, a simetria que permite aceitar a probabilidade de $\frac{1}{2}$ para cada uma das faces pode ser tomada como argumento.

Há concepções equivocadas relacionadas aos jogos de sorte e azar, cujos resultados apresentam simetria, e não existem razões para acreditar que um resultado tenha mais vantagem que o outro. Entretanto, em alguns jogos, por exemplo, a condição para uma criança iniciar a jogada é de que se obtenha o número 6 na face superior de um dado. Isso pode remetê-la a uma falsa concepção, pois muitas crianças acreditam que esse número é o mais difícil de sair, daí a compreensão de que o jogo já se inicia de maneira injusta.

Nos jogos da megassena também é possível perceber essa falsa concepção, pois um jogador que tem em um cartão seis números alternados (não consecutivos) acredita que a probabilidade de ele ser o ganhador é maior do que outro que tenha um cartão com seis números consecutivos.

Para Hawkins e Kapadia (apud FERNANDES, 1984, p. 51), situações como essas dificilmente serão compreendidas como situações em que exista simetria entre os resultados, e há dificuldade em utilizar a concepção clássica de probabilidade como uma razão que envolve um conjunto equiprovável. Assim, a concepção frequentista ou subjetivista passa a ser importante, uma vez que possibilita experienciar situações e estabelecer resultados.

1.2.2 Conceito frequentista ou empírico

A principal característica do conceito frequentista ou empírico é que a probabilidade de um acontecimento emerge do processo de uma experimentação. Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), o valor da probabilidade é dado pela frequência relativa de sucessos obtidos na realização de um experimento, ou seja, suponhamos um sucesso particular **A** que nos interessa; realizamos o mesmo experimento várias vezes e anotamos as ocasiões em que ocorre **A**; então, a razão entre o número de vezes que sucede **A**, n_A , e o número total de repetições **n** (razão frequencial ou frequência relativa de que **A** ocorra, isto é, n_A/n) assemelha-se à tendência de um limite quando **n** tende ao infinito.

Segundo Alfred Rényi (1966, apud LOPES; COUTINHO, 2009, p. 65), há um enfoque mais claro para estimar as chances de realização de um evento em método experimental:

Chamaremos de probabilidade de um evento o número ao redor de qual oscila a frequência relativa de um evento considerado. [...] Consideramos então a probabilidade como um valor independente do observador, que indica aproximadamente com qual frequência o evento considerado se reproduzirá ao longo de uma grande série de experimentos.

Dessa forma, as probabilidades são baseadas em resultados de experiências realizadas, o que é denominado “probabilidade *a posteriori*”, uma vez que é calculado depois de os experimentos terem sido realizados. Nessa perspectiva, eventos individuais são inseridos no coletivo, ou seja, eventos semelhantes são inseridos em um mesmo contexto, assumindo essas propriedades individuais.

De acordo com Godino, Batanero e Cañizares (1996), a teoria frequentista tem sido defendida por Richard Von Mises a partir da obra *Probability, statistics and truth*, porém John Venn já havia preconizado o cálculo de probabilidade por meio de frequências relativas presentes em sua obra *The logic of chance*. Godino, Batanero e Cañizares exploraram tal teoria, ao simular o experimento aleatório de lançamento de moedas com o auxílio de um computador. Numa sequência de 14 mil repetições, observaram que a frequência de caras era muito próxima da probabilidade teórica, $\frac{1}{2}$. Esse experimento exemplifica que, quanto maior o número de acontecimentos, maior a proximidade entre a probabilidade *a posteriori* e a probabilidade *a priori* (calculada sem manipulação experimental, baseada em dados teóricos e na concepção clássica).

Assim, a interpretação de tal probabilidade envolve dificuldades, pois pode conduzir as pessoas a decisões equivocadas. Essas dificuldades são resultantes da utilização de um mesmo limite para a frequência relativa e também da definição do que se entende por “aleatoriedade” e por “semelhança” (FERNANDES, 1999).

As conclusões obtidas a partir de um simples experimento que envolve a aleatoriedade podem levar os alunos a uma interpretação falaciosa, pois, ao realizar esse tipo de experimento, é possível obter eventos pouco prováveis, o que poderia conduzir os alunos a conclusões ingênuas de que eventos desse tipo tenham maior chance de ocorrer. Esse tipo de dificuldade exemplifica o que Fernandes (1999) está chamando de equívoco em relação à compreensão dos conceitos de aleatoriedade e semelhança. Outros conceitos probabilísticos também são elucidados pelo autor, como o conceito subjetivista.

1.2.3 Conceito subjetivista

Na perspectiva subjetivista, as probabilidades expressam grau de crença ou percepção pessoal. O indivíduo utiliza suas experiências e seu conhecimento sobre o assunto para exprimir a probabilidade de um sucesso, o que possibilita diferentes medidas de probabilidade para um mesmo sucesso. Fernandes (1999) a designa “personalista”, pois, segundo ele, as duas

concepções anteriores – clássica e frequentista - são propriedades do mundo real, enquanto na percepção subjetivista as probabilidades são avaliações pessoais de situações aleatórias, inerentes à mente do indivíduo. Desse modo, a probabilidade passa de uma avaliação externa ao sujeito para uma avaliação centrada no sujeito.

Em contextos que envolvem jogos de azar⁹, há situações em que o grau da confiança no resultado (probabilidade de acontecimentos) está relacionado com a aposta dos jogadores, ou seja, quanto maior o valor da aposta, maior será o ganho ou a perda do apostador, porém há pessoas que atribuem tal situação aos riscos (excitação emocional) envolvidos nos jogos. A concepção subjetivista expõe que os jogadores seguem regras básicas relacionadas ao apostar (confiar) em determinado acontecimento. Coerência e consistência são categorias de informação que os subjetivistas consideram e que, combinadas, geram a probabilidade da situação em questão. Assim, a informação prévia e as experiências cotidianas semelhantes a frequências em situações repetidas são combinadas no teorema de Bayes¹⁰, gerando a probabilidade do acontecimento (FERNANDES, 1999). Em outras palavras, Shaughnessy (1992) ressalta que é possível matematizar probabilidades subjetivas como uma forte dependência sobre o teorema de Bayes e como uma teoria que possibilite uma (re)significação de probabilidades, baseada nas informações acessíveis – informações prévias e as suas experiências.

Borovcnik y Bentz, Bentz e Kapadia (apud FERNANDES, 1999, p. 37) ressaltam que as duas maiores dificuldades da concepção subjetivista são a pretensão de medir a probabilidade de qualquer situação de incerteza e a falta de orientação para calcular as probabilidades *a priori*. Atualmente, a concepção formal tem sido difundida na delineação das probabilidades.

⁹ Jogo de azar. Aquele em que a perda ou o ganho dependem mais da sorte que do cálculo, ou somente da sorte, como, por exemplo, o jogo da roleta. - Definição obtida no site: <<http://aurelio.ig.com.br/dicaureliopos/home.asp?logado=true&pesquisa=>>. Último acesso em: 4 out. 2009.

¹⁰ O **teorema de Bayes** é um corolário do teorema da probabilidade total que permite calcular a seguinte probabilidade:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

- $\Pr(A)$ e $\Pr(B)$ são as probabilidades *a priori* de **A** e **B**
- $\Pr(B|A)$ e $\Pr(A|B)$ são as probabilidades *a posteriori* de **B** condicional a **A** e de **A** condicional a **B** respectivamente.

A regra de Bayes mostra como alterar as probabilidades *a priori*, tendo em conta novas evidências, de forma a obter probabilidades *a posteriori*. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_bayes>.

1.2.4 Conceito axiomático ou formal

A concepção formal ou axiomática da probabilidade, vigente nos dias atuais, segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), originou-se dos trabalhos de Kolmogorov. Surgiu como oposição à concepção clássica e está apoiada na teoria dos conjuntos.

O autor elege E como espaço amostral associado a um experimento aleatório e A como um subconjunto formado pelos sucessos de E . A função P definida sobre A é uma medida de probabilidade de E se: todo sucesso $S \in A$ corresponde um número $P(S)$, tal que $0 < P(S) < 1$, a probabilidade do sucesso certo é dado por $P(E)=1$ e a probabilidade de um sucesso impossível é dado por $P(E)=0$. (CARVALHO; OLIVEIRA, 2002, p. 4)

Segundo Fernandes (1999, p. 54), “a probabilidade formal é um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles axiomas”. Ele acrescenta que “esta abordagem estrutural não esclarece a própria natureza da probabilidade, apesar de os teoremas deduzidos constituírem um indicador de possíveis interpretações.” Para o autor, essa concepção estrutural pode ser vista como um conceito que estabelece estrutura teórica para as duas principais concepções de probabilidade: a posição objetivista, apresentada acima como concepção formal ou axiomática, e a posição subjetivista. Fernandes (1999), baseando-se em Hawkins e Kapadia (1984), esclarece tal perspectiva:

No primeiro caso, os axiomas de Kolmogorov são usualmente vistos como justificação da posição objetivista. No segundo caso, os axiomas sobre o comportamento racional¹¹ no ato de apostar, como coerência e consistência, fornecem regras para as probabilidades, as quais devem obedecer aos axiomas de Kolmogorov e suas consequências. (FERNANDES, 1999, p. 54)

A perspectiva estrutural, segundo Borovcnik y Bentz (apud FERNANDES, 1999), exprime incredulidade na determinação de valor para a probabilidade. Naturalmente, inerente às situações, há que escolher uma interpretação objetiva ou subjetiva para expressar a probabilidade.

¹¹ O autor leva em conta a definição de comportamento racional apresentada por Savage (apud MATALON, 1980), que caracteriza as escolhas do indivíduo racional por meio de sete idiomas, dentre eles: (A1) o indivíduo é capaz de ordenar completamente os atos segundo as preferências que tem por eles; (A2) também chamado o axioma de “coisa segura”, diz que, se para cada estado da natureza o indivíduo prefere a consequência do ato **a** à do ato **b**, então ele continuará a preferir **a** a **b**, neste caso, desde que ignore qual dos dois estados se produzirá.

Em que medida a compreensão sobre tais conceitos relacionados ao pensamento probabilístico nos possibilita esta pesquisa? Acreditamos que algumas dessas diferentes concepções estejam presentes no ideário e no discurso de alunos na Educação Básica, principalmente daqueles que ainda não tiveram a oportunidade de vivenciar teoricamente conceitos relacionados à probabilidade como medida, à ideia de aleatoriedade, à probabilidade condicional, etc. Com relação a uma perspectiva didática, poderíamos ainda acrescentar as concepções estocásticas sugeridas por Shaughnessy (1992), Azcárate e Cardeñoso (apud SERRADÓ; AZCÁRATE; CARDEÑOSO, 2006), nossa discussão na próxima seção.

1.3 As concepções estocásticas

A pesquisa realizada, na literatura, sobre o pensamento probabilístico proporcionou-nos informações sobre a natureza e a origem das dificuldades dos alunos para compreender e aplicar os conceitos e as leis da teoria das probabilidades. Porém a questão de como organizar o amplo leque de concepções apresentadas pelos alunos, tendo em vista que as concepções estocásticas estão relacionadas, em parte, pelo conhecimento espontâneo (intuição primária) e, em parte, pelos conceitos adquiridos no percurso escolar (intuições secundárias) é discutida por Shaughnessy (1992) e por Azcárate e Cardeñoso (apud SERRADÓ; AZCÁRATE; CARDEÑOSO, 2006).

Shaughnessy (1992) orientou-se em estudos feitos por educadores e psicólogos para criar o modelo de desenvolvimento conceitual estocástico, segundo ele, procurando o equilíbrio entre simplicidade e utilidade. Seu objetivo era criar um modelo que aproximasse pesquisadores e professores dos resultados que encontrou em suas pesquisas. O modelo é baseado nas diferentes concepções sobre estocástica e oferece indicativos aos professores sobre quais concepções seus alunos evidenciam e de quais necessitam apropriar-se, o que possibilita ao aluno um avanço em suas concepções estocásticas. A seguir apresentamos o quadro com o referido modelo.

Quadro 1 – Concepções estocásticas segundo Shaughnessy (1992)

Concepção estocástica	Indicadores
Não estatística	Respostas baseadas em crenças, modelos determinísticos, causalidade ou expectativas de resultados únicos. Sem atenção ou consciência de eventos aleatórios ou chance.

Concepção estocástica	Indicadores
Estatística-Ingênua	Uso de julgamento heurístico, tais como representatividade, disponibilidade, ancoragem, balanceamento. Predominantemente baseado em experiências e respostas não normativas.
Estatística-Emergente	Habilidades para aplicar modelos normativos em problemas simples. Reconhecimento de que há uma diferença entre crenças intuitivas e um modelo matematizado. Talvez proveniente de algum treinamento em probabilidade e estatística. Início de um entendimento de que há múltiplas representações matemáticas de chance, tais como clássica e frequentista.
Estatística-Pragmática	Um conhecimento profundo de modelos matemáticos de chance (isto é, frequentista, clássico, bayesiano). Habilidade de comparar e contrastar vários modelos de chance. Habilidade de selecionar e aplicar o modelo normativo quando confrontado com escolhas sobre incerteza, treinamento considerável em estocástica, Reconhecimento das limitações e das hipóteses de vários modelos.

Fonte: Shaughnessy (1992, p. 485, tradução nossa¹²)

O sistema de concepções estocásticas criado por Shaughnessy com o intuito de indicar os níveis de sofisticação conceitual dos estudantes, aparentemente simples, é um tanto quanto

¹² Types of Conceptions of Stochastics.

1. Non-statistical. Indicators: responses based on beliefs, deterministic models, causality, or single outcome expectations: no attention to or awareness of chance or random events.

2. Naïve-statistical: Indicators: use of judgmental heuristics, such as representativeness, availability, anchoring, balancing, mostly experientially based and nonnormative responses; some understanding of chance and random events.

3. Emergent-statistical. Indicators: ability to apply normative models to simple problems; recognition that there is a difference between intuitive beliefs and a mathematical model; perhaps some training in probability and statistics; beginning to understand that there are multiple mathematical representations of chance, such as classical and frequentist.

4. Pragmatic-statistical. Indicators: an in-depth understanding of mathematical models of chance (i.e. frequentist, classical, Bayesian); ability to compare and contrast various models of chance, ability to select and apply a normative model when confronted with choices under uncertainty; considerable training in Stochastics; recognition of the limitations of and assumptions of various models.

complexo. Ao revisar suas considerações para elaboração do referido sistema, observamos o uso de pesquisas de metodologias clínicas para investigar os processos de pensamento dos estudantes. Consideramos relevante essa pesquisa, para compreender as concepções probabilísticas que os nossos alunos apresentam e para criar hipóteses que orientem nossos estudos e encaminhamentos no processo de ensino e aprendizagem dos educandos, visto que, segundo Shaughnessy (1992), a mera instrução em estocástica não é suficiente para superar as concepções equivocadas dos alunos; no entanto, consideramos audaciosa uma avaliação desse nível sem um trabalho colaborativo entre psicólogos e educadores.

Azcárate e Cardeñoso (apud SERRADÓ; AZCÁRATE; CARDEÑOSO, 2006) orientaram-se nos estudos realizados com professores primários, na Espanha, nos quais definiram quatro categorias de concepções probabilísticas que possibilitaram a elaboração de um modelo explicativo de hipóteses do conhecimento probabilístico dos sujeitos. Serradó, Azcárate e Cardeñoso (2006) utilizam esse modelo como referência na orientação, na interpretação de dados e na formulação de hipóteses de progressão em suas investigações. O modelo, no quadro a seguir, configura quatro hipóteses em relação ao tratamento da probabilidade e divide em dois aspectos: conceitual e quantificador.

Quadro 2 - Resumo das hipóteses do conhecimento probabilístico segundo Azcárate e Cardeñoso.

	Inclusão não explícita	Concepção intuitiva	Concepção emergente	Concepção normativa
Aspecto conceitual	Algumas explicações subjetivas.	Explicações subjetivas e laplacianas em contextos de jogos.	Explicações subjetivas, frequenciais e laplacianas em qualquer tipo de contexto.	Modelização (laplaciana, frequencial e bayesiana) como base para uma definição axiomática.
Aspecto quantificador	Raciocínio aritmético.	Raciocínio aditivo sobre incerteza do sucesso (como síntese de azar/necessidade) e raciocínio proporcional.	Raciocínios proporcionais e combinatórios incompletos.	Aplicação e raciocínio combinatórios de propriedade baseados em visão normativa.

Fonte: <<http://www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/tarbiya/pdf/articulos/Tarbiya03809111.pdf>>. - Último acesso em: 4 out. 2009 – (tradução nossa)

O quadro anterior foi organizado pelos autores, tendo como referência para as concepções probabilísticas as seguintes considerações:

- Conceção **“inclusão não explícita”**: caracteriza-se pela falta de compreensão do azar e/ou de fenômenos aleatórios da realidade; ou seja, os resultados de situação desse tipo são baseados em uma percepção pessoal (subjetiva). Essas percepções geralmente são explicadas com modelos determinísticos de raciocínio baseados em modelos de sucessos simples e imediatos. Normalmente, o resultado de um sucesso aleatório não é compreendido como uma das possibilidades de um espaço amostral. Dessa forma, não há nenhum raciocínio estocástico; a percepção do aleatório não se apresenta nem implicitamente; assim, o raciocínio é baseado em esquemas causais diretos.
- Conceção **“intuitiva”**: alguma compreensão do azar e/ou de fenômenos aleatórios surge, porém de forma parcial, relacionada a modelos concretos ou como explicação de características físicas de mecanismos do azar; ou, ainda, porque os sujeitos percebem a relação com algum fenômeno de massa. De maneira geral, relacionam fenômenos aleatórios a jogos de azar e a alguns fenômenos da realidade; no entanto, consideram difícil relacionar tais fenômenos a tratamento matemático adequado. Dá mais importância à quantificação da probabilidade dos fenômenos do que a sua compreensão. Tal situação é justificada com conceitos subjetivos de eventuais sucessos, que se realizam por meio de raciocínios proporcionais associados a sucessos equiprováveis e finitos. Dessa forma, as respostas não são normativas, dependem do contexto, das experiências e das afirmações do sujeito diante das situações que vivencia em cada contexto.
- Conceção **“emergente”**: reconhece o azar e os fenômenos aleatórios como algo que pode ser estudado. Utiliza-se de representação clássica ou frequencial na quantificação da probabilidade em diversos contextos (físicos, químicos, meteorológicos, jogos, etc.); no entanto, tal habilidade pode estar limitada a fenômenos familiares, pois em novas situações (tarefas não conhecidas) o sujeito pode confundir-se. Supõe-se nesta concepção a presença de alguma instrução em probabilidade e estatística.
- Conceção **“normativa”**: utiliza, com compreensão, os modelos matemáticos clássicos, a aproximação bayesiana ou frequentista, para estabelecer relações sobre o funcionamento de fenômenos aleatórios. Apresenta reflexão sobre a relação entre os modelos matemáticos

e os fenômenos aleatórios, em que compara e contrasta as diferentes situações aleatórias e suas relações com os referidos modelos. Além disso, seleciona o modelo adequado para calcular a probabilidade em contextos distintos e, quando necessário, modifica os modelos normativos para adaptá-los a situações que lhes são familiares. Azcárate (1996, p. 68) afirma que é um estágio difícil de ser alcançado, inclusive pelos especialistas no tema, pois em suas pesquisas comprovou que a maioria dos adultos utiliza em sua vida cotidiana juízos heurísticos, ainda que inconscientemente.

Gonçalves (2004) identificou, na pesquisa que realizou com professores de escola básica em exercício, as quatro concepções probabilísticas definidas pelos autores, as quais ele descreve como “não probabilística”, “probabilística intuitiva”, “probabilística emergente” e “probabilística normativa”, e ressaltou a importância de pesquisas futuras, tendo em vista as informações e as considerações a respeito do ensino da probabilidade. Compreendemos que a pesquisa seja relevante para o nosso trabalho, pois ela permite que se faça reflexão sobre conceitos probabilísticos apresentados pelos alunos e a possível relação com os conceitos apresentados, ou não, pelos professores. Isso não significa, portanto, que os alunos não pensem ou que o professor não estabeleça no seu cotidiano de sala de aula momentos em que tais conceitos se presentificam pelo fato de fazerem parte do cotidiano.

1.4 Considerações sobre o capítulo

É indiscutível a importância das pesquisas sobre as concepções probabilísticas e estocásticas, sejam elas por diferentes enfoques ou linhas de investigações. Investigações como essas contribuem para contornarmos as dificuldades enfrentadas por professores e alunos, em sala de aula, diante do ensino e da aprendizagem das probabilidades e da estatística. No entanto, não entendemos que esses conceitos sejam lineares ou progressivos, visto que a interpretação dos sujeitos está relacionada aos contextos nos quais interpretam e representam. Porém consideramos aspectos teóricos relevantes, ao analisar se as concepções apresentadas pelos sujeitos, em um determinado contexto, são modificadas em outras situações e quais os fatores que influenciam nessas alterações.

A nosso ver, o estudo apresentado por Azcárate e Cardeñoso (apud SERRADÓ; AZCÁRATE; CARDEÑOSO, 2006) proporciona melhor compreensão dos modos de pensar dos

alunos sobre probabilidade, visto que organiza as concepções em aspectos conceituais e quantificadores.

No próximo capítulo apresentaremos algumas questões relacionadas ao movimento de resolução de problemas e aos cenários de investigação e aprendizagem que subsidiam metodologicamente as ações realizadas em sala de aula com a Estocástica.

Capítulo II

Resoluções de problemas / Cenários de investigações: uma perspectiva de trabalho, um ambiente propício à pesquisa

Neste capítulo pretende-se apresentar questões acerca da resolução de problemas e da constituição de cenários de investigações, os quais serviram de alicerce para as práticas pedagógicas realizadas em sala de aula, na nossa pesquisa.

2.1 O que é problema?

Embora muitos professores digam que trabalham com resolução de problemas, sua definição não é bem clara para a maioria deles e dos educadores. Parte-se do princípio de que problemas são situações propostas aos alunos, às quais estes apresentem solução envolvendo conteúdos matemáticos cujas técnicas de resolução já foram “ensinadas”. Portanto, para alguns educadores, propor situações como essas configura que estão trabalhando com resolução de problemas.

Ao revisarmos a literatura, encontramos algumas definições do que é problema, para alguns autores. Segundo Onuchic (1999, p. 215):

Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver, que o problema passa a ser um ponto de partida e que, através da resolução de problema, os professores devem fazer conexão entre diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Van de Walle (2009) compartilha da seguinte concepção:

Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método “correto” específico de solução. (HIEBERT et al., 1997, apud VAN DE WALLE, 2009, p. 57)

Em uma perspectiva filosófica, Saviani (2000, apud GRANDO; MARCO 2007, p. 96), afirma que:

uma questão, em si, não caracteriza o problema, nem mesmo aquela cuja resposta é desconhecida; mas uma questão cuja resposta se desconhece e se necessita conhecer, eis aí um problema. Algo que eu não sei não é um problema; mas quando eu ignoro alguma coisa que eu preciso saber, eis-me, então, diante de um problema. Da mesma forma, um obstáculo que é necessário transpor, uma dificuldade que precisa ser superada, uma dúvida que não deixa de ser dissipada são situações que nos configuram como verdadeiramente problemáticas (SAVIANI, 2000, p. 14).

Para Grando e Marco (2007, p. 100), problema assim se entende:

uma situação desafiadora que não apresenta uma solução imediata e única; uma situação de hesitação e impasse que necessita de conhecimentos diversos – matemáticos ou não – e o estabelecimento, por parte do aluno, de relações entre eles, além de reflexões e investigações, constituindo-se em um movimento de criação de processos próprios de resolução, podendo o aluno, nesse movimento, ampliar seus conhecimentos e criar novos conceitos.

De acordo com essas perspectivas, entendemos problema como uma situação incerta, em que há o desejo de solucionar uma questão, mas não se sabe de antemão como; pode ser resolvida de diversas maneiras e, até mesmo, pode não ter resposta ou ter várias. Dessa forma, admitimos a resolução de problemas como uma situação desencadeadora do processo de aprendizagem em que o aluno, visando resolver o problema enfrentado, está inserido em um movimento de pensamento, apropriação de linguagem e elaboração de conceitos.

2.2 Resolução de problemas: desencadeadora do processo de aprendizagem

Em nossa prática escolar, observamos que o professor inicia o conteúdo matemático com a definição; em seguida, os alunos praticam o que foi ensinado (conceito), resolvendo exercícios, com o intuito de que essa prática seja utilizada na resolução de problemas. Dessa forma, a resolução de problemas não é um meio de ensino da matemática, mas o fim.

A concepção de resolução de problemas entrelaçada com a aprendizagem matemática é apresentada por autores como: Van de Walle (2009); Onuchic (1999); Onuchic e Allevato (2004); Lester (1994); Smole e Diniz (2001); Stanic e Kilpatrick (1989); Abreu (2000); Contreras e Carrilo (2000); Schoenfeld (1998); Mason (1998), dentre outros. Acreditamos que ensinar por

meio de resolução de problemas não seja trabalho fácil, pois as tarefas¹³ devem ser planejadas e selecionadas para cada aula, o currículo escolar e a percepção dos alunos sobre o contexto devem ser levados em conta. Para Van de Walle (2009, p. 59) há boas razões para ensinar por resolução de problemas:

- “A resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentidos às mesmas”. Ao resolverem problemas, os alunos integram as ideias emergentes às já existentes, o que possibilita uma melhor compreensão.
- “A resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido”. A autoconfiança e a autoestima são ampliadas e reconhecidas toda vez que os alunos resolvem o problema e desenvolvem sua compreensão.
- “A resolução de problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter bom desempenho e manter os pais informados”. Ao defenderem suas ideias, por meio de figuras, símbolos matemáticos ou modelos interativos e ao escreverem relatórios ou explicações, fornecem informações importantes para o professor organizar a próxima atividade, assim como auxiliam a avaliação do progresso do aluno.
- “A resolução de problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos”. Baseando-se em suas ideias, os alunos podem dar significados diferentes à mesma tarefa: ao falar sobre elas ou ao ouvir o que os outros pensam sobre a questão, novas estratégias vão surgindo e, dessa forma, seu conhecimento vai se expandindo. Nesse sentido, em contexto de resolução do problema, os alunos, de forma coletiva, auxiliam o desenvolvimento da aprendizagem individual.
- “Uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes de modo que ocorrem menos problemas de disciplina”. Muitas vezes, os alunos que não compreendem o que o professor ensinou ou os que não gostam de seguir instruções apresentam problemas de disciplina, pois ficam entediados ou aborrecidos com a situação. No entanto, ao resolverem problemas que

¹³ Entendemos tarefas como um problema ou “atividade em que os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados nem haja um método “correto” específico de solução”. (Hiebert et al., 1997, apud VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

lhes façam sentidos, sua postura perante a aula ou, até mesmo, a concepção sobre a matemática muda. Intimamente, o aluno passa a considerar o processo recompensador e gratificante.

- “A resolução de problemas desenvolve o ‘potencial matemático’”. Ao resolver problemas em sala de aula, os alunos envolvem-se em processos do “fazer matemática”.
- “Essa atividade é muito divertida”. As aulas são mais dinâmicas, os alunos envolvem-se com as tarefas, sentem-se motivados, o que possibilita um ambiente descontraído.

Além dessas, há outras razões pelas quais a resolução de problemas se mostra relevante; destacamos duas:

- A resolução de problemas como instrumento beneficia a linguagem escrita nas aulas de Matemática. Essa questão é destacada por Santos (2005, p. 129), ao afirmar que “a linguagem escrita nas aulas de Matemática atua como mediadora, integrando as experiências individuais e coletivas na busca de construção e apropriação dos conceitos abstratos estudados”.
- A resolução de problemas possibilita um ambiente de aprendizagem baseado em cenários de investigação. Segundo Skovsmose (2008), a resolução de problemas cria um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação em que o aluno é convidado a formular questões e procurar explicações.

Como vimos, a resolução de problemas é muito mais que o fechamento de um conteúdo desenvolvido nas aulas de Matemática, é uma metodologia que favorece o desenvolvimento de potencialidades.

Nos próximos itens, abordaremos duas razões que fazem parte da análise de nossa pesquisa.

2.3 Cenários de investigação: possibilidades educacionais

Na sociedade atual, os resultados matemáticos e os dados estatísticos, presentes no nosso dia a dia, também fazem parte da estrutura de argumentação e tornaram-se “parte da linguagem com a qual as sugestões políticas, tecnológicas e administrativas são apresentadas” (BORBA; SKOVSMOSE, 2008). No entanto, a matemática apresentada nas escolas não tem favorecido essa relação; pelo contrário, mostra-se definida e imutável. Skovsmose, visando o desenvolvimento da Educação Matemática como suporte à democracia, fundamenta-se na Educação Matemática Crítica que, por meio “do conhecimento construído e apreendido, defende a inserção e a participação dos alunos nas decisões – seja na escola, na família ou na própria vida” (FADEL,

2007) e sugere a prática de sala de aula voltada para cenários de investigações. Esse ambiente de aprendizagem tem características diferentes das aulas “formais”, nas quais o professor explica o conceito, os alunos realizam exercícios para treinarem sobre o explicado ou demonstrado, para posteriormente utilizarem essas habilidades ao resolver problemas. Dessa forma, o professor é responsável pelo processo de aprendizagem dos alunos.

Em um cenário de investigação, tanto a tarefa proposta quanto os papéis assumidos pelo professor e pelo aluno caracterizam-se de forma diferente da que ocorre na resolução de exercícios. Segundo Skovsmose (2008, p. 21-22): “As práticas em sala de aula baseadas num cenário de investigação diferem fortemente daquelas baseadas em exercício. A distinção entre elas tem a ver com as ‘referências’ que visam levar os estudantes a produzir significados para atividades e conceitos matemáticos”.

Para o autor, o significado de “referência” não está relacionado somente com as características dos conceitos - referências à matemática pura, referências à semirrealidade e referências à realidade – e, sim, com as ações e os motivos dessas ações, mais precisamente com o contexto que possibilita ao aluno localizar um objetivo em suas ações. Dessa forma, Skovsmose (2008) apresenta seis tipos diferentes de ambientes de aprendizagem, apresentados por Fadel, nos quais este estabelece a distinção entre o paradigma do exercício e o cenário para investigação:

1. Paradigma do exercício – referência a matemática pura: exercícios de resolução direta como, por exemplo, resolução de equações;
2. Cenários para investigação - referência a matemática pura: problemas que envolvem números e figuras geométricas como, por exemplo, descobrir padrões;
3. Paradigma do exercício – referência à semi-realidade: situações artificiais que são utilizadas para produção de exercícios;
4. Cenários de investigação – referência à semi-realidade: situações artificiais que fazem um convite para os alunos na exploração e explicação dessas situações;
5. Paradigma do exercício – referência à realidade: situações reais através de problemas fechados;
6. Cenários de investigação – referência à realidade: situações reais que vão ser trabalhadas em uma perspectiva aberta. (FADEL, 2007, p. 75)

Diante do exposto, Skovsmose (2008, p. 21) afirma que:

Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e procurar explicações. O convite é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se...?”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O “Por que isto?” do professor apresenta um desafio, e os “Sim, por que isto?”

dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio na busca de explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário de investigação, os alunos são responsáveis pelo processo.

Assim, a comunicação entre professor e aluno segue uma lógica diferente da habitual, as perguntas e as respostas podem ser organizadas e realizadas por ambos, criando, na sala de aula, um ambiente de mediação de informações e, conseqüentemente, de conhecimento.

Assumir esses papéis parece não ser tão complicado ao aluno, que provavelmente deseja atuar na busca do próprio saber; porém ao professor é necessário quebrar alguns paradigmas, como o da previsibilidade do conteúdo abordado em suas aulas. No cenário investigativo, o professor planeja a partida, mas não o percurso e o ponto de chegada, pois os alunos podem atribuir diferentes significados às tarefas apresentadas, em virtude de seus ideários e de experiências anteriores, o que naturalmente possibilita diferentes ambientes de aprendizagem.

Nesse sentido, entendemos o cenário investigativo como uma possibilidade de autonomia intelectual¹⁴, admitindo que, ao formular questões, conjecturas e argumentações perante os colegas de classe e o professor, o aluno assume uma postura ativa, envolvente e comprometida. Para isso, consideramos importante destacar a dinâmica das aulas, a qual apresentamos no próximo item.

2.4 Dinâmica das tarefas: favorecendo a comunicação matemática

Diante do exposto, em relação à resolução de problemas e aos cenários de investigação, a dinâmica das aulas requer alterações com relação às tradicionais, ou seja, é necessário criar um ambiente em sala de aula que favoreça a metodologia adotada. Assim, o formato de aula apontado por Van de Walle (2009), que divide os momentos da aula em três fases, parece-nos adequado às perspectivas apresentadas.

O autor considera que cada fase da tarefa tem objetivos específicos, o que requer uma organização. De forma simples – antes, durante e depois –, Van de Walle (2009, p. 61) acrescenta que “essas três fases de lição são construídas ao redor de um único problema ou tarefa para os estudantes” e, independentemente do tempo necessário para a realização da tarefa, é importante conservar os três momentos da dinâmica.

¹⁴ A autonomia intelectual é caracterizada em termos da consciência e da disposição dos alunos para recorrer às suas próprias capacidades intelectuais, quando envolvidos em decisões e julgamentos matemáticos (SKOVSMOSE, 2008).

O primeiro momento, a **fase do “antes”**, é caracterizado como a preparação dos alunos e, segundo Van de Walle (2009, p. 62-63), possui três objetivos. Esse autor, dirigindo-se ao professor, orienta:

(1) Verificar se os alunos compreenderam o problema de modo que você não precise esclarecer ou explicar depois individualmente a lição. (2) Esclarecer aos estudantes quais são as suas expectativas antes de eles começarem a trabalhar no problema. Isso inclui tanto como eles irão trabalhar (individualmente, em duplas ou em pequenos grupos) quanto o que você espera que eles produzam além de uma resposta. (3) Preparar os estudantes mentalmente para trabalhar no problema e pensar sobre os conhecimentos prévios que eles possuem e que serão mais úteis.

De acordo com o Van de Walle, não há uma ordem para seguir esses objetivos, e pode haver tarefa que não contemple todos. O momento posterior, em que os alunos desenvolvem a tarefa, é conhecido como a **fase do “durante”**. As ações que caracterizam a atuação do professor nesse momento são:

- “Deixar os alunos caminharem por si mesmos”.
- “Escutar ativamente”.
- “Propor dicas e sugestões cuidadosamente”.
- “Encorajar a verificação e o teste das ideias”.
- “Fornecer atividades aos alunos que terminam depressa”.

Quanto a essas ações, entendemos que nessa fase o papel do professor, assim como em outras, é o de mediador do processo de aprendizagem, porém, nesse momento, espera-se que o professor faça o exercício de compreender o trabalho que está sendo realizado nos grupos e dê o apoio necessário para que os alunos avancem em seu conhecimento. Muitas vezes, esse apoio pode vir em forma de questões, principalmente quando os alunos se utilizam de conhecimento matemático em uma investigação ou quando estão em um impasse. Essas questões podem ser problematizadas no sentido de direcionar o olhar do aluno para outros caminhos e fazê-lo pensar sobre o que está elaborando. Em resumo, o professor precisa orientá-lo de forma que avance em suas conjecturas.

A última fase, a do **“depois”**, é o momento do debate, em que os alunos expõem suas ideias à classe. Nessa etapa, as discussões, as justificações e os desafios apresentados pelos alunos acerca das conclusões sobre o problema trabalhado são fundamentais para a construção

do conhecimento individual. Van de Walle (2009) destaca que esse é um dos momentos mais difíceis do trabalho, pois o professor precisa conduzir as discussões de maneira que elas sejam produtivas, agradáveis, compreensíveis, estimulantes, etc. Dessa forma, os alunos não se sentirão constrangidos ao expor suas conclusões, ou mesmo ao questionar os colegas e o professor sobre suas respectivas considerações.

Não há um tempo previsto para essa fase; cabe ao educador saber o momento de parar, ou seja, de concluir essa etapa. Esse fechamento pode ocorrer por meio de uma síntese, com as ideias principais e hipóteses, e pode ser utilizado para futuras investigações. É conveniente o professor fazer uma avaliação do trabalho nesse momento, falar sobre as conquistas, mais que sobre os obstáculos que precisam ser vencidos, pois isso possibilitará referências para a próxima tarefa.

Resumindo, essa estratégia favorece a capacidade dos alunos de comunicar-se matematicamente, refletir sobre suas formulações e seu poder de argumentação. As questões relacionadas a valores são marcantes nesse tipo de aula, pois os diferentes pontos de vista entre os alunos ou entre os grupos são pontos positivos e fundamentais para o trabalho investigativo.

2.5 A escrita dos alunos como elemento fundamental do processo de resolução de problemas

A leitura e a escrita nas aulas de Matemática têm sido foco de pesquisas, congressos e publicações há algum tempo. Dentre eles, destacamos alguns congressos de que participamos: o XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (Ebrapem)¹⁵ e o 17º Congresso de Leitura do Brasil (Cole)¹⁶, nos quais várias pesquisas nessa linha foram apresentadas, o que satisfatoriamente tem aumentado nos últimos anos. Além disso, dentre algumas discussões a respeito do tema de que participamos, consideramos relevantes para nossa pesquisa: “Escritas e leituras na educação matemática” e “Educação matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidades”, ambas organizadas por Lopes e Nacarato (2005, 2009, respectivamente). Dentre as leituras que fizemos, destacamos: *A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidade*, de Powell e Bairral (2006); *Letramento no Brasil:*

¹⁵ XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, realizado em Rio Claro/SP, no período de 5 a 7 de setembro de 2008, organizado pela Universidade Estadual Paulista (Unesp) “Júlio de Mesquita Filho”, pelo IGCE – Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) e pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PGEM).

¹⁶ 17º Congresso de Leitura do Brasil (Cole), realizado no período de 20 a 24 de julho de 2009, na Unicamp – Campinas/SP, organizado pela Associação de Leitura do Brasil (ALB).

habilidades matemáticas, organizado por Fonseca (2004); *Pesquisas em Educação Matemática: um encontro entre teoria e prática*, escrito por Lopes e Curi (2008); e *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*, organizado por Smole e Diniz (2001).

No entanto, pouco tem sido o foco dos professores das escolas públicas nessa questão em sala de aula, também porque o material que recebem da Secretaria Estadual de Educação e os livros didáticos que há nas escolas pouco a enfatizam; além disso, muitos professores de Matemática não imaginam que seja possível desenvolver a leitura e a escrita em suas aulas. Quando professores realizam atividades de resolução de problemas, percebem que a questão central está na interpretação, que se revela na dificuldade de relacionar as ideias, bem como nas dificuldades com o vocabulário. Muitas vezes, esses professores solicitam a ajuda dos professores de língua portuguesa, que também enfrentam problemas semelhantes em suas aulas. Isso evidencia que, mesmo sendo identificadas como dificuldades dos alunos no aprendizado da matemática, a leitura e a escrita estão distantes do seu processo de aprendizagem. Tal problemática é abordada por Smole (2001, p. 72):

[...] a dificuldade que os alunos encontram em ler e escrever textos de problema está, entre outros fatores, ligada à ausência de um trabalho específico com o texto do problema. O estilo no qual os problemas de matemática geralmente são escritos, a falta de compreensão de um conceito envolvido em um problema, o uso de termos específicos da matemática que, portanto, não fazem parte do cotidiano do aluno e até mesmo palavras que têm significados diferentes na matemática e fora dela – total, diferença, ímpar, média, volume, produto – podem constituir-se em obstáculos para que ocorra a compreensão.

De forma semelhante, Carrasco (apud FONSECA; CARDOSO, 2005, p. 65) aponta os problemas de leitura e escrita como possíveis responsáveis por dificuldades com tarefas matemáticas e discute algumas soluções:

A dificuldade de ler e escrever em linguagem matemática, onde aparece uma abundância de símbolos, impede muitas pessoas de compreender o conteúdo do que está escrito, de dizerem o que sabem de matemática e, pior ainda, de fazerem matemática. Neste sentido, duas razões podem ser apresentadas. A primeira consiste em explicar e escrever, em linguagem usual, os resultados matemáticos, [...] Uma segunda solução seria a de ajudar as pessoas a dominarem as ferramentas de leitura, ou seja, compreenderem o significado dos símbolos, sinais e notações.

Como vimos, a necessidade da leitura e da escrita nas aulas de Matemática é premente; acreditamos que a resolução de problemas possa vir ao encontro dessa questão, mesmo porque essa aliança possibilita outros benefícios aos alunos, como os descritos por Van de Walle (2009, p. 73):

- “O ato da escrita é um processo reflexivo”. Na busca de explicar seus raciocínios e hipóteses em registro escrito, há um movimento intelectual e individual do aluno que o conduz à organização de ideias e à reformulação destas, para adaptar-se à situação desejada.

- “Um relatório escrito é um ensaio para o momento de discussão”. Muitas vezes, a socialização das considerações dos alunos sobre determinada tarefa não pode ser realizada na mesma aula, mas falar sobre suas ideias em outros momentos não é fácil. Por isso, o registro de suas hipóteses é importante nesse momento, assim como em outros que necessite retomá-las.

- “Um relatório escrito também é um registro escrito que permanece quando a lição acaba”. As informações contidas nesses registros vão além das respostas dos alunos a um problema, ou seja, conduzem as suas hipóteses não somente sobre a tarefa, mas levam a outros contextos desencadeados por ela. Isso possibilita uma “avaliação”, por parte do professor, do desenvolvimento do aluno quanto ao seu processo de aprendizagem e dá ao docente indicativos para a organização de novas tarefas, de forma que o aluno progrida em suas expectativas.

Powell e Bairral (2006) afirmam que a escrita é “um instrumento poderoso de reflexão sobre o pensamento” e ressaltam que essa “reflexão sobre os atos mentais pode gerar representações e heurísticas para o aprendiz desenvolver maneiras mais eficazes de pensar”. Além disso, os autores acrescentam que a escrita auxilia os alunos na aquisição de um vocabulário amplo, o que possibilita uma maior compreensão, em que a matemática se faz presente.

Por tudo que foi dito e considerando o objetivo do ensino da Matemática apresentado por Gómez-Granell (2002, p. 282) “... que os alunos dominem e usem significativamente sua linguagem e os usos específicos da mesma.”, evidenciam-se a necessidade e a importância da leitura e da escrita nas aulas de Matemática. Santos (2005) sugere alguns instrumentos que possibilitem a inserção da linguagem nas aulas de Matemática, como produção de cartas, abertura e fechamento de pequenos textos, comentários, biografia matemática, mapas conceituais (sínteses), projeto glossário, diários, etc.

Conforme o exposto, as tarefas que propomos aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental estão em sincronia com a resolução de problemas, pois acreditamos que, por meio delas, as ideias probabilísticas dos alunos começam a emergir, sobretudo porque a dinâmica desenvolvida em sala de aula leva em conta a concepção de Skovsmose sobre cenários de investigações. Presumimos que essa fusão faça sentido, em especial, porque a temática empregada nas tarefas envolve a probabilidade, conteúdo matemático que possibilita uma concepção crítica muito mais que outros.

Assim, procuramos nestes dois capítulos, discutir as concepções teóricas que são referências em nossa pesquisa e, a seguir, apresentaremos nosso percurso metodológico.

Capítulo III

Procedimentos metodológicos: focando o objeto de investigação

Neste capítulo apresentaremos o percurso metodológico da pesquisa. Para tal, descreveremos os procedimentos utilizados, o contexto e as ações desenvolvidas, visando responder à questão de investigação desta pesquisa e atingir os objetivos propostos.

3.1 As opções metodológicas

Esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa. A pesquisa qualitativa em educação é abordada por vários autores (LUDKE; ANDRÉ, 1986; BOGDAN; BIKLEN, 1994; GOLDENBERG, 1997). Dentre as características dessa abordagem de pesquisa, destacamos: “A pesquisa qualitativa ou naturalista envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes” (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.13).

De acordo com Goldenberg (1997, p. 70-71), um dos passos necessários para o início da pesquisa é a formulação do problema, que deve ser pensado de modo que possa ser pesquisado por processos científicos. Para isso, a autora aponta a necessidade de tornar o problema concreto e explícito por meio da imersão sistemática no assunto; de realizar o estudo da literatura existente; de discutir com pessoas que acumulam experiência prática no campo de estudo.

Muitas foram as questões que nos conduziram a uma pretensão, *a priori* mais ampla, que foi estreitada no decorrer da pesquisa. Por exemplo: como a resolução de problemas é desenvolvida em sala de aula e como se apresentam nas avaliações institucionais? Alguns planos foram modificados; outros, consolidados, como o propósito inicial de realizar a pesquisa em um contexto de sala de aula, com alunos do 7º ano, em uma perspectiva de resolução de problemas. Assim, redefinimos o foco da nossa pesquisa, e as questões norteadoras passaram a ser:

- Quais são as ideias sobre linguagem e pensamento probabilístico que os alunos apresentam, em um contexto de resolução de problemas, mediado pelo processo de comunicação?

Dessa forma, os objetivos da pesquisa foram:

- Identificar ideias probabilísticas que emergem do processo de comunicação (oral/escrita), tendo como contexto a resolução de problemas.
- Analisar as ideias que emergem em um contexto de interação e negociação entre alunos e professora-pesquisadora, em resolução de problemas.

Algumas das recomendações de Ludke e André (1986) ao pesquisador iniciante sobre estratégias de produção dos dados da pesquisa foram relevantes no processo de análise: 1) a delimitação progressiva do foco de estudo; 2) a formulação de questões analíticas; 3) o aprofundamento da revisão de literatura; 4) a testagem de ideias com os sujeitos; e 5) o uso de comentários, observações e especulações ao longo da coleta.

Os dados foram produzidos a partir dos seguintes instrumentos:

- (a) registros escritos dos grupos de alunos em folha impressa fornecida pela professora, realizados durante a atividade;
- (b) entrevista semiestruturada realizada com quatro alunos, fora do contexto de sala de aula;
- (c) registros em vídeo da classe, durante a socialização (*fase do depois*) das tarefas;
- (d) registros escritos pela professora-pesquisadora no diário de campo.

3.2 O foco de investigação

Esta pesquisa teve como foco central de investigação analisar as ideias probabilísticas que os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental desenvolvem, ao resolver problemas, em uma abordagem que se aproxima de cenários de investigações, em tarefas propostas pela professora-pesquisadora.

Iniciamos os nossos estudos e hipóteses por meio de reflexões sobre experiências no processo de ensino e de aprendizagem de matemática, mais precisamente em relação às

probabilidades, compartilhando das reflexões apresentadas por Powell e Bairral (2006, p. 47): “No modelo tradicional de ensino, apelidado por alguns de “cuspe e giz”, encontramos poucas situações que solicitam que os alunos reflitam sobre a matemática que vão aprender, sobre o que pensam dessa área ou sobre eles próprios em relação à disciplina”.

Em outras palavras, partimos da hipótese de que o modelo tradicional¹⁷ de ensino não tem mobilizado o desenvolvimento do pensamento estatístico e probabilístico dos alunos; provavelmente, seus conceitos têm sido apresentados de forma preconcebida, em que predominam as regras e a memorização destas, as narrações de práticas e reflexões de outras pessoas. Pensamos que a estatística e a probabilidade são conteúdos propícios à investigação, ao processo dinâmico, à ligação dialética entre ideário e reflexões e, para tal, propomos uma sequência de tarefas, em uma abordagem que se aproxima do conceito de cenário de investigação, envolvendo conceitos relacionados à probabilidade. Tomamos, como foco de nossa pesquisa, a busca por identificar, num contexto marcado pelas investigações e pela resolução de problemas, as ideias sobre probabilidade que os alunos apresentam no processo de comunicação (oral/escrita); e analisar o processo de produção dessas ideias levando em conta a interação entre alunos e professora-pesquisadora.

O ambiente de aprendizagem é composto pela professora-pesquisadora e por turmas singulares formadas, por sua vez por sujeitos únicos, com ideários distintos e expectativas particulares, envolvidos em um contexto, ora como autores/atores principais, ora como secundários. Os dados relacionados aos sujeitos, que consideramos pontos importantes na descrição da pesquisa, serão descritos no transcorrer do capítulo. A seguir, apresentamos informações sobre as tarefas aplicadas.

3.3 As tarefas

Nossa pesquisa foi dividida em duas fases: a primeira foi desenvolvida com todos os alunos das turmas investigadas, organizados em grupos no contexto de sala de aula; e a segunda, individualmente, fora da sala de aula, com quatro alunos que participaram também da primeira fase.

¹⁷ Prática de ensino onde reflexões de outras pessoas são-lhes narradas e pede-se simplesmente que eles memorizem. Procedimento denominado por Freire (1970, 1973) de método bancário e por Gattegno (1970) de método tradicional de ensino. – (apud POWELL e BAIRRAL (2006, p. 48))

3.3.1 As tarefas: primeira fase

A sequência de tarefas da primeira fase — descritas no próximo capítulo —, foi elaborada com o Grupo Colaborativo de Pesquisa em Educação Matemática da Universidade São Francisco, *campus* de Itatiba — Grucomat, do qual fazemos parte. Baseamo-nos em atividades apresentadas e/ou elaboradas por: Lopes(2000), Lopes (2003), Sáenz (1999) e APM (Associação dos Professores de Matemática)¹⁸, nas quais fizemos algumas adaptações, visando atingir nossos objetivos. Levamos em conta as recomendações de Lopes (2008, p. 71) sobre o ensino das noções probabilísticas: “a partir de uma metodologia heurística e ativa, por meio de proposições de problemas concretos e da realização de experimentos reais ou simulados”.

A sequência é composta por 18 tarefas que visam mais diretamente o desenvolvimento do pensamento probabilístico, porém é possível identificar, em algumas, aspectos relativos à estatística. Tal contexto está de acordo com o que é preconizado por Batanero (apud DUARTE, 2004): “existe uma forte relação entre Estatística e Probabilidade”. As tarefas, divididas em nove etapas, proporcionaram aos alunos contato com a linguagem ligada a estocástica, análise de possibilidades, estimativa de medida de chances, experimentação e avaliação de situações reais e simuladas.

Em todas as fases da organização das atividades, esteve presente nossa questão de investigação: “Quais são as ideias sobre linguagem e pensamento probabilístico que os alunos apresentam em um contexto de resolução de problemas mediados pelo processo de comunicação?” Nossas vivências em sala de aula, assim como os estudos feitos por meio da literatura, conduziram-nos a um ponto de vista que se faz presente nessa organização, o qual resumimos da seguinte forma:

Há de fato, algumas ideias normativas de estocástica que nós queremos que nossos estudantes entendam e sejam capazes de usar. Entretanto, enquanto alguns experimentos probabilísticos podem ser melhor modelados por um espaço de probabilidade uniforme, outros podem ser melhor modelados a partir de uma perspectiva frequentista.(SHAUGHNESSY, 1992, p. 8)

¹⁸Disponível no site: <<http://www.apm.pt/portal/index.php?id=32582>>. Último acesso em: 06/02/2010.

Neste sentido, Shaughnessy defende uma abordagem pragmática que envolve vários conceitos de modelagem probabilística, apresentados segundo a perspectiva de Godino, Batanero e Cañizares (1996) no capítulo anterior: “O modelo de probabilidade que nós empregamos numa situação particular deveria ser determinado pela tarefa que estamos pedindo que os nossos estudantes investiguem e pelos tipos de problemas que desejam resolver.” (SHAUGHNESSY, 1992, p. 8).

Dessa forma, ao organizarmos a sequência de tarefas, procuramos envolver situações que favorecessem reflexões e interpretações relacionadas às diferentes concepções de probabilidade – clássica, frequentista ou empírica, subjetivista e formal ou axiomática - assim como a linguagem empregada no cotidiano e que está relacionada com o grau de crença pessoal, análise de possibilidades, estimativas de medidas de chance, experimentação e avaliação de situações reais e simuladas. Consideramos todos esses como fatores facilitadores do processo de ensino e aprendizagem do conhecimento probabilístico.

Orientamo-nos em Van de Walle (2009) quanto à dinâmica da resolução de problemas que envolvem três fases: “**o antes**” - momento que a tarefa é apresentada a classe-; “**o durante**” - realização da tarefa nos pequenos grupos (quatro alunos, em que cada um tinha uma função predefinida) -; e “**o depois**” - socialização das conclusões dos grupos e formulação de novas conclusões.

Optamos por trabalhar com grupos de quatro alunos, porém devido à ausência de alguns alunos, em alguns dias, houve grupos com três alunos e outros com cinco alunos. Ao organizarmos esses agrupamentos, levamos em conta alguns critérios pedagógicos que consideramos relevantes, tendo como objetivo a interação e a produção de conhecimentos, as facilidades e/ou as dificuldades demonstradas pelos alunos nas aulas de Matemática, o sexo, as características pessoais, como: liderança, flexibilidade, responsabilidade, etc. A atuação da professora-pesquisadora com as classes desde o início do ano letivo e o fato de ter acompanhado uma das classes desde o 6º ano, favoreceram esse diagnóstico.

3.3.2 As tarefas: segunda fase

Nesta fase, foi proposta aos sujeitos uma sequência com sete tarefas, com características semelhantes às anteriores, na perspectiva de resolução de problemas, tendo como foco questões

probabilísticas. No entanto, algumas características foram alteradas, ou seja, os sujeitos realizaram as tarefas individualmente e em um contexto diferenciado, fora da sala de aula.

Foram escolhidos quatro alunos, dois de cada classe, que manifestaram conceitos probabilísticos quando argumentavam a favor de suas conjecturas nos registros escritos e, com a permissão dos professores, ausentaram-se da sala em momento de aula de outra disciplina. A escolha dos sujeitos não foi tarefa fácil, pois muitos se encontravam em situação parecida, mas a necessidade de focar mais nosso interesse de pesquisa obrigou-nos a um recorte para reduzir o número de alunos envolvidos.

As tarefas foram propostas a todos, em um mesmo momento, em uma sala ociosa da escola, porém foram realizadas individualmente, sem a intervenção da professora. Em outro momento, os alunos foram entrevistados individualmente, pela professora-pesquisadora, por meio de questões semiestruturadas, elaboradas com base nas respostas dadas às tarefas realizadas. O objetivo era não apenas a coleta de informações sobre suas considerações escritas e suas interpretações em relação ao proposto, mas a possibilidade de novas reflexões. Sobre essa dinâmica, Szymanski, Almeida e Prandini (1998) apresentam como entrevista reflexiva:

Esse tipo de instrumento tem sido empregado em pesquisas qualitativas como uma solução para o estudo de significados subjetivos e de tópicos complexos demais para serem investigados por instrumentos fechados num formato padronizado (Banister et al., 1994). Lakatos (1993) inclui como conteúdos a serem investigados fatos, opiniões sobre fatos, sentimentos, planos de ação, condutas atuais ou do passado, motivos conscientes para opiniões e sentimentos. Minayo (1996, p. 108) refere-se aos dados obtidos pela entrevista, dividindo-se entre os dados de natureza objetiva – fatos “concretos”, “objetivos” – que podem ser obtidos por outros meios – e os de natureza “subjetiva”, como atitudes, valores, opiniões, que “só podem ser obtidas com a contribuição de atores sociais envolvidos”. (p.10)

Os dados foram obtidos por meio de registro escrito dos alunos, respostas às tarefas propostas e por meio de registro audiogravado no momento da entrevista sobre as tarefas. Essa última fase da pesquisa, a entrevista, foi realizada em dois dias, em aproximadamente quatro aulas.

A comunidade escolar, frequentada pelos sujeitos envolvidos na pesquisa, está inserida em outra comunidade, do bairro a que pertence, e que (in) diretamente se reflete nas ações desses sujeitos no ambiente escolar. No próximo item apresentamos informações que consideramos relevantes a esse respeito.

3.4 A escola, a comunidade e a comunidade escolar

A escola na qual a pesquisa foi realizada é de ensino regular e é constituída por 8 classes de Ensino Médio, no período noturno, e 18 classes de Ensino Fundamental II, no período diurno. É a única que atende estes níveis de ensino no bairro, que possui aproximadamente 17 mil habitantes — o maior bairro da cidade de Amparo-SP, considerado o bairro dos trabalhadores. Os moradores, em sua maioria, estão ligados a três empresas: Magnetti Marelli, Ypê e Pena Branca, que rodeiam o bairro; no entanto, há muitas pessoas que exercem mão de obra não qualificada. Dentro deste contexto, pode-se dizer que se criou na comunidade uma expectativa relacionada à formação para o mundo do trabalho, mais precisamente relacionado às três empresas, que representam diferentes níveis. Existe uma crença no bairro de que os mais qualificados trabalham na Magnetti Marelli, empresa conhecida como de boa remuneração dos empregados; em seguida, os menos qualificados seriam admitidos na Ypê, conhecida pela segurança no emprego, mas considerada como de baixa remuneração; e, em terceiro lugar, a Pena Branca, que necessita de pessoas que tenham força bruta e exige pouca escolaridade. Há na comunidade uma valorização muito grande da Guarda Mirim, instituição pública que capacita e emprega adolescentes, denominados “guardinhas”, que geralmente realizam trabalhos bancários ou trabalham como atendentes em empresas ou órgãos públicos. Essa valorização inviabiliza qualquer crítica à instituição, pois ela significa o primeiro emprego, o primeiro salário e a chance de ser contratado no futuro.

Nesse universo, a escola é composta pelos filhos dos trabalhadores dessas empresas, e muitos deles exercem a função de “guardinhas”. A representação da classe trabalhadora não é uma elaboração da comunidade, mesmo porque não há nela instituições e mobilizações que defendam a classe trabalhadora. A imagem construída do bairro e da escola também não é dos moradores; esse é um olhar de quem vem das regiões mais centrais da cidade e que classifica a periferia como lugar de violência, de presença das drogas, dos pobres e dos caipiras.

O discurso e a prática da escola não são no sentido de resgatar valores ou embrenhar-se numa fantasia de escola comunidade, prêmios de gestão ou coisa parecida. A equipe, quando se reúne, procura problematizar sobre o aluno real, pertencente àquela comunidade e tenta imaginar que espaço pode haver para um conhecimento que faça sentido diante do imediatismo da sobrevivência; e ao mesmo tempo, que produza um sentido de pertencimento que não se reduza a um romântico bairrismo. O grupo anseia que esse pertencimento ao lugar possa “engordar” a

crítica às dinâmicas sociais que perpetuam a divisão entre centro e periferia, pois a classificação *escola de periferia* carrega em si a destinação de seus alunos: serem fornecedores de mão de obra.

Dos alunos que terminam o Ensino Médio, poucos vão a uma faculdade privada, que fica muito próxima desse bairro. Dentre os que vão, quase todos são aprovados, devido ao grande número de vagas e ao arremedo de bolsas que as faculdades privadas criaram com o discurso da inclusão. Poucos se aventuram a estudar fora desses limites, que não são apenas geográficos, pois custear viagem e curso é praticamente impossível. Nos 12 anos em que a escola possui Ensino Médio, apenas um aluno, depois de muito tentar, hoje cursa Economia na USP. Esse aluno recentemente fez uma visita à escola como embaixador da USP, porém esse seu trabalho praticamente não surtiu efeito para os alunos. Constata-se que, cada vez mais, acentua-se a marca do “estudante de segunda classe”, aquele a quem foi dado o acesso à escola, mas para quem pouco foi alterada a estrutura social; ele, porém, não está preocupado com isso: afinal, está exposto ao apelo do consumo, da moda, do “corpo malhado” e do modelo último de celular que pode ser adquirido em muitas prestações, mas não se interessa por uma universidade de elite, como as públicas.

O cotidiano escolar é constituído por uma biblioteca, aberta nos três períodos, mesmo porque também é a sala dos dois coordenadores que muitas vezes se veem mergulhados em papéis e demandas dos professores. A leitura é o projeto mais caro que há na escola. O contexto do bairro sempre é levado em conta pelos professores, mas, mesmo assim, muitas vezes a escola significa para os alunos uma grande omissão. O espaço da sala de aula é muito usado, pois a mobilidade causa transtorno, a ideia do silêncio total, conseguido com autoritarismo e com a estratégia da cópia ainda está disseminada na prática escolar.

Aos professores que já assumiram a causa do conhecimento, cabe o trabalho de transformar um discurso de escola para todos num fazer em que cada aluno se conceba como cidadão.

3.5 Os alunos

Dentre quatro classes de 7º ano do Ensino Fundamental da escola da Rede Estadual de Ensino em que a professora-pesquisadora ministra aulas, foram escolhidas duas. A escolha não foi aleatória: optamos primeiramente por classes em que a maioria das aulas eram duplas (uma

aula seguida da outra, com 50 minutos cada). Quem conhece o cotidiano de uma escola, sabe que, por mais que ele seja organizado por seus gestores e que algumas ações sejam indispensáveis, o tempo de 50 minutos reduz-se consideravelmente, devido a fatores de caráter físico e burocrático, dentre eles: a locomoção de professores, quando não há salas ambiente, e de alunos, quando esse recurso não existe; a organização da classe, como, por exemplo, a disposição das carteiras no início e no final da aula, se o trabalho for em grupos; a chamada dos alunos e a anotação dos ausentes em pasta específica, etc. Além disso, colegas do Grucomat haviam relatado que, no período de uma aula simples, a dinâmica não fluía conforme esperavam, principalmente devido ao tempo.

Aliada a esse critério, existia a curiosidade em desenvolver a pesquisa em duas classes específicas: uma em que os outros professores da mesma turma relatavam que o trabalho era difícil, devido à agitação da maioria dos alunos; e outra, considerada por eles, mais tranquila, em que os alunos apresentavam maior concentração na realização de atividades, se comparada a primeira classe aqui referida. Quanto ao rendimento escolar, ambas as classes apresentam resultados parecidos: alguns alunos demonstravam facilidade, enquanto outros revelavam dificuldades. Na maioria das aulas, os alunos não demonstravam autonomia para a realização das atividades propostas e necessitavam da intervenção da professora ou dos colegas.

Cada classe possuía 30 alunos e aproximadamente 28 deles participaram diariamente das atividades realizadas nesta pesquisa em um período de 22 dias (21 aulas duplas em cada classe), no horário normal das aulas de Matemática. Ao todo, 60 estudantes participaram da pesquisa. Tanto no 7º ano B quanto no 7º ano E, a quantidade de meninos e meninas era a mesma, ou seja, 17 meninos e 13 meninas. As idades variavam entre 11 e 17 anos, e a maioria deles tinha 12 anos, idade equivalente à série. Os alunos com 11 anos completaram 12 no decorrer do ano letivo.

Os alunos que apresentavam defasagem idade/ano escolar justificavam tal situação por terem sido retidos nas séries iniciais do Ensino Fundamental, que frequentaram em escolas municipais ou de outros Estados. O sistema adotado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, quanto ao Ensino Fundamental, é a progressão continuada¹⁹, o que faz com que cada vez mais haja menos retenção.

¹⁹ Procedimento utilizado que permite ao aluno avanços sucessivos e sem interrupções pelas séries, que são organizadas em ciclos. O aluno é avaliado ao longo e ao final de um ciclo. – SÃO PAULO, Deliberação CEE Nº 09/97 – Disponível no site: < http://www.ceesp.sp.gov.br/Deliberacoes/de_09_97.htm>. Último acesso em: 05/10/2009.

Esse contexto reforça a importância de um trabalho dinâmico e flexível, que favoreça a autonomia dos educandos, pois o ambiente de aprendizagem envolve professores e turmas singulares, que por sua vez são sujeitos únicos, com ideários distintos e expectativas particulares, envolvidos em um mesmo contexto.

Na apresentação desta pesquisa, os nomes dos alunos foram substituídos, para preservar suas identidades.

3.6 Contextos gerais da pesquisa de campo

Com o propósito de que acontecesse da melhor forma possível, a professora-pesquisadora organizava a disposição das carteiras na sala de aula antecipadamente e conversava com os alunos no final de cada aula sobre os grupos de trabalho da próxima aula, quando havia mudanças. Os alunos entravam na sala e dirigiam-se ao seu grupo. A professora-pesquisadora falava com os alunos sobre o que estava planejado para aquele dia. Antes de iniciar as tarefas, os alunos e professora-pesquisadora conversavam sobre a dinâmica: a fase do antes, do durante e do depois. A dinâmica incluía uma função específica para cada integrante do grupo, porém todos eram responsáveis pela execução da tarefa. A escolha dos alunos e suas respectivas funções eram atribuídas ao grupo:

- 1 redator – aluno responsável pelos registros do grupo;
- 1 cronometrista – aluno responsável por controlar o tempo utilizado e necessário para realização da tarefa;
- 1 relator – responsável pela apresentação das conclusões do grupo à classe;
- 1 coordenador – aluno que deveria orientar o trabalho do grupo.

Nem sempre era possível concluir a tarefa em um mesmo dia, pois algumas eram mais demoradas e/ou complexas que outras, ficando alguma(s) fase(s) para o próximo encontro. Neste caso, a professora- pesquisadora retomava o que havia sido feito na aula anterior, antes de prosseguir com a tarefa.

A discussão dos resultados, momento em que os grupos apresentavam seus resultados, era conduzida de forma diversificada, visando não torná-la rotineira e propiciar uma “melhor” discussão. Isso dependia de como os alunos registravam as atividades e de ser essa socialização feita no mesmo dia em que havia o desenvolvimento da tarefa. Assim, em alguns momentos, a professora-pesquisadora registrou as respostas dos alunos na lousa; em outros, as conclusões

foram transcritas em transparência ou em cartazes; e houve momentos em que os alunos falaram sobre suas conclusões.

3.7 Análise dos dados

A análise dos dados teve início durante a pesquisa de campo. Consideramos as reflexões feitas, ao final de cada aula, na elaboração do diário de campo e na leitura dos registros dos alunos como os primeiros ensaios da análise. Esses momentos também possibilitaram à professora-pesquisadora reflexões sobre sua postura como professora. Acreditamos que foi o momento mais tenso da investigação, porque exigia um cuidado além do aspecto pedagógico, ou seja, além do empenho para garantir a aprendizagem por parte dos alunos, existia o desejo de que bons dados fossem produzidos, também para a pesquisadora.

Para as descrições da análise, utilizamos: os registros das tarefas²⁰; as transcrições de recortes ou fragmentos das gravações, em vídeo, dos momentos de socialização; os fragmentos das entrevistas realizadas com quatro alunos (individualmente); e as notas do diário de campo da professora-pesquisadora. Optamos pela realização de uma análise interpretativa do conjunto de materiais produzidos, pois consideramos que apresentam, de forma singular, vantagens e limitações acerca de nossos objetivos. Desse modo, a junção desses materiais fornece informações relevantes que se complementam no momento de análise; e possibilita ao pesquisador interpretações de diferentes sentidos.

Para a análise do vídeo baseamo-nos no modelo analítico²¹ proposto por Powell, Francisco e Maher (2004), com a intenção de enfatizar que a pesquisa sobre o desenvolvimento do pensamento matemático é aprimorada por meio de dados de vídeo. Com o objetivo de organizar e deixar claros os dados da nossa pesquisa aos leitores, intitulamos de episódios os trechos de gravações de vídeo transcritas. Também elaboramos algumas siglas para referirmo-nos aos instrumentos de dados utilizados. Descrevemos as siglas no quadro a seguir:

²⁰ Foram recolhidos para análise todos os registros feitos pelos grupos, alguns foram xerocados quando eram retomados em outra aula, com o objetivo de observar as alterações feitas.

²¹ O modelo analítico empregado para estudar o desenvolvimento do pensamento matemático é organizado em sete fases interativas e não lineares – observar atentamente os dados do vídeo, descrever os dados do vídeo, identificar eventos críticos, transcrever, codificar, construir enredo e compor narrativa.

Quadro 3 – Instrumentos de dados.

INSTRUMENTOS	SIGLAS
Registro Escrito	RE
Diário de Campo	DC
Fragmento de Vídeo (Episódio)	EP
Fragmento da Entrevista	FE

No capítulo seguinte, descreveremos as tarefas realizadas, por meio de uma narrativa na qual apresentaremos as considerações dos alunos diante dos problemas apresentados e algumas amálgamas de hipóteses e interpretações que fomos construindo na descrição dos dados, o que pode ser considerado como uma pré-análise.

No quinto capítulo, analisaremos como os alunos vão se apropriando da linguagem probabilística no decorrer do trabalho. Para isso, utilizaremos os dados produzidos por todos os alunos nos diversos instrumentos utilizados na coleta de dados.

Na análise apresentada no capítulo seis traremos o movimento das concepções probabilísticas apresentadas pelos quatro alunos que realizaram a segunda fase das tarefas. Ao fazer essa análise, baseamo-nos no material produzido por cada um desses alunos na primeira e na segunda fase das tarefas; ou seja, utilizamos o registro escrito produzido pelo grupo em que o aluno estava na primeira fase, o registro escrito produzido individualmente por ele na segunda fase, a transcrição dos trechos das gravações de vídeo em que esse aluno se posicionou durante as tarefas e no momento da entrevista. As anotações feitas pela professora-pesquisadora no diário de campo também serão utilizadas.

CAPÍTULO IV

“Mergulhando na sala de aula”: alunos e professora-pesquisadora compartilhando aprendizagens sobre probabilidade

Neste capítulo propomo-nos a “mergulhar na sala de aula” e apresentar os dados produzidos a partir do compartilhamento de saberes, conhecimentos e aprendizagens sobre o pensamento probabilístico. Inicialmente apresentaremos a sequência de tarefas propostas aos alunos.

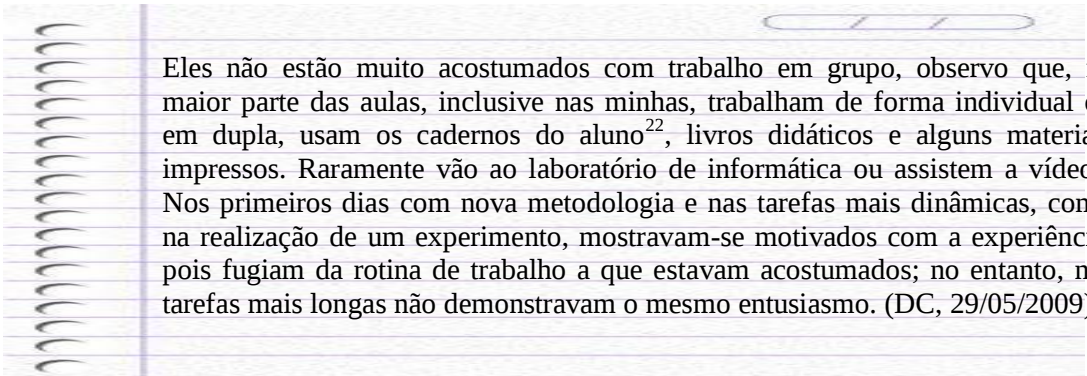
4.1 A sequência de tarefas

Neste item, trazemos as tarefas propostas, assim como algumas informações sobre sua aplicação e as observações realizadas com essa experiência. Organizamos essa apresentação em duas etapas, ou seja, em um primeiro momento expomos as tarefas da primeira fase, realizadas com todos os alunos, e, em seguida, as da segunda fase, desenvolvidas por quatro alunos.

Paralelamente a essas descrições, que acreditamos que contribuirão para uma maior compreensão da pesquisa e de suas alterações, buscaremos estabelecer interlocução com alguns teóricos, os quais, (in)diretamente, têm contribuído para a (trans) formação dos personagens (alunos e professora-pesquisadora) envolvidos.

4.1.1 Os alunos frente à dinâmica proposta

Os alunos, assim como seus pais, receberam bem a proposta de participar da pesquisa e, mesmo a professora-pesquisadora tendo explicado como seria o trabalho, estavam ansiosos pelo seu início, principalmente por haver gravações em vídeo. Antes de entregar as tarefas, a professora-pesquisadora conversou com eles sobre a dinâmica, ou seja, esclareceu quais e como seriam as fases do desenvolvimento das tarefas; que funções desempenhariam; qual a importância do grupo no desenvolvimento de cada um e do projeto do qual fariam parte; a necessidade de o aluno expor o que pensa, sem muita preocupação em estar certo ou errado. Sobre o exposto a professora-pesquisadora fez alguns registros em seu diário de campo como o seguinte:

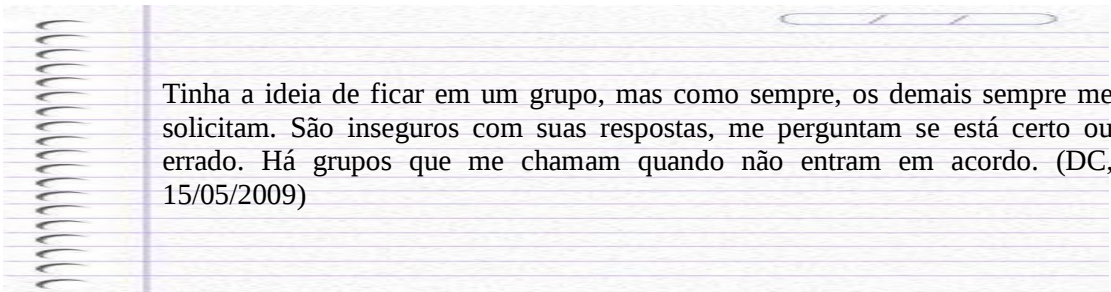


Eles não estão muito acostumados com trabalho em grupo, observo que, na maior parte das aulas, inclusive nas minhas, trabalham de forma individual ou em dupla, usam os cadernos do aluno²², livros didáticos e alguns materiais impressos. Raramente vão ao laboratório de informática ou assistem a vídeos. Nos primeiros dias com nova metodologia e nas tarefas mais dinâmicas, como na realização de um experimento, mostravam-se motivados com a experiência, pois fugiam da rotina de trabalho a que estavam acostumados; no entanto, nas tarefas mais longas não demonstravam o mesmo entusiasmo. (DC, 29/05/2009)

Essa questão será mais detalhada no próximo item, no qual as tarefas desenvolvidas são descritas.

Em nossas experiências com trabalho em grupos observamos que os alunos, quando têm a possibilidade de escolher seus parceiros de grupos, excluem alguns colegas. Esse foi um dos aspectos que levamos em conta quando optamos, previamente, por organizar pessoalmente os grupos. A maioria deles manifestava interação harmoniosa, mas houve grupos que solicitaram a intervenção da professora-pesquisadora em suas discussões, às vezes, envolvendo questões pessoais. Nesses momentos a professora-pesquisadora procurava mostrar-lhes a importância do trabalho em grupo para a construção do conhecimento individual.

A insegurança ao realizar as tarefas era maior no início: a presença da professora-pesquisadora era solicitada nos grupos com o intuito de que ela dissesse a eles se o que fizeram estava certo ou errado; no decorrer da sequência de tarefas, a frequência dessa solicitação foi diminuindo, porém os alunos ainda necessitavam da validação da professora como autoridade. Essas ocorrências podem ser observadas em um trecho do diário de campo da professora-pesquisadora:



Tinha a ideia de ficar em um grupo, mas como sempre, os demais sempre me solicitam. São inseguros com suas respostas, me perguntam se está certo ou errado. Há grupos que me chamam quando não entram em acordo. (DC, 15/05/2009)

²² Distribuído pela Secretária de Educação do Estado de São Paulo, é parte da Proposta Curricular. Disponível em: <<http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Default.aspx?alias=www.rededosaber.sp.gov.br/portais/saopaulofazescola>>. Último acesso em: 24/09/2009.

Sobre essa questão do trabalho em equipe em aulas de Matemática, Sadovsky (2007, p. 57) afirma que:

[...] há momentos em que as questões novas enfrentadas pelos alunos geram tantas dúvidas que a interação com os colegas legitima novas perguntas, inaugurando outras possibilidades para o matemático. É possível imaginar que o docente sempre esteja em condições de propiciar ferramentas “que faltam” para acabar de elaborar uma ideia, e basicamente é isso mesmo que acontece; [...] numa sala de aula a qualidade do trabalho torna-se mais densa quando fica evidente que para avançar é preciso tomar decisões inéditas, para as quais os alunos apresentam diferentes pontos de vista sobre os quais devem se posicionar.

No próximo item, descreveremos as tarefas desenvolvidas, assim como as respectivas observações e considerações, nossas e dos alunos. As considerações dos alunos quanto às tarefas foram semelhantes nas duas classes pesquisadas; portanto, não achamos necessário trazê-las em conjunto e optamos por apresentá-las ora uma, ora outra.

4.2 Tarefas: primeira etapa

Nesta fase, foi proposta aos grupos uma sequência de tarefas relacionadas às probabilidades. No total foram 18 tarefas, organizadas de acordo com o contexto que as envolvia. Optamos, ao descrevê-las, por agrupá-las por foco temático, porém, a análise não se detém em uma organização linear, pois pensamos que essa organização pudesse influenciar na interpretação da forma como as ideias foram produzidas.

4.2.1 A linguagem probabilística

A linguagem probabilística foi nosso ponto de partida. Pautamo-nos em conclusões de pesquisas como as de Bentz e Borovcnik y Bentz (apud SAENZ, 1999), que argumentam que as respostas obtidas podem não representar os processos de pensamento dos estudantes, pois as questões relacionadas à linguagem podem confundi-los; e as pesquisas de Green (apud SAENZ, 1999), que apontam pouca habilidade verbal dos estudantes para descrever com coerência situações probabilísticas. Sendo assim, tínhamos como objetivos, com as três primeiras tarefas que descreveremos a seguir, proporcionar contato e reflexões sobre palavras que fazem parte do nosso cotidiano e da linguagem probabilística, já que por meio delas expressamos nossa

confiança sobre a ocorrência de certos eventos. Também tínhamos como propósito observar como os alunos atribuíam significados a essas palavras.

A dinâmica de aplicação dessas tarefas, as quais favorecem a interpretação das probabilidades de forma subjetiva, ocorreu de forma muito parecida, porém os detalhes fazem-se necessários. Assim, apresentaremos, na sequência, as tarefas, as sínteses das respostas dos alunos — nos registros escritos —, trechos transcritos da gravação vídeo, trechos do diário de campo da professora e as nossas considerações a respeito destas tarefas.

4.2.1.1 Tarefas: 1, 2 e 3²³

Tarefa 1

Leia as quatro frases da primeira coluna e relacione-as com a segunda coluna:

- | | |
|---------------------------|--------------------|
| (1) Não pode ocorrer | (A) Muito provável |
| (2) Não ocorre muito | (B) Improvável |
| (3) Ocorre com frequência | (C) Provável |
| (4) Ocorre quase sempre | (D) Pouco provável |

Tarefa 2

Escreva uma palavra ou uma frase que signifique o mesmo que:

- a) impossível:
- b) possível:
- c) igual possibilidade:
- d) pouca possibilidade:
- e) muita probabilidade:

²³ Tarefas adaptadas para o contexto, retiradas de Sáenz (1999).

TAREFA 3: A linguagem da sorte ou do azar?

Daniel e Ana são amparenses e estudam na mesma classe. Seu professor solicitou a eles que preparassem uma previsão do tempo para o dia 12 de junho, Dia dos Namorados. Sabendo que ainda estamos no mês de maio, Daniel e Ana não podem predizer exatamente o que vai acontecer (ou não podem consultar na internet essa previsão). Para isso, eles vão consultar a lista de frases abaixo para fazer a previsão ou ainda podem acrescentar outras expressões diferentes.

Certo
Possível
Bastante Provável
Há alguma possibilidade
Seguro
É impossível
Quase impossível
Se espera que
Incerto
Há alguma probabilidade
Pode ser
Sem dúvida

1. Em primeiro lugar, eles começaram a **classificar as frases** segundo a confiança que expressam no que vai acontecer. Veja parte da classificação que eles estão fazendo:

Impossível
Quase impossível
.....
Seguro=certo

Como você poderia ajudar Daniel e Ana a completarem essa classificação?

2. Estão aqui algumas das coisas que poderiam acontecer em Amparo em 12 de junho:

- Choverá.
- O dia será claro e ensolarado.
- Haverá um ligeiro vento.
- A temperatura máxima passará dos 30 graus.
- A temperatura mínima será 10 graus abaixo de zero.
- A temperatura estará acima de zero grau.
- Cairá neve sobre o telhado das casas.
- O céu estará nublado.

Para cada uma das frases acima, Daniel e Ana escolheram uma das frases do quadro inicial para expressar a confiança de que o fato ocorra. Veja como começaram a previsão:

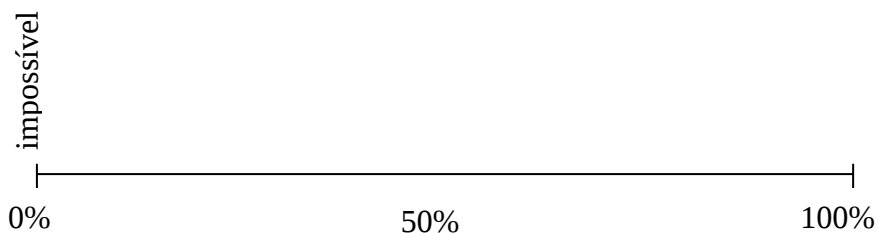
Previsão do tempo para 12 de junho em Amparo:

Pode ser que chova.

.....

Ajude Daniel e Ana a completar essa previsão.

3. Ana e Daniel terminaram seu trabalho, mas não estão satisfeitos. Para completá-lo, vão indicar no intervalo abaixo as palavras do quadro inicial de acordo com a confiança que expressam no que vai acontecer.

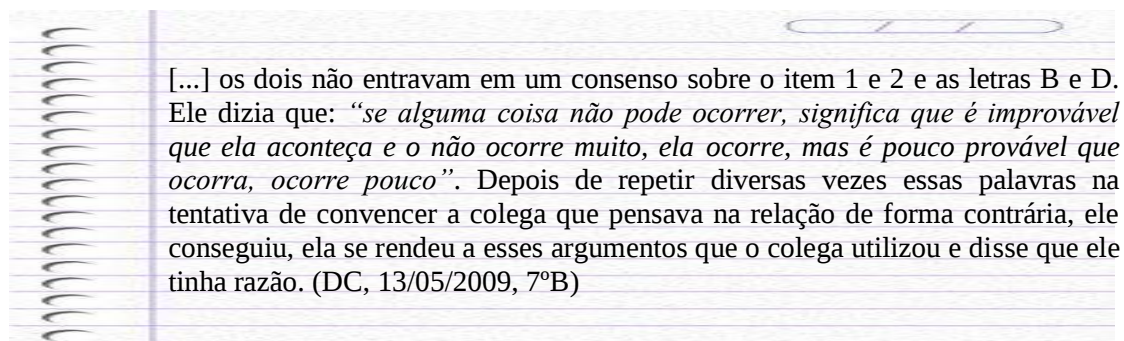


As tarefas iniciavam-se da seguinte forma: na “**fase do antes**”, cada grupo recebeu uma folha — com as **tarefas 1 e 2** e uma questão para reflexão —, em que deveriam, depois de discutir e chegar a um consenso, registrar a conclusão/resposta do grupo sobre cada tarefa.

A professora-pesquisadora leu com eles as tarefas e abriu espaço para perguntas e esclarecimentos sobre elas, o que não ocorreu nesse momento. Depois disso, os grupos iniciaram a “**fase do durante**”, momento da execução das tarefas.

Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), a representação da probabilidade sob o ponto de vista subjetivista, é uma expressão da crença ou da percepção pessoal, em que o indivíduo toma como base suas próprias experiências. Dessa forma, é possível que os alunos atribuam diferentes probabilidades a uma mesma situação, seja por meio de algoritmo convencional, seja pela expressão verbal.

Tal fato foi observado durante a fase do desenvolvimento, na qual algumas discordâncias surgiram, entre os integrantes de alguns grupos, a respeito dos significados que cada um atribuía às palavras. O trecho do diário de campo a seguir ilustra essa ocorrência, ao evidenciar um fato ocorrido na realização da **tarefa 1**, com dois alunos de um mesmo grupo:



A socialização, **fase do depois**, tinha início assim que todos os grupos terminavam a etapa proposta, mas isso nem sempre ocorria no mesmo dia, pois às vezes o desenvolvimento das tarefas se estendia mais que o previsto.

Na **tarefa 1**, praticamente não houve discordância entre os grupos quanto ao significado das palavras. A maioria relacionou as colunas da seguinte forma:

<i>Não pode ocorrer ↔ Improvável</i>
<i>Não ocorre muito ↔ Pouco provável</i>

As divergências ocorreram com os **itens 3 e 4**, nos quais metade dos grupos relacionou de uma forma e outra metade, de forma oposta:

<i>Ocorre com frequência ↔ Provável</i>	<i>Ocorre com frequência ↔ Muito provável</i>
<i>Ocorre quase sempre ↔ Muito provável</i>	<i>Ocorre quase sempre ↔ Provável</i>

Esse trecho, do ponto de vista de Godino, Batanero e Cañizares (1996), ressalta a subjetividade, que não determina nenhuma norma de como medir a probabilidade, mas deriva de leis básicas de probabilidade, tanto que é um critério coerente, pautado em fundamento intuitivo.

Não houve um acordo, nas duas classes pesquisadas, a respeito da relação entre essas palavras, o que era esperado. No entanto, observa-se que há uma concepção equivocada por parte de alguns alunos quanto ao conceito de frequência, pois parte dos alunos relacionam a palavra a acontecimentos repetitivos, não levam em conta que o intervalo que determina a frequência varia de acordo com a situação.

As divergências quanto às classificações foram expostas no momento da socialização: os grupos tentavam, por meio de suas argumentações, convencer os demais de que suas colocações estavam corretas, como mostra o episódio abaixo:

Episódio 1²⁴

Prof^a.: - *Um dos grupos que relacionou “ocorre com frequência” com “muito provável” poderia falar sobre esta relação?*

Julia: - *Por que “ocorre sempre” é muito provável de ocorrer. Sempre acontece.*

Carla: - *Quase sempre!*

Prof^a.: - *Então, Carla, para você o “muito provável” está relacionado com “quase sempre”?*

Carla: - *É!*

Prof^a.: - *Vocês vêm à escola com frequência?*

Júlia: - *Sim.*

Prof^a.: - *Vocês vêm todos os dias da semana?*

Júlia: - *Não, mas eu venho em muitos.*

Prof^a.: - *Você vai ao dentista com frequência?*

Júlia: - *Sim.*

Prof^a.: - *E como é essa frequência?*

Érica: - *Eu vou ao dentista uma vez por mês, não com frequência!*

²⁴ Fragmento da socialização da tarefa 1, 7º E.

Rodrigo: - *Eu jogo videogame quase sempre.*

Prof^a.: - *Rodrigo, de acordo com o que você falou, se eu for a sua casa à noite, é provável que eu te encontre jogando videogame ou é muito provável?*

Rodrigo: - *É muito provável.*

Murilo: - *“Com frequência”, porque é frequentemente, muitas vezes. “Quase sempre” não é “sempre”.*

Júlia: - *“Frequência” é muito mais que “quase sempre”, porque é frequente, é muito. Então, “mais provável” é “com frequência”.*

Elaboramos um quadro com a síntese das concepções dos alunos — produzidas nos registros escritos — quanto ao significado das palavras propostas na **tarefa 2**:

Quadro 4 – Síntese das respostas da tarefa 2.

Palavras	Significados
<i>Impossível</i>	<u>Difícil</u> - Não morrer (ter vida eterna). Não pode ocorrer. Uma coisa que quase não dá para acontecer. Uma pessoa voar. Algo que nós não conseguimos fazer. Não errar. <u>Um cavalo ter 5 patas</u> . Não há chances de acontecer. <u>Ter aula de Matemática na 6ª feira</u> . Nunca vou conseguir. Isso nunca vai acontecer.
<i>Possível</i>	Uma coisa que é possível de acontecer. Fácil. <u>Tudo, menos a morte</u> . Pode ou não ocorrer. Trabalhar. Algo que podemos fazer. Amar alguém e a pessoa não te amar. O que pode acontecer. Algo que poderá acontecer. <u>Muita chance de acontecer</u> . Algo que vai acontecer. Não tem certeza, mas tem confiança.
<i>Igual possibilidade</i>	Todos podem ganhar a mesma quantia. Algo que pode ou não ocorrer. <u>Chance de ocorrer</u> . Chances iguais. <u>É uma chance de ter futuro na vida</u> . <u>Todos nós temos chance de ir ao cinema</u> . <u>Aquilo que é possível</u> . <u>Quase igual</u> . <u>Uma coisa possível que pode ser igual</u> . <u>Um jogo</u> . Aconteceu alguma coisa igual. <u>De ganhar, chances de vencer</u> .
<i>Pouca possibilidade</i>	Aquilo que é pouco provável. <u>Uma chance diferente do outro</u> . Uma coisa pouco possível de acontecer. Pode acontecer, mas não tem muitas chances. Difícil de acontecer. Pouca chance (de vencer/acontecer). Pode ganhar e ao mesmo tempo perder. Não há muitas chances de acontecer. Vai chover, mas não tenho certeza. Talvez isso aconteça.
<i>Muita probabilidade</i>	Qualidade de provável. Muita chance de acontecer. Pode ocorrer. <u>Muitos negócios ou muitas coisas</u> . Muitas chances de ganhar alguma coisa. Bastante chance de acontecer. <u>Acreditar em si mesmo</u> . Várias chances de acontecer. <u>Eu estou naquele lugar, eu estou falando com confiança</u> . Nós temos chance de ganhar.

As palavras ou frases, na coluna de significados, que estão sublinhadas são aquelas que foram questionadas pelos colegas, no momento da socialização. Alguns grupos, depois que ouviam as considerações dos colegas a respeito das suas conclusões, tentavam justificar seus argumentos; outros diziam ter-se enganado e, diante disso, faziam alterações ou desconsideravam suas conclusões, como mostram os trechos a seguir:

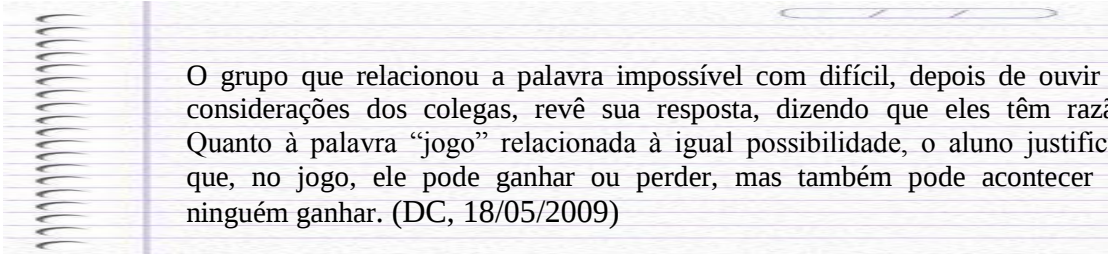
Episódio 2²⁵

Júlio: - *Difícil não é impossível!*

Humberto: - *É mesmo.*

Marília: - *Se eu disser que uma coisa é difícil, não quer dizer que seja impossível.*

Michel: - *Pode ser quase impossível.*

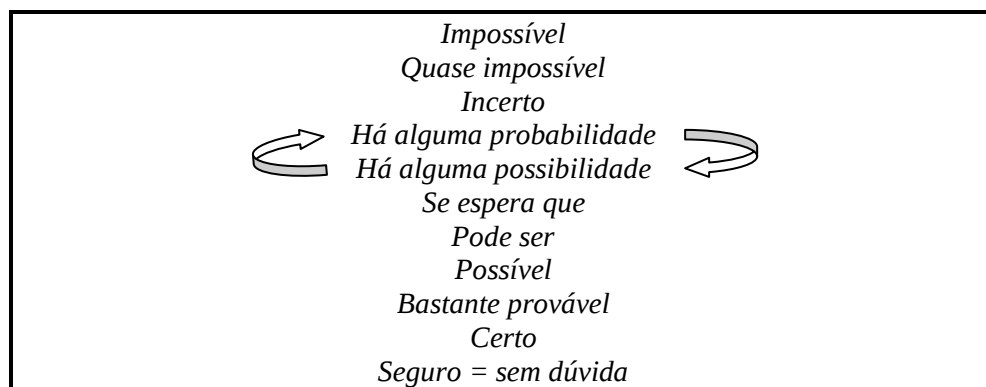


O grupo que relacionou a palavra impossível com difícil, depois de ouvir as considerações dos colegas, revê sua resposta, dizendo que eles têm razão. Quanto à palavra “jogo” relacionada à igual possibilidade, o aluno justificou que, no jogo, ele pode ganhar ou perder, mas também pode acontecer de ninguém ganhar. (DC, 18/05/2009)

A **tarefa 3**, dividida em três itens, foi a mais longa e cansativa de todas as da sequência. Atribuímos tal fato à falta de experiência dos alunos com o conteúdo envolvido e com o tipo de tarefa proposta: definir problema, formulação de questões e hipóteses, etc. Diante dessa observação, o fator complexidade da tarefa também pode ser considerado, pois alia linguagem probabilística, medida de chance e avaliação de situações futuras, estabelecendo conflitos entre as concepções probabilísticas.

No momento da socialização do **item 1** da **tarefa 3**, a professora-pesquisadora e os alunos chegaram ao seguinte consenso:

²⁵ Fragmento da socialização da tarefa 2, 7º B.



A ordem de classificação das frases: *Há alguma possibilidade* e *Há alguma probabilidade* dividiu a opinião dos alunos: alguns optavam pela quarta posição, outros pela quinta. A classe decidiu concluir da forma apresentada no quadro acima, pois os alunos consideravam coerentes as duas classificações. No item 3, que pedia para classificar essas palavras no intervalo os alunos tinham que estabelecer uma relação da ordem de classificação e a posição no intervalo de medida, as considerações quanto às posições foram parecidas.

Observamos, nos registros escritos, que as frases: *Impossível*, *Quase impossível* e *Incerto* ocupavam, nessa ordem, as primeiras posições do intervalo, estando a palavra *impossível* no 0% e as demais ao seu lado. De modo semelhante ocorreu com as frases: *Bastante provável*, *Certo*, *Seguro* e *Sem dúvida*, que, nessa ordem, finalizam o intervalo, sendo as três últimas nos 100% e a frase *Bastante provável*, um pouco antes. Os alunos atribuem essa classificação à indubitabilidade que essas palavras expressam, tal como evidenciado no episódio 3:

Episódio 3²⁶

Prof^a.: - O grupo do Murilo sugeriu colocar o seguro, certo e sem dúvida nos 100%. O que acham?

Flávio: - Está certo. Nenhum tem dúvida.

Os diferentes pontos de vista focalizaram-se mais nas expressões cujas estimativas não expressam precisão: *Há alguma possibilidade*, *Há alguma probabilidade*, *Se espera que*, *Pode ser* e *Possível*. Na socialização, metade dos alunos disse que *Pode ser*, *Se espera que* e *É possível* representam 50%, portanto deveriam ficar juntos no intervalo. A outra metade atribui 50% apenas

²⁶ Fragmento da socialização da tarefa 3, item 3, 7º E.

à expressão *Pode ser*. Acreditam que as palavras: *Se espera que* e *Possível* vêm um pouco depois dos 50%, como mostra o episódio transcrito das gravações de vídeo:

Episódio 4²⁷

Júlia: - *Nós colocamos o se espera que um pouquinho depois dos 50%.*

Prof^a.: - *Por quê?*

Flávio: - *Nós colocamos nos 50%, porque está esperando, mas não tem certeza.*

Júlia: - *Ele está esperando, então tem quase certeza! Mas não é certeza, tem um pouco de dúvida.*

Quanto ao item 2, a polêmica quanto às alterações climáticas sofridas pelo aquecimento global foi citada e, em alguns momentos, serviu como justificativa para algumas previsões. O quadro a seguir mostra as palavras que os grupos relacionaram a acontecimentos possíveis, ao fazerem previsões do tempo:

Quadro 5 – Previsões do Tempo – Tarefa 3, item 2.

Acontecimento	Palavras relacionadas
Choverá.	<i>Pode ser.</i>
O dia será claro e ensolarado.	<i>Possível, há alguma possibilidade, há alguma probabilidade, se espera que, pode ser, quase impossível.</i>
Haverá um ligeiro vento.	<i>Há alguma possibilidade, há alguma probabilidade, seguro, bastante provável, possível, se espera que, pode ser.</i>
A temperatura máxima passará dos 30 graus.	<i>Bastante provável, pode ser, possível, incerto, impossível, se espera que, certo, há alguma possibilidade, quase impossível.</i>
A temperatura mínima será de 10 graus abaixo de zero.	<i>Impossível, incerto, bastante provável, pode ser, quase impossível, possível.</i>
A temperatura estará acima de zero grau.	<i>Pode ser, há alguma possibilidade, bastante provável, possível, certo, sem dúvida, quase impossível, se espera que.</i>

²⁷ Fragmento da socialização da tarefa 3, item 3, 7º E.

Acontecimento	<i>Palavras relacionadas</i>
Cairá neve sobre o telhado das casas.	<i>Sem dúvida não, impossível, quase impossível, incerto, pode ser.</i>
O céu estará nublado.	<i>Incerto, se espera que, sem dúvida, possível, há alguma probabilidade, certo, bastante provável, pode ser, há alguma possibilidade, possível, bastante provável.</i>

Esta tarefa proporcionou diversas reflexões e questionamentos. As dúvidas relativas às frases adequadas às situações não foram tão significativas como as referentes às questões climáticas e aos fatores que poderiam influenciar as previsões. Observamos certa dificuldade dos alunos para determinar as características climáticas e a temperatura de cada período — estações — do ano, assim como para refletir sobre essas questões. Além das discussões na sala de aula, houve alunos que levaram o problema para casa e retornaram com as considerações dos familiares; outros retomaram a questão depois de algum tempo, acrescentada de outras considerações. Skovsmose (2008) classifica tarefas desse tipo, na qual as referências são reais, como uma possibilidade de os alunos produzirem significados não só para os conceitos, mas também para as tarefas.

Pudemos concluir, com base nestas primeiras tarefas, que aquelas relacionadas à linguagem estocástica, à interação entre os alunos e professores, assim como as tarefas que estabelecem relação com a realidade, possibilitam o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos estudantes.

4.2.2 A análise de possibilidades

Na sequência, realizamos tarefas relacionadas à análise das possibilidades. Foram seis tarefas, divididas em duas etapas, 3ª e 4ª. Tínhamos por objetivo proporcionar reflexões acerca de possibilidades de eventos aleatórios e não aleatórios, pois em nossas experiências com o ensino das probabilidades observamos que, para resolução de problemas, fazia-se necessária a ideia ou mesmo a representação do espaço amostral²⁸. Também encontramos apontamentos do assunto em

²⁸ Chamamos de **espaço amostral** ao conjunto de todos os resultados possíveis um experimento aleatório (BIANCHINI; PACCOLA, 2004).

algumas pesquisas. Green (apud SÁENZ, 1999, p. 24) assinala que a ideia de probabilidade “só se pode compreender se se tem alguma representação do correspondente espaço amostral” (tradução nossa)²⁹. Fischbein (apud GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996, p. 40) concluiu que estudantes adolescentes, em experiências aleatórias de várias provas, apresentam dificuldade em estabelecer o espaço amostral, sobretudo por desconhecimento combinatório.

4.2.2.1 Tarefas: 4, 5, 6, 7, 8 e 9³⁰

Tarefa 4

Para ganhar o campeonato mundial de Fórmula 1, o piloto Rubens Barrichelo precisou obter 10 pontos em apenas duas corridas. Quais seriam os resultados possíveis para lhe garantir o campeonato? Use a tabela de pontos abaixo.

Classificação	Pontos
1 ^a	9
2 ^a	6
3 ^a	4
4 ^a	3
5 ^a	2
6 ^a	1

Tarefa 5

Para chegar às finais do campeonato brasileiro de futebol, basta ao Corinthians obter 4 pontos nas 3 partidas que tem pela frente contra o Grêmio, o Vasco e o Cruzeiro. Sabendo que a vitória vale 3 pontos; o empate, 2 pontos; e que a derrota vale 0 ponto:

- Liste os casos em que o Corinthians vai para as finais.
- Liste os casos em que o Corinthians é desclassificado.

²⁹ “Solo se puede comprender si se tiene alguna representación del correspondiente espacio muestral.”

³⁰ Tarefa adaptada de LOPES, A. J. (Bigode). *Matemática agora é feita assim*. 7ª série. São Paulo: FDT, 2000.

Tarefa 6

Existem 5 maneiras diferentes de obter o número 4, adicionando dois números naturais. Quais são elas?

Tarefa 7

De quantas maneiras diferentes dá para obter o número 10, adicionando dois números naturais? Escreva essas maneiras.

Tarefa 8

De quantas maneiras diferentes dá para obter 1000, adicionando dois números naturais? Será que é preciso escrever todas as maneiras? Por quê?

Tarefa 9

Escreva todas as possibilidades de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas. Cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos.

Essa sequência não foi tão demorada como a anterior, nem proporcionou muitas indagações, mas foi muito interessante. A introdução foi parecida com as tarefas anteriores. A professora lia a tarefa ou, às vezes, pedia para algum aluno ler e esclarecia algumas dúvidas; um dos grupos, na tarefa 4, perguntou o que era “possíveis resultados”, disseram que não sabiam; um colega de classe esclareceu, dizendo que eram as formas de Rubinho ser classificado. Depois do esclarecimento, fase do antes, iniciou-se a fase do desenvolvimento

As tarefas tinham como ponto de partida, ou seja, como situações-problema, determinar o número de possibilidades de os eventos ocorrerem. As situações propostas não eram exercícios em que o aluno aplica uma fórmula ou um processo operatório; sua resolução consiste em uma estratégia de busca de caminho para alcançar seu objetivo.

Observamos, nos registros escritos da tarefa 4, que menos da metade dos grupos encontrou todas as possibilidades de Rubinho ser campeão e que os registros dessas possibilidades ocorreram de diversas formas, como apresentadas na síntese desses resultados:

- Número de possibilidades apresentadas pelos grupos:
 - 8 possibilidades – 4 grupos.
 - 7 possibilidades – 1 grupo.
 - 6 possibilidades – 1 grupo.
 - 5 possibilidades – 3 grupos.
 - 2 possibilidades – 5 grupos.

- Tipos de registros realizados:
 - Texto: 2 grupos.
 - Tabela: 3 grupos.
 - Lista de classificação: 7 grupos.
 - Texto e lista de classificação juntos: 1 grupo.

Essa síntese despertou-nos para uma análise: como os grupos que escreveram todas as possibilidades fizeram seus registros?

Dos quatro grupos que escreveram todas as possibilidades, três fizeram por meio de tabela e o outro fez uma lista de classificação. Os grupos que registraram duas possibilidades pensaram apenas na possibilidade de Rubinho obter 10 pontos exatos para ser classificado, e não mais que isso.

Na socialização das **tarefas 4 e 5**, a professora-pesquisadora colocou as respostas dos grupos em transparência e apresentou-as no retroprojeto; os alunos observavam suas respostas e as dos colegas e faziam comentários, acrescentando as possibilidades que faltavam. Os alunos gostaram da utilização do retroprojeto, disseram que já haviam visto o aparelho na escola, mas não sabiam qual era sua função. As demais tarefas foram registradas na lousa.

Na **tarefa 5**, esperávamos que mais grupos colocassem todas as possibilidades, já que tinham vivenciado a tarefa 4, porém apenas um grupo chegou a essa conclusão:

a) liste os casos em que o Corinthians vai para as finais.

1º 3 pontos	1º 3 pontos	1º 3 pontos	1º 2 pontos	1º 2 pontos	1º 3 pontos
2º 3 "	2º 3 "	2º 2 "	2º 2 "	2º 2 "	2º 3 "
3º 3 "	3º 2 "	3º 2 "	3º 2 "	3º 0 "	3º 0 "

b) liste os casos em que o Corinthians é desclassificado.

1º 2 pontos	1º 3 pontos	1º 0 pontos
2º 0 "	2º 0 "	2º 0 "
3º 0 "	3º 0 "	3º 0 "

No momento da socialização, que também usou o retroprojetor, os grupos iam acrescentando possibilidades a suas respostas, oralmente, e chegaram a todas. Os alunos que torciam por times adversários do Corinthians não demonstraram interesse em realizar a tarefa.

Assim que os grupos falaram todas as possibilidades, a professora-pesquisadora fez alguns questionamentos que possibilitaram que determinassem a probabilidade de o Corinthians ser classificado ou ser desclassificado. Transcrevemos abaixo essas conclusões:

Episódio 5³¹

Profª: - Vocês disseram um empate e duas derrotas, e duas derrotas e uma vitória. E se for uma derrota, um empate e outra derrota, não é uma possibilidade diferente?

Humberto: - Dá no mesmo, os pontos são os mesmos.

Renato: - Três derrotas também é desclassificado.

Profª: - Será que colocamos todas as possibilidades?

Na lousa estava o seguinte o quadro:

Desclassificado	
2D	1E
2D	1V
3D	

Júlio: - Sim.

Profª: - Quantas são as possibilidades de ele ser desclassificado?

Classe: - Três.

Profª: - E de ele ser classificado?

³¹ Fragmento da socialização da tarefa 5, 7º B.

Classe: - Sete.
 Prof^a: - *O que é mais provável que aconteça?*
 Elaine: - *Que ele seja classificado.*
 Prof^a: - *Por quê?*
 Elaine: - *Ele tem mais chance.*
 Prof^a: - *Tem como medir essa chance?*
 Elaine: - *Ele tem sete chances.*
 Prof^a: - *Mas sete chances dentre quantas?*
 Júlio: - *Dez.*
 Prof^a: - *Porque dez?*
 Júlio: - *O total de chances, de ele classificar ou não.*
 Prof^a: - *Como eu digo, sete chances dentre dez?*
 Júlio: - *Sete décimos.*
 Prof^a: - *E qual a probabilidade do Corinthians ser desclassificado?*
 Júlio: - *Três décimos.*
 Prof^a: - *Uma outra forma de medir a probabilidade é a porcentagem. Como seriam essas probabilidades em porcentagem?*
 Júlio: - *70% e 30%.*

A professora-pesquisadora não havia trabalhado com os alunos sobre como calcular probabilidades; no entanto, além do número de possibilidades, o aluno Júlio, na interação com a professora e colegas, determinou a probabilidade de o Corinthians ser classificado e desclassificado. Pensamos que tanto as reflexões produzidas pela tarefa como a interação entre professora-pesquisadora e alunos favoreceram a conclusão do aluno. Como já foi mencionado, os alunos trazem consigo experiências anteriores, escolares e sociais e, ao depararem-se com situações como as propostas, produzem novos significados para essas ideias. Sobre essa questão, Skovsmose (2008, p. 67) argumenta que a reflexão com base em conteúdos matemáticos “exercita um entendimento profundo do assunto, por meio do qual o insight³² matemático se desenvolve”.

A **tarefa 6**, que de antemão já tinha o número de possibilidades, provocou dúvidas, pois, a princípio, os alunos encontraram três possibilidades, 0+4, 1+3 e 2+2. Surgiram algumas perguntas como: *Posso somar 1+1+1+1? O zero faz parte dos números naturais? Posso repetir?*

Depois de realizar alguns testes, invertendo algumas possibilidades, 4+0 e 3+1, chegaram à conclusão de que poderiam inverter os números e chegar ao número de possibilidades.

³² Em seu sentido restrito, o termo refere-se ao fato seguinte: quando tomamos consciência de uma relação, qualquer relação, ela não é experimentada como um fato em si mesmo, mas, antes, como algo que se conclui das características dos objetos que estão sendo considerados. Disponível no site: <<http://www6.ufrgs.br/psicoeduc/gestalt/a-psicologia-da-gestalt-nos-dias-atuais/>>. Último acesso em: 06/10/2009.

Com a **tarefa 7**, o trabalho foi tranquilo, os grupos chegaram ao total de possibilidades sem questionamentos ou dificuldades, pois a situação, que era familiar, não foi problema para eles.

As **tarefas 6 e 7** serviam de apoio para a **tarefa 8**. Era esperado que os alunos observassem a regularidade do número de possibilidades para, somando dois números naturais, obter os números 5 e 10 e que determinassem o número de possibilidades, sem a necessidade de escrever as possibilidades.

Praticamente todos os grupos escreveram em torno de dez possibilidades; alguns assim justificaram a necessidade de escrever todas as possibilidades:

- Não, porque daria muitas maneiras.
- Serão várias maneiras de fazer as somas, os números serão infinitos.
- Sim, porque não está falando de quantas maneiras é preciso.
- Sim, porque quase todos os números de 100 a 1000 dá para fazer as contas como as possibilidades descritas.
- Sim, para todos entender.
- Não precisa nem pensar, porque as mesmas maneiras que fizemos na tarefa 7, é só fazer na tarefa 8, acrescentando dois zeros, dá 6 maneiras.
- Não, porque tem mais de mil maneiras.

Na socialização, a professora questionou o grupo que justificou em seu registro que não era possível, “*porque tem mais de mil maneiras*”. Depois de pensar um pouco, os integrantes do grupo, que são tímidos, começaram a falar:

Episódio 6³³

Bernardo: - $1+999$, $2+998$, $3+997$, $4+996$,...

Prof^a: - *Mas tem mais de mil possibilidades?*

Aline: - *Vai até o mil.*

³³ Fragmento da socialização da tarefa 8, 7º E.

Prof^a: - Ah,... $999+1$, $1000+0$. Tem mais que mil?

Nelson: - $0+1000$. Então, 1001 possibilidades.

Alguns alunos, a princípio, não tinham entendido como se chegou a 1001 possibilidades, mesmo estando as somas sugeridas organizadas na lousa:

$0+1000, 1+999, 2+998, 3+999, 4+996, \dots, 999+1, 1000+0$
--

A professora-pesquisadora precisou retomar o que o grupo havia exposto, para que os alunos entendessem. Depois disso, retomou as duas tarefas anteriores e organizou o seguinte quadro:

Tabela 1 – Possibilidades de soma I

Nº Desejado	Nº Possibilidades
5	
10	
1000	
n	

Com ajuda dos alunos, a professora-pesquisadora foi completando o número de possibilidades, porém, quando chegaram a **n**, eles não concluíram que seria $n+1$, mesmo a professora chamando a atenção para a regularidade dos números anteriores. A tabela ficou da seguinte forma:

Tabela 2 – Possibilidades de soma II

Nº Desejado	Nº Possibilidades
5	$6 = 5+1$
10	$11 = 10+1$
1000	$1001 = 1000+1$
n	

Isso evidencia que o problema não é abstrato para eles; embora não tenham chegado à linguagem algébrica, eles podem ter chegado ao pensamento algébrico, ao concluírem o número de possibilidades.

A **tarefa 9** não foi bem compreendida por alguns grupos, que entenderam que deveriam escrever as possibilidades num jogo de par ou ímpar no qual os jogadores utilizassem até dois dedos. Esse grupo, quando observou o número de possibilidades que os demais grupos encontraram, achou um absurdo, pois eles haviam encontrado três possibilidades. Os colegas, após ouvirem a justificativa desse grupo, argumentaram, retomando com o grupo a situação problema. Depois disso, começaram a apresentar as possibilidades que encontraram, e a professora-pesquisadora registrou na lousa:

0+0	1+0	2+0	3+0	4+0	5+0
0+1	1+1	2+1	3+1	4+1	5+1
0+2	1+2	2+2	3+2	4+2	5+2
0+3	1+3	2+3	3+3	4+3	5+3
0+4	1+4	2+4	3+4	4+4	5+4
0+5	1+5	2+5	3+5	4+5	5+5

A experiência com essas tarefas, que visavam à análise das possibilidades — ferramenta necessária para determinar as probabilidades —, mostrou-se como um rico contexto para a mobilização e o desenvolvimento do pensamento probabilístico, pois a interação entre os alunos, os grupos e a professora foi fundamental para a avaliação dos raciocínios e para a obtenção do resultado.

4.2.3 A medida e o experimento

Quando analisamos as diferentes concepções probabilísticas, vimos que cada uma pode ser aplicada em alguma circunstância. O conceito frequentista, que pode ser aplicado a experimentos que se repetem indefinidamente, contrapõe-se, em algumas situações, à concepção subjetivista, que pode basear-se em um único experimento. Esse pressuposto conduziu-nos à organização das duas próximas tarefas. A primeira delas, a **tarefa 10**, é um problema de múltipla escolha que possibilita a medida de chance de uma situação equiprovável. A segunda, a **tarefa 11**, traz um experimento, lançamento de moedas, em que os grupos são conduzidos a ensaios repetitivos, em uma situação que nos remete à teoria clássica, na qual a probabilidade é definida quando se admite que todos os resultados têm as mesmas chances de ocorrer. Nossa intenção foi observar se o experimento podia alterar as concepções probabilísticas, demonstradas na tarefa 10.

4.2.3.1 Tarefas: 10 e 11³⁴

Tarefa 10

Uma ficha é vermelha de um lado e verde de outro. Se lançarmos essa ficha para cima, qual a face que terá mais chance de sair?

- a) a vermelha tem mais possibilidade;
- b) a verde tem mais possibilidade;
- c) as chances são as mesmas;
- d) não sei.

Por quê? _____

³⁴ Tarefas adaptadas de LOPES (2003).

Tarefa 11

- 1- Faça o lançamento de uma moeda por 5 minutos, registrando as faces e as coroas que saíram.
- 2- Registre os resultados dos experimentos do grupo no painel da classe.

A introdução da tarefa aconteceu com a sua leitura. Logo em seguida, os grupos começaram a executá-las. Dois grupos, um de cada classe, chamaram a professora-pesquisadora, pois um colega do grupo pensou em assinalar o **item d**, na **tarefa 10**, enquanto os demais achavam que a correta era **c**. Percebemos que a professora sempre é chamada em situações como essa, em que parte opta por um resultado e a outra parte, por outro. Talvez isso ocorra por falta de argumentos para convencer os colegas ou por insegurança, ao fazer a opção por uma dentre mais respostas, pois parece que os alunos querem saber quem está correto ou qual a opção adequada. Atribuímos como possíveis causas dessa observação a inexperiência com o ambiente investigativo, que estimula a autonomia, e os costumes impregnados culturalmente de que o professor é quem sabe, que relacionam o ensino à heteronomia.

A justificativa dos alunos que optaram pela alternativa **d** era de que eles não sabiam qual seria o resultado, poderia ser vermelha ou amarela, então, achavam melhor o item “não sei”. A justificativa desses alunos é coerente, pois esta alternativa pode causar um equívoco em sua interpretação e na resposta. Assim também, outra situação surgiu no Grucomat, que nos fez alterar o enunciado da tarefa 3, item 2. A pergunta era: “Você poderia ajudar Ana e Daniel a fazer a previsão do tempo...?”. Um dos grupos respondeu simplesmente que não poderia ajudar. Isso nos remete a duas questões abordadas por Bentz e Borovcnik y Bentz (apud SAENZ, 1999) em suas pesquisas. A primeira enfatiza a complexidade dos enunciados dos problemas, que, segundo os autores, pode conduzir a diferentes interpretações e soluções. A segunda traz a importância da comunicação entre o pesquisador e o sujeito como aspecto crucial na interpretação dos resultados. Esta foi a razão de acrescentarmos a justificativa “Por quê?” nas tarefas de múltipla escolha.

Observamos que todos os grupos, nos registros escritos, assinalaram o **item c**, “as chances são as mesmas”. E justificaram da seguinte forma:

- Porque a ficha não favorece nenhuma das cores, por isso tem as mesmas possibilidades.
- São as mesmas porque, você não sabe o que vai sair, pode sair verde ou vermelho.
- A moeda pode cair em cara ou coroa.
- Possibilidade de 50% vermelho e 50% verde.
- Porque as duas têm a mesma possibilidade.
- Não sabemos qual lado vai cair, as chances são iguais, é a sorte.
- Porque é sorte, e ninguém sabe qual vai cair.

Ao analisar as justificativas, constatamos que os alunos identificam a situação como aleatória e reconhecem as características da aleatoriedade, ao admitirem avaliar a probabilidade com precisão. Além dessa compreensão, o conceito clássico, favorecido pelo problema, prevalece nas justificativas dos alunos, ao admitirem que as duas cores têm as mesmas possibilidades; porém, o conceito formal também pode ser considerado, quando indicam que as possibilidades são de 50% para cada face, vermelha e verde.

A **tarefa 11** foi muito interessante. Os alunos divertiram-se muito, ao realizar o experimento. Cada grupo definiu, previamente, quem iria jogar a moeda e marcar os resultados; depois que todos estavam prontos, foi dado o sinal de que podiam começar. Havia apenas um relógio de pulso na sala; então, foi combinado que a professora-pesquisadora marcaria o tempo. À medida que o tempo passava, a professora avisava os alunos: “*Pessoal, já se passou um minuto...*”; estavam muito entusiasmados. Ao final, contaram os números de faces e coroas que saíram em seu grupo e anotaram em uma tabela na lousa. Assim que todos os grupos anotaram seus resultados, fizeram a soma e, por incrível que pareça, nas duas classes, a diferença entre o número de caras e coroas foi de uma unidade. Com o resultado do experimento, as expectativas dos alunos quanto à tarefa 10 confirmaram-se. Na socialização, a professora questionou-os:

Episódio 7³⁵

Prof^a: - *Será que é sempre assim, o número de cara e coroa são quase iguais?*

Samara: - *Não, é sorte!*

Prof^a: - *Mas se é sorte, precisa descobrir a probabilidade?*

Bernardo: - *Precisa.*

Humberto: - *Se você souber, tem mais chance de ganhar!*

³⁵ Fragmento da socialização da tarefa 11, 7ºB.

Prof^a: - *Por quê?*

Humberto: - *Você sabe o que dá mais.*

Antes de dar a tarefa por encerrada, a professora-pesquisadora propôs a esses alunos apostarem na próxima jogada da moeda. Cada aluno deveria escrever em um papel o resultado que achava que iria sair, cara ou coroa, e justificar o porquê da escolha. O resultado e as justificativas foram:

- **Quatro alunos - cara ou coroa:**

- *Pode ser qualquer um dos dois.*

- *Tem as mesmas possibilidades.*

- **Oito alunos – cara:**

- *Porque ontem eu estava jogando e só dava cara.*

- *Porque eu gosto mais.*

- *Porque me dá sorte.*

- **Dezessete alunos – coroa:**

- *Porque eu gosto mais.*

- *Porque tenho sorte com coroa.*

- *Porque gosto de ser rei.*

- *Porque ela tem mais chance de sair.*

- *Porque quando eu estava jogando a moeda caiu coroa.*

O objetivo dessa proposta era observar as estratégias utilizadas nessa situação que envolve aleatoriedade e experimentação, pois tínhamos como hipótese que, em situações de jogo de “aposta”, o conceito subjetivista prevalece, mas dotado de coerência e rigor. Ao analisar as justificativas dos alunos, observamos a forte presença da concepção subjetivista, com o uso de alguns termos como: *gosto mais*, *me dá sorte*, *gosto de ser rei*, *ontem eu jogava e só dava cara/coroa*. A concepção clássica faz-se presente quando os alunos justificam que pode ser qualquer um dos dois e que ambos têm as mesmas possibilidades. O conceito frequentista surgiu de forma explícita com a justificativa: *ela tem mais chance de sair*. O aluno que deu essa resposta

baseou-se na resposta da tarefa 11, que a classe tinha acabado de realizar, na qual o número de coroas foi uma unidade a mais que o número de caras. E de forma implícita, pois, como dissemos, ao utilizar a concepção subjetivista, o sujeito utiliza critérios consistentes. Neste caso, consideramos que o critério tenha sido o resultado do experimento observado, pois o número de alunos que apostaram em coroa é mais que o dobro do número de alunos que apostaram em cara.

4.2.4 Medida de chance

Vivemos em uma realidade em que situações de caráter aleatório não envolvem somente jogos, mas também o campo biológico, físico, social, político, etc. (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996). Nesse contexto, resultados imprevisíveis manifestam-se frequentemente. Portanto, a probabilidade faz parte do cotidiano nosso e dos nossos alunos, o que justifica nosso trabalho em sala de aula.

Essa etapa da sequência de tarefas contempla problemas relacionados diretamente às medidas de chance. Não que as anteriores também não as envolvessem, mas a medida surgia muitas vezes de forma espontânea em alguns grupos ou, mesmo, com alguns alunos. Essas tarefas estão interligadas com as anteriores por meio do raciocínio probabilístico, porém, é nesse momento que vamos analisar como é que eles interpretam essas situações e quais as conjecturas que fazem sobre probabilidade. Quanto aos conceitos de probabilidade, Van de Walle (2009, p. 509) destaca que “a ênfase deve estar na exploração em vez de em regras ou definições formais”. As **tarefas 12, 13 e 14** envolvem problemas com questões de múltipla escolha, em que os grupos devem justificar suas respostas. A **tarefa 15** traz uma reflexão acerca da probabilidade, e a **tarefa 16** envolve a análise de um jogo, em que, além de analisar as chances e a probabilidade de cada jogador vencer, é proposta uma avaliação da situação, na questão de ser justo ou não.

4.2.4.1 Tarefas: 12, 13, 14, 15 e 16³⁶

³⁶ As tarefas 12, 13 e 14 foram adaptadas da tese de doutorado de Lopes (2003). A tarefa 15 foi elaborada em conjunto com o Grucomat. A tarefa 16 foi adaptada de LOPES, A. J. (Bigode). *Matemática agora é feita assim*. 7ª série. São Paulo: FDT, 2000.

Tarefa 12 – Fichas no saco

Vou colocar uma ficha azul e uma amarela em um saco e pedir para você tirar uma sem olhar. Qual você pensa que seja mais provável sair?

- a) a azul;
- b) a amarela;
- c) ambas têm a mesma possibilidade;
- d) não sei.

Por quê? _____

Tarefa 13

E se eu colocar duas fichas azuis dentro do saco e uma amarela, qual é a mais provável que saia?

- a) a azul;
- b) a amarela;
- c) ambas têm a mesma chance;
- d) não sei.

Por quê? _____

Tarefa 14

Com duas fichas azuis e uma amarela dentro do saco, a probabilidade de tirar uma vermelha:

- a) é certa;
- b) pouco provável;
- c) impossível;
- d) não sei.

Por quê? _____

Tarefa 15

Depois de todas as tarefas que vocês já realizaram, o que você pensa que seja probabilidade?

Tarefa 16

Lobo mau propôs o seguinte jogo para Chapeuzinho Vermelho:

- Cada um lança alternadamente, 10 vezes uma moeda para cima.
- Se as duas moedas apresentam cara, a Chapeuzinho ganha 1 ponto.
- Caso isso não ocorra, o lobo mau é quem ganha 1 ponto.

Quem obtiver o maior número de pontos ficará com os doces da vovó.

- a) Você considera o jogo justo? Justifique.
- b) Quem tem mais chances de ficar com os doces? Por quê?
- c) Então, o que é melhor? Ser a Chapeuzinho ou o lobo mau?

Ao se depararem com as tarefas de múltipla escolha, os alunos ficaram felizes e disseram que esse tipo de tarefa é mais fácil de resolver. Não pensamos que seja, mas parece que eles se sentem mais seguros, ao verificar que sua hipótese se confirma, por meio das alternativas.

As tarefas não demandaram muito tempo, e durante as discussões poucos grupos solicitavam a intervenção da professora, o que possibilitou que esta observasse alguns diálogos nos grupos:

Episódio 8³⁷

Rodrigo: - *Eu acho que é azul.*

João: - *Ou amarelo? Ah, vai saber!*

Rodrigo: - *É azul, porque em 100%, tem 66% de chance.*

Pietro: - *É, eu também acho, vamos nessa!*

Episódio 9³⁸

João: - *Está vermelha aqui, você escreveu errado!*

Profª: - *Não, é dessa forma mesmo!*

³⁷ Fragmento da socialização da tarefa 13, 7º E.

³⁸ Fragmento da socialização da tarefa 14, 7º E.

Rodrigo: - *Então é o item c, impossível. Não acho que não. Não é impossível.*
 Prof^a: - *Será que nada é impossível? Você conseguiria atravessar o oceano Atlântico a nado em uma hora?*
 Rodrigo: - *Não, é impossível!*
 Prof^a: - *Então, será que nada é impossível?*
 Rodrigo: - *Eu Acho que tem coisas impossíveis.*
 Pietro: - *Item c, impossível, não tem vermelha.*

Episódio 10³⁹

Murilo: - *Você está tirando sarro, Professora?*
 Marco: - *É pegadinha?*
 Nelson: - *Você está de brincadeira com essa tarefa?*

Fizemos uma síntese das respostas dadas pelos grupos, nos registros escritos, em cada uma dessas tarefas, para observar como evoluíam as justificativas no seu decorrer:

Quadro 6 – Síntese das respostas das tarefas 12, 13 e 14.

	tarefa 12				Tarefa 13				tarefa 14			
Alternativas	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
7º B	-	-	6	1	4	-	3	-	-	4	3	-
7º E	-	-	7	-	6	-	1	-	-	-	7	-
Total	-	-	13	1	10	-	4	-	-	4	10	-

Ao analisarmos os itens que os grupos assinalaram nas tarefas, apresentados na tabela acima, sentimos a necessidade de olhar ao mesmo tempo para as justificativas por eles usadas. Entendemos que fazê-las individualmente pode conduzir-nos a diferentes interpretações. Bentz e Borovcnik y Bentz (apud SÁENZ, 1999) apontam para esta questão de distorções e investigações errôneas, ao afirmar que é difícil imaginar uma metodologia em que não sejam solicitadas algumas tarefas aos estudantes, quando o objetivo é descobrir suas concepções probabilísticas; e

³⁹ Fragmento da socialização da tarefa 14, 7º E.

complementam que variações metodológicas podem ser feitas para que tais tarefas possam representar o pensamento dos alunos.

Cada tarefa favorece determinado conceito probabilístico. Por exemplo, a **tarefa 12** apresenta uma situação em que as possibilidades de cada evento têm as mesmas chances de serem sorteadas; portanto, ela conduz a uma interpretação clássica. A tarefa 13 tem por objetivo uma interpretação formal, pois apresenta possibilidades diferentes para cada evento, o que torna o espaço amostral assimétrico. De modo semelhante, a **tarefa 14** contempla a concepção formal e as possibilidades, porém o evento desejado não faz parte do espaço amostral; isso deixa sua interpretação mais complexa.

Ao analisar as respostas e as justificativas dos alunos para as tarefas, identificamos que, na **tarefa 12**, os alunos utilizaram a concepção clássica, pois a resposta admite simetria de espaço amostral, compreendendo que, em situações de aleatoriedade, como esta, o fator sorte é que define o resultado final. O grupo que assinalou o item **d** justificou que só atuando poderia saber. Ao retomar a pergunta da tarefa: “qual você pensa ser mais *provável* de sair?” e a afirmação do grupo “*só atuando irá saber*”, consideramos que fizeram uso da hipótese subjetivista e, como já foi mencionado, ao fazer uso de tal concepção, os indivíduos fazem uso de critérios coerentes; neste caso, usam outras duas concepções. Uma delas, a clássica, pois reconhecem implicitamente que as possibilidades são as mesmas, ao admitirem que a “ação” de retirada das fichas irá definir qual é a mais provável; e outra, a frequentista, ao afirmarem que será o experimento – ação de retirada – que definirá qual ficha terá mais chance.

A maioria dos alunos, na **tarefa 13**, ao assinalar a opção **a**, interpretou a questão de maneira formal, ao identificar que as possibilidades de um evento são maiores que as do outro, o que pode conduzir a uma interpretação implícita de que pensaram que as azuis são 2 dentre 3 ($2/3$) e a amarela 1 dentre 3 ($1/3$); ou de que simplesmente se basearam no número de fichas, sem levar em conta o espaço amostral.

Na **tarefa 13**, presumimos que os grupos que assinalaram a opção **c**, “*ambas têm a mesmas chances*”, fizeram uso da concepção clássica, pois admitiram explicitamente que as possibilidades são as mesmas e também implicitamente, ao justificarem sua opção com o fator sorte. Quando o sujeito apresenta a sorte como justificativa para as questões aleatórias, está admitindo que as possibilidades sejam as mesmas para cada evento, isto é, que elas sejam

equiprováveis, características definidas por Laplace (apud GODINO, 1996) com a concepção clássica.

Os demais grupos — a maioria — assinalaram a alternativa considerada correta, item **a**, “*a azul*”, e justificaram, dizendo que o número de fichas azuis é maior e que há mais possibilidades de saírem fichas azuis. Podemos interpretar essa resposta e sua justificativa como fruto da concepção clássica ou formal; no entanto, não podemos admitir que os alunos a tivessem utilizado ao responderem à questão. Quando eles afirmam que as chances das fichas azuis são maiores que as da amarela, eles têm a ideia de que o espaço amostral não seja simétrico, que a chance de um evento seja maior que a do outro, porém isso não significa que tenham pensado ou determinado o valor da probabilidade de cada ficha.

Quanto à **tarefa 14**, a mesma quantidade de grupos optou pela resposta considerada correta: **c**, “*impossível*”, alegando não haver fichas vermelhas no saco. Podemos interpretar que em sua resposta fizeram uso da concepção formal, pois da forma como justificaram, admitiram que a ficha vermelha não faz parte do espaço amostral e que, portanto, não tem possibilidade de ser sorteada. Tendo em vista suas respostas, suas justificativas e os significados que atribuíram à palavra *impossível*, no decorrer das tarefas, podemos considerar que determinem o valor da probabilidade desse evento como definida por Kolmogorov: a probabilidade de um sucesso impossível é dado por $P(E)=0$.

Na reflexão proposta “o que pensa que seja probabilidade”, **tarefa 15**, todos os grupos relacionaram probabilidade a chances. Algumas ideias, as quais transcrevemos a seguir, a princípio nos pareceram equivocadas:

- Chances iguais, todas tem as mesmas chances.
- Algo que tem mais chances que possível.
- Tem pouca chance de acontecer.

Sobre o significado da noção de probabilidade, Shaughnessy (1992) retoma as notas de Haching sobre a tradição dualista — “grau de crença” e “cálculo de frequências estáveis para eventos aleatórios” — que surgiu nos meados dos séculos XVII e XVIII e ainda permanece conosco; porém, ressalta que na literatura há os diferentes tipos de probabilidade: clássica, frequentista, subjetivista e formal e discute os méritos de cada uma. Shaughnessy não defende a

existência de um ponto de vista único, já que as situações podem ser modeladas por diferentes perspectivas.

Muitas dúvidas surgiram com a **tarefa 16**. Vários grupos chamaram a professora para fazerem perguntas do tipo: *Podem sair duas caras em uma moeda? O que é alternadamente? E quando cair cara e coroa?* – neste caso entenderam que cara/cara seria ponto para a Chapeuzinho e coroa/coroa, para o lobo mau. Nesses casos, a professora relia a tarefa com os grupos e lançava perguntas: *O que vocês não entenderam? Vamos procurar no dicionário o que é alternadamente? Se a moeda é lançada ora pelo lobo, ora pela Chapeuzinho, é necessário ter duas moedas? O que o jogo diz sobre isso?*

À medida que a professora ia questionando, alguns integrantes compreendiam a proposta e explicavam para os colegas que ainda não haviam entendido. As considerações dos alunos sobre o “jogo do lobo mau e Chapeuzinho” nos registros escritos foram organizados no seguinte quadro:

Quadro 7 – Síntese - “O jogo do lobo mau e Chapeuzinho”

	“GRUPOS DO NÃO” ⁴⁰	“GRUPOS DO SIM” ⁴¹
Você considera o jogo justo?	Sete grupos responderam que não era justo.	Seis grupos responderam que o jogo era justo.
Quem tem mais chances de ficar com os doces?	O lobo.	Ambos, os dois, ninguém, qualquer um.
Por quê?	O lobo quer trapacear. O lobo tem mais chances de vencer. O lobo tem que fazer só uma coroa e Chapeuzinho tem que fazer duas caras. Se sair cara e coroa, o lobo é quem ganha. 2 vezes caras a Chapeuzinho ganha, 1 vez coroa e 2 vezes coroa o lobo ganha. O lobo tem duas chances de ganhar e a Chapeuzinho só uma. O lobo tem duas possibilidades e Chapeuzinho apenas uma, mas isso não quer dizer que o lobo ganhará.	Têm chances iguais (as mesmas). Se um perder, o ponto passa para o outro. Jogam a moeda alternadamente. Chapeuzinho pode ganhar ou perder e o lobo também.

⁴⁰ Grupos que no registro escrito não consideraram o jogo justo.

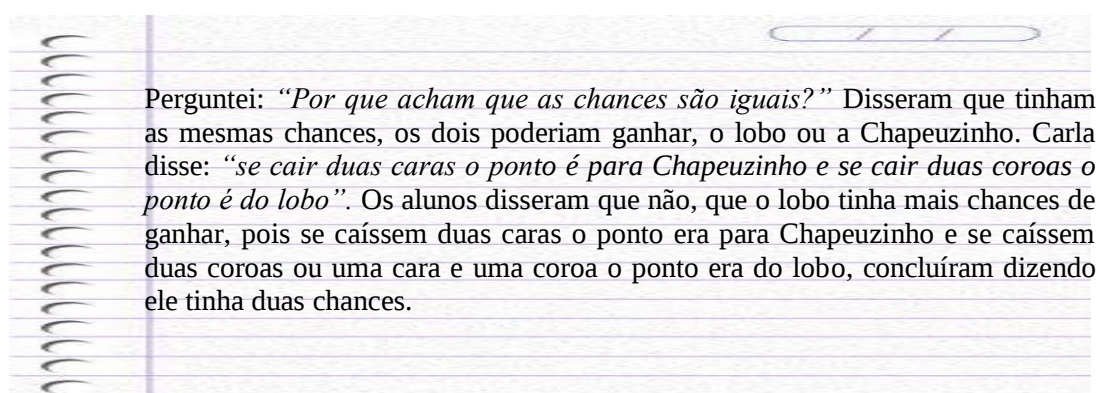
⁴¹ Grupos que no registro escrito consideraram o jogo justo

		continuação
	“GRUPOS DO NÃO”	“GRUPOS DO SIM”
Então, o que é melhor? Ser a Chapeuzinho ou o lobo mau?	<i>O lobo</i> (todos os grupos).	<i>Chapeuzinho</i> (2 grupos). <i>Qualquer um, tanto faz</i> (3 grupos) e <i>Nenhum</i> (1 grupo).

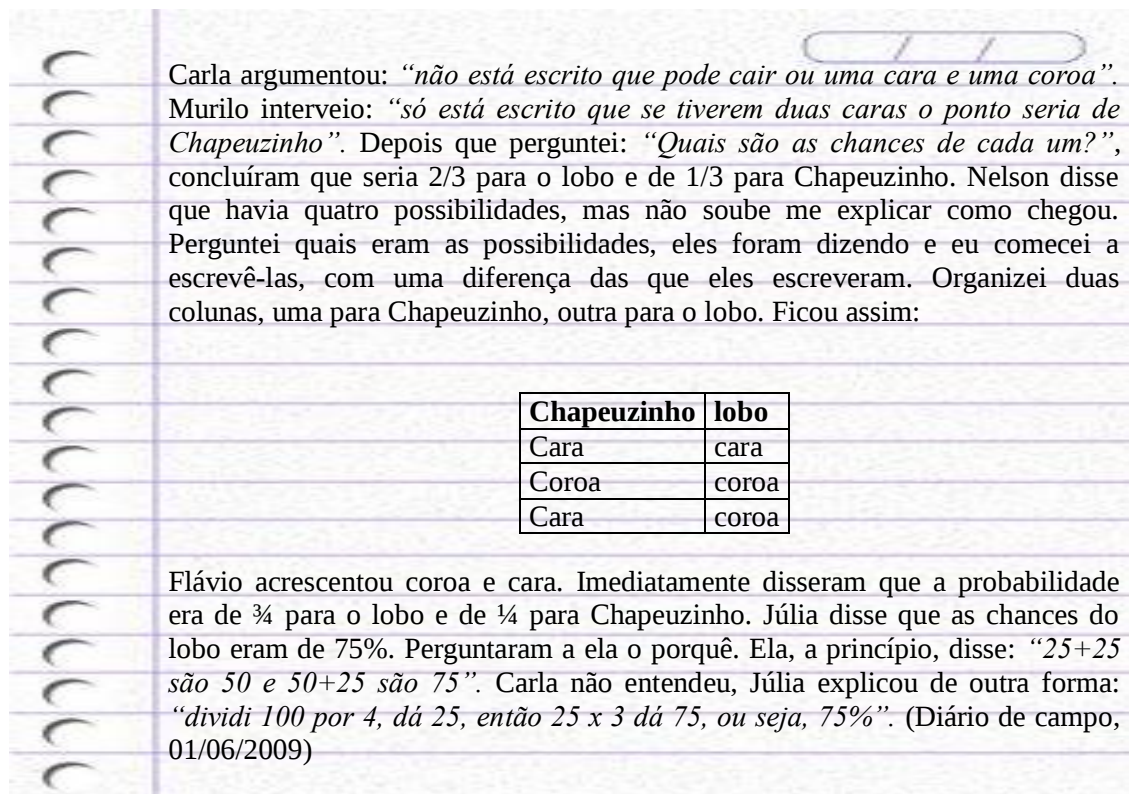
Consideramos essa tarefa relevante, pois, ao avaliar o jogo como justo ou não, os alunos também são levados a avaliar suas conjecturas, o que, em conjunção com o registro escrito, “integra as experiências individuais e coletivas na busca da construção e apropriação dos conhecimentos abstratos estudados” (SANTOS, 2005, p. 129).

Ao observar os registros escritos dos alunos, nesta tarefa, com as considerações feitas na **tarefa 13**, é visível, tanto no grupo do “sim” como do “não”, que a análise de possibilidades compostas é um obstáculo para obtenção de um resultado preciso. Porém, há diferença quanto aos conceitos probabilísticos envolvidos. O grupo do “sim” baseou-se na concepção clássica equivocada, ao admitir que o jogo é justo, ou seja, infere que as possibilidades são as mesmas. Dessa forma, consideram simetria no espaço amostral. Porém o que estão entendendo como espaço amostral é incerto, podendo ser: $S=\{\text{cara, coroa}\}$ ou $S=\{\text{Chapeuzinho, lobo}\}$. Outros fatores que consideram como critério de justiça também mereciam atenção, mas vamos deixar essa discussão para outro momento.

Ao socializar a tarefa, a professora-pesquisadora sentiu que a análise das possibilidades deveria ser o foco das discussões, já que isso influenciaria na avaliação do jogo. No entanto, outras ideias surgiram, como mostram os trechos do diário de campo da professora-pesquisadora:



Perguntei: “*Por que acham que as chances são iguais?*” Disseram que tinham as mesmas chances, os dois poderiam ganhar, o lobo ou a Chapeuzinho. Carla disse: “*se cair duas caras o ponto é para Chapeuzinho e se cair duas coroas o ponto é do lobo*”. Os alunos disseram que não, que o lobo tinha mais chances de ganhar, pois se caíssem duas caras o ponto era para Chapeuzinho e se caíssem duas coroas ou uma cara e uma coroa o ponto era do lobo, concluíram dizendo ele tinha duas chances.



Ao descreverem as possibilidades, os alunos organizaram: cara/cara, coroa/coroa e cara/coroa; dessa forma, entendem cara/coroa e coroa/cara como a mesma possibilidade. No entanto, quando a professora fez a tabela, perceberam que, ao inverter os dados, teriam outra possibilidade, pois estes não estão relacionados somente aos resultados dos sorteios, mas também às pessoas que obtêm esses resultados. Quanto ao ensino e a aprendizagem de análise combinatória, Lopes e Coutinho (2009, p. 63) enfatizam a necessidade de superar a aplicação de fórmulas e sugerem:

Destacamos, então, a necessária abordagem dos processos sobre a resolução de problemas que envolvam o raciocínio combinatório, assim como a exploração de diversos tipos de registros pelos quais os alunos possam explicitar suas estratégias de resolução: esquemas, árvore de possibilidades, enumeração (necessária para a introdução a esse tipo de raciocínio), entre outros.

4.2.5 Jogos: aleatoriedade e esperança

Godino, Batanero e Cañizares (1996) sugerem uma aproximação histórica entre os jogos de azar e o cálculo de probabilidade. Em uma revisão histórica, o autor encontra suposições de que a probabilidade tenha se aprimorado, por meio de cálculo, quando o homem passou a praticar

esses jogos. Eles têm sido alvo de pesquisas e aplicações na prática escolar, na perspectiva de resolução de problemas:

O jogo pedagógico na sala de aula de Matemática foi considerado como gerador de situações-problema ao aluno. Uma situação torna-se problemática ou não para o aluno, na medida em que, por oferecer um problema a ser resolvido, proporciona a ele a possibilidade de questionamentos, inferências, conjecturas e diferentes situações de jogo. (GRANDO, 2007, p. 96)

Diante do exposto, justificamos a inserção do jogo “A travessia do rio”⁴² em nossa sequência de tarefas. Seu contexto envolve análise de possibilidades, medida de chance e sorte, mesmo porque, em situações de jogo, este último fator é considerado pelos jogadores. O jogo foi realizado em quatro etapas, nas quais a disposição das fichas eram alteradas; em seguida, foi proposta uma reflexão sobre algumas situações vivenciadas no jogo e, ao final, concluímos essa primeira experiência com a troca de cartaz entre professora e alunos, tendo como foco as considerações dos alunos na reflexão proposta.

4.2.5.1 Tarefas: 17 e 18⁴³

Tarefa 17: Jogo “A travessia do rio”

Regras do jogo:

- Cada jogador coloca as suas peças numa das margens do rio, podendo pôr mais do que uma na mesma casa, deixando outras vazias.
- Alternadamente, os jogadores lançam dados e calculam a soma obtida.
- Se a soma corresponder a uma casa onde estejam peças suas, na respectiva margem, passa uma delas para o outro lado do rio.
- Ganha quem conseguir passar primeiro todas as peças para o outro lado.

⁴² Retirado e disponível no site: <<http://www.apm.pt/portal/index.php?id=32582>>. Último acesso em 24/09/2009. O jogo foi adaptado para o contexto.

⁴³ Problematização elaborada em conjunto com o Grucomat (Grupo Colaborativo de Matemática) - Grupo de Pesquisas em Educação Matemática da Universidade São Francisco - *campus* de Itatiba/SP

1ª Etapa:

Jogue “A travessia do rio” a partir do tabuleiro representado abaixo. Os jogadores entram num acordo a fim de escolher a cor de suas fichas. Caso não haja acordo, sorteiam no dado quem fará a escolha primeira (Quem tirar o maior número no dado).

MARGEM

VERMELHO	•	•	• •				• •	• •		•	•	• •
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AZUL			•	• •	•	• •	• • •	•	•		•	

MARGEM

2ª Etapa:

Jogue “A travessia do rio” a partir do tabuleiro representado abaixo. Observe que você deve acrescentar três fichas suas em qualquer posição do seu lado do tabuleiro. Os jogadores entram num acordo a fim de escolher a cor de suas fichas. Caso não haja acordo, sorteiam no dado quem fará a escolha primeira.

MARGEM

VERMELHO		•	• •	•		•	•			•	•	•
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AZUL			•	•		• •	• •	•	•		•	

MARGEM

3ª Etapa:

Jogue “A travessia do rio” a partir do tabuleiro representado abaixo. Observe que você deve acrescentar seis fichas suas em qualquer posição do seu lado do tabuleiro. Os jogadores entram num acordo a fim de escolher a cor de suas fichas. Caso não haja acordo, sorteiam no dado quem fará a escolha primeira.

MARGEM												
VERMELHO				•	•	•	•		•			
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AZUL			• •	•		•			•		•	
MARGEM												

4ª Etapa:
 Jogue “A travessia do rio”. Observe que agora você escolhe as casas em que colocará as doze fichas. Represente no tabuleiro abaixo a posição inicial das doze fichas. A cada lançamento, marque o resultado da soma dos pontos dos dois dados na tabela a seguir.

MARGEM												
VERMELHO												
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AZUL												
MARGEM												

Tarefa 18: Problemática 1

MARGEM												
VERMELHO	•	•	•				•	•		•	•	•
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AZUL			•	•	•	•	•	•	•		•	
MARGEM												

1) Vocês acham esse jogo justo? Por quê?

2) Quem tem mais chance de ganhar? Justifique.

Tarefa 18: Problemática 2

MARGEM

VERMELHO					•	•	•	•	••			
						•	•	•				
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AZUL			•	•	•	•	•	•	•	•	•	

MARGEM

- 1) Vocês acham esse jogo justo? Por quê?
- 2) Qual tem mais chance de ganhar? Justifique.

Depois de terem realizado a maioria das tarefas da sequência, veio a proposta do jogo. Os alunos ficaram eufóricos, disseram gostar de trabalhar com jogos. A professora-pesquisadora começou lendo as regras e apresentando os materiais: tabuleiro, fichas e dados (branco e vermelho). Além disso, acrescentou que o jogo tinha quatro etapas. A primeira, na qual todas as fichas já estavam dispostas no tabuleiro; a segunda, com nove fichas dispostas e três livres, para o grupo decidir em que número colocar; a terceira, com seis fichas dispostas e seis de livre escolha; e a última etapa, em que todas as fichas eram de livre escolha. Os integrantes dos grupos formaram duplas para jogarem entre si.

Assim que terminou a introdução, a professora sugeriu que escolhessem qual seria a cor de cada equipe, o material foi distribuído e a primeira etapa, iniciada. Nessa fase, todas as fichas foram dispostas de forma injusta: a equipe azul tinha suas fichas colocadas nos números com maior probabilidade de sair, ao somar dois dados; e a equipe vermelha possuía fichas nos números que ou tinham menores probabilidades de sair ou tornavam isso impossível, como o número 1, cuja soma entre dois dados não é possível. O objetivo era provocar a curiosidade do aluno quanto à (des) vantagem em relação à outra equipe. Na segunda etapa, também prevalecia o critério de as fichas de uma equipe estarem dispostas nos números que tinham mais probabilidade de sair, ao passo que, na outra equipe, a situação era contrária. O que mudava é que as equipes tinham a liberdade de escolher o número para colocarem três fichas, e não havia fichas dispostas

no número 1. A terceira etapa era semelhante à segunda, mas nessa fase eles escolhiam a posição de seis fichas. Na última etapa, os alunos escolhiam o número em que colocariam as doze fichas, porém precisavam anotar os números sorteados e as somas obtidas.

De imediato, nenhuma equipe descobriu que não era possível obter o número 1 somando dois dados; no entanto, à medida que foram jogando, foram descobrindo. Alguns ficavam furiosos. Assim que percebiam, chamavam a professora-pesquisadora para falar sobre a descoberta, e ela perguntava: “*quem ganhou o jogo?*”. Muitos diziam que não era justo; não se referiam ao jogo todo, mas à ficha que estava no número um. Quatro grupos jogaram até o final, sem perceber que o resultado do jogo já estava definido. A professora pediu para que registrassem a cor da equipe vencedora. Em um dos grupos, dois integrantes perceberam o fato e explicavam aos outros dois, mas eles não entendiam, alegavam que era sorte. Para provar aos colegas que tinham razão, os alunos dessa dupla continuaram jogando até estarem próximos do final, quando os colegas entenderam que não seria possível sair o um.

Ao receberem as cartelas da segunda etapa, os alunos logo verificavam se não havia fichas no número 1, antes de iniciar a jogada. Isso se repetiu na terceira etapa. Apesar de dizerem, durante o jogo, que algumas somas saíam mais, alegavam que a sorte determinava os resultados. E comentavam que o número que estavam esperando saía para o adversário.

Ao receber a última cartela, ficaram felizes, pois escolheriam a posição de todas as fichas. O jogo transcorreu em duas aulas, mas não no mesmo dia.

Na socialização, a professora colocou na lousa, a seguinte tabela⁴⁴, com o resultado das equipes vencedoras em cada etapa, do qual surgiu o diálogo e as considerações acerca da tarefa:

Tabela 3 - Tarefa 17 - Equipes vencedoras

<i>Equipes/ Etapas</i>	<i>1ª</i>	<i>2ª</i>	<i>3ª</i>	<i>4ª</i>
Vermelha	0	4	3	3
Azul	7	3	4	4

⁴⁴ Socialização realizada no 7º E.

Episódio 11⁴⁵

Prof^a: - Na 1ª etapa, somente a equipe azul ganhou. Por que será?

Flávio: - Foi injusto, não valeu!

Prof^a: - Por quê?

Vinícius: - Não tinha como sair 1 com dois dados! Só com um dado.

Breno: - Quebrei a cabeça.

Prof^a: - Por quê?

Breno: - Fiquei jogando e não saía.

Prof^a: - E a 2ª etapa?

Flávio: - Estava legal, não tinha ficha no 1.

Prof^a: - O jogo iniciou com a cartela cheia, depois foi aumentando a possibilidade de escolha das fichas, certo? Eu percebi que na última etapa vocês ficaram felizes ao receberem a cartela vazia, pois poderiam completá-la colocando suas fichas nos números que desejassem. Por quê?

Flávio: - A gente poderia colocar nos números que saía mais, de seis para cima.

Carla: - Colocar em números maiores.

Prof^a: - Espera aí! O Flávio disse que poderia colocar nos números que saía mais, de seis para cima e a Carla nos números maiores. Por quê?

Carla: - Porque saíam mais.

Flávio: - Não, o 12 não saía.

Henrique: - No nosso saía toda hora.

Prof^a: - Eu pedi para vocês anotarem a quantidade de vezes que caiu cada soma. Vamos ver. Até que número eu devo colocar na tabela?

Flávio: - Até o doze.

Os grupos foram falando a quantidade de vezes que saiu cada soma, os alunos foram somando esses valores e a professora-pesquisadora anotou os resultados na tabela feita na lousa, o que provocou discussão:

Tabela 4 – Tarefa 17 – Somas registradas

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade	18	23	34	40	58	70	57	44	39	28	18

⁴⁵ Fragmento da socialização da tarefa 17, 7º E.

Episódio 12⁴⁶

Nelson: - Olha só, começou menor, foi aumentando e depois voltou a diminuir. Veja as pontas. Começou do menor e foi até o 70, depois começou a diminuir.

Prof^a: - Será que tem uma explicação?

Nelson: - É jogo, é sorte.

Prof^a: - Vocês me falaram que os números maiores tinham mais chance de sair?

Breno: - Nada “a ver”, do número 10 para baixo sai mais.

Prof^a: - Qual foi o número que mais saiu?

Classe: - O sete.

Prof^a: - Mas vocês falaram que os maiores tinham mais chance?

Rodrigo: - Cai nos números mais altos.

Prof^a: - Por quê?

Flávio: - Porque para sair o 2 tem que ser 1 e 1.

Maicon: - Tem dois dados para somar.

Prof^a: - Mas também tem números pequenos no dado.

Nelson: - Só se fosse com um só.

Prof^a: - Mas tinha números pequenos nos dois dados.

Carla: - Mas era difícil de sair.

Nelson: - Como que ia dar o 1?

Carla: - Não tem como sair o 1!

Prof^a: - E o 2?

Classe: - O 1 e o 1.

Henrique: - Só que é muito raro!

Prof^a: - E o 3?

Flávio: - 2 e 1, só.

Prof^a: - E o 1 e o 2?

Alunos: - É a mesma coisa!

Flávio: - Poderia ser dois dados.

Nelson: - Poderia no branco cair 1 e no vermelho cair 2 e depois no branco cair 2 e no vermelho cair 1.

Prof^a: - E o 4?

Classe: - 2+2, 3+1, 1+3.

Depois disso, os alunos foram falando as possibilidades e a professora foi anotando na lousa, da seguinte forma:

SOMAS	POSSIBILIDADES	TOTAL DE POSSIBILIDADES
1	-	0

⁴⁶ Fragmento da socialização da tarefa 17, 7º E.

2	1+1	1
3	2+1, 1+2	2

continuação

SOMAS	POSSIBILIDADES	TOTAL DE POSSIBILIDADES
4	2+2, 3+1, 1+3	3
5	3+2, 2+3, 4+1, 1+4	4
6	3+3, 4+2, 2+4, 5+1, 1+5	5
7	3+4, 4+3, 5+2, 2+5, 6+1, 1+6	6
8	4+4, 5+3, 6+2, 3+5, 2+6	5
9	5+4, 4+5, 6+3, 3+6	4
10	5+5, 4+6, 6+4	3
11	5+6, 6+5	2
12	6+6	1

Quando a socialização estava por encerrar, surgiu uma nova observação:

Episódio 13⁴⁷

Nelson: - Olha só, diminui. Do número 2 ao 7 aumenta e depois vai diminuindo, igual ao outro.

Prof^a: - Por que será que isso acontece?

Breno: - É mesmo!

Prof^a: - Mas porque será que isso aconteceu, tanto nos números que saíram nas jogadas de vocês, como nas possibilidades?

Aline: - Porque são dois dados.

Prof^a: - Vamos analisar o 7, nas nossas jogadas foi o que mais caiu!

Carla: - Ele é porque ele está no meio dos números de lá e daqui.

Maicon: - É que tem mais combinações para dar 7.

Prof^a: - Quando um número tem mais combinações, ele tem mais chance?

Classe: - Sim.

Prof^a: - Eu poderia usar outra palavra para expressar isso?

Nelson: - Que ele tem mais possibilidades.

Prof^a: - E tem como eu saber qual a probabilidade de sair o número 7?

⁴⁷ Fragmento da socialização da tarefa 17, 7º E.

Marco: - *Tem. Doze é o inteiro, então ele tem metade [pensou nas 6 possibilidades de cair o 7 e pensou no inteiro como as possíveis somas].*

Prof^a: - *Porque 12 é o inteiro?*

Nelson: - *Porque seis é a metade então vai para o número maior.*

Prof^a: - *Não entendi?*

Nelson: - *Tem doze, dividi ao meio, vai 6 para cada lado, não pode ser 14, né!*

Prof^a: - *Marco, quando você diz inteiro a que você se refere?*

Marco: - *Ao número máximo de possibilidades.*

Prof^a: - *Qual o número máximo de possibilidades que temos?*

Breno: - *Doze.*

Prof^a: - *Doze são os possíveis resultados não o total de possibilidades.*

Vinícius: - *Só somando.*

Prof^a: - *Vamos somar para ver.*

Somaram juntos, depois a professora acrescentou uma linha no final da tabela e colocou o total de possibilidades.

Prof^a: - *Qual a probabilidade de sair o número 2?*

Breno: - *1/36.*

Prof^a: - *E o 3?*

Classe: - *2/36.*

A professora acrescentou outra coluna como a probabilidade e os alunos foram falando.

Prof^a: - *Vamos simplificar essas probabilidades. Quem se lembra como faz?*

Maicon: - *Divide o numerador e o denominador pelo mesmo número.*

Os alunos foram falando as respectivas probabilidades e como simplificá-las, por qual número deveria dividir o numerador e o denominador. Houve um aluno que sugeriu dividir por 1, porém uma colega disse que dava no mesmo.

Prof^a: - *Pessoal! Qual é o número que tem maior probabilidade de sair?*

Classe: - *É o 7.*

Prof^a: - *Será que existe uma relação com os números que obtivemos no nosso jogo?*

Breno: - *É a sorte.*

Júlia: - *Não é, senão daria diferente em algum número.*

Carla: - *São as combinações.*

Prof^a: - *Porque será que ele não sai em todas as jogadas?*

Maicon: - *O sete tem mais probabilidade de sair, mas isso não quer dizer que vai sair toda hora!*

Bruno: - *Boa!!!*

A classe aplaudiu e encerramos a aula.

A discussão realizada sobre o jogo constituiu um momento importante na partilha de conhecimentos. Os alunos colocaram em confronto suas estratégias, conjecturas e justificações. O papel desempenhado pela professora nesse momento foi fundamental para que os alunos fossem

mobilizados para a investigação; para que cada um refletisse sobre o trabalho realizado, não só por ele, mas por outros alunos; e, conseqüentemente, desenvolvesse o seu poder de argumentação, assim como sua capacidade de comunicar-se matematicamente. Esse evento, o diálogo estabelecido entre alunos e professora-pesquisadora, conduziu-nos a uma análise mais detalhada, que será objeto do próximo capítulo.

Quanto às concepções envolvidas, acreditamos que a concepção subjetivista faça parte desse universo do jogo, em que a aleatoriedade e a esperança se entrelaçam. No entanto, as ideias surgidas, na socialização, quanto ao número que tem mais chance de repetir-se, possibilitaram a descoberta da simetria entre os resultados, o que pressupõe que o aluno tenha sido provocado pela regularidade observada, ou seja, por uma frequência. Em virtude disso, foi possível estimar formalmente a probabilidade de cada evento. Isso não significa que os alunos se tenham apropriado desses conceitos, mas que buscaram um critério para suas concepções pessoais. Acreditamos que essa percepção seja muito significativa na construção do pensamento probabilístico, pois partimos da ideia de que uma situação problemática pode ou não oferecer um problema a ser resolvido e os problemas podem não ser os mesmos para todos os alunos; portanto, o modelo de probabilidade que será empregado em cada situação precisa ser definido pelo aluno.

Favorecer uma determinada concepção de tarefas não significa esperar que os alunos a utilizem, mas que reflitam sobre ela ou sobre o contexto em que está inserida. Dessa forma, compreendemos essa busca de um critério como uma tentativa de adequação da hipótese à situação que está sendo vivenciada, o que poderá contribuir para o desenvolvimento do pensamento probabilístico.

Devido ao afastamento da professora-pesquisadora para exercer o cargo de vice-diretora em outro município, estabeleceu-se uma parceria entre ela e a professora substituta, que foi encarregada de aplicar a tarefa 18.

Essa tarefa teve apenas dois momentos, a “**fase do antes**” e “**do depois**”. Os grupos permaneceram com os mesmos integrantes da tarefa 17. A professora-substituta explicou aos alunos que a tarefa fazia parte da pesquisa, mas iria ser aplicada por ela. Segundo ela, não houve problemas na aplicação da tarefa. Ela encaminhou à professora-pesquisadora as respostas dos alunos.

2) Qual tem mais chance de ganhar? Justifique.

O azul por que ele está mais espalhado

Xxxxxxxx, 09 de junho de 2009.

Queridos alunos,

Tudo bem com vocês? Estou com saudades!

Escrevi esta carta, pois fiquei pensando em algumas coisas que registraram na tarefa que realizaram nos últimos dias.

Na problemática 2, não entendi por que o jogo não é justo. O que tem mais chances, fichas espalhadas ou enfileiradas? Por quê?

Aguardo ansiosa a carta de vocês.

Beijos

Prof^a Jaqueline

PS: Estou enviando a tarefa a que me referi, caso queiram revê-la.

Luzida Professora Pequeline.

Tudo a ver? Também estamos com paudades.
 A gente resolveu mudar um pouco as regras.
 Na atividade 1 a gente acha que o jogo não é justo,
 porque as fichas vermelhas estão consequentemente
 seguidas, só tem 5 números com fichas e 7 números
 sem fichas é mais provável que caia os 7 números sem
 fichas, o time vermelho tem $5/12$ de ganhar.
 Na atividade 2, nós achamos que o azul tem mais
 chances de ganhar, porque as fichas do azul foi distribuídas
 de muito bem, mais o vermelho não, tem 5 números
 com fichas e 7 sem fichas, é mais provável que azul
 ganhe.

Beijos.

O distanciamento entre a professora-pesquisadora e os alunos foi relevante para o fechamento desta sequência de tarefas e desta fase da pesquisa.

Ao observar o primeiro registro dos alunos, percebemos que acreditam em suas hipóteses, pois em suas justificativas, utilizam termos que expressam alto grau de confiança. Porém, o significado das palavras espalhadas e enfileiradas só é possível entender, se olharmos para o tabuleiro do jogo. Mesmo tendo entendido o que os alunos queriam dizer, a professora percebeu que outras hipóteses estariam por trás dessas palavras. Esse foi o foco que a professora contemplou em sua carta, além das palavras carinhosas.

É visível que a carta da professora tocou os alunos quanto ao esclarecimento e a suas ideias, que se utilizaram de linguagem probabilística. Sobre esse tipo de trabalho nas aulas de Matemática, Santos (2005) considera que:

Ao converterem para a escrita em prosa a simbologia usual em Matemática, tantas vezes permeada de “hieróglifos” e abreviações, os estudantes aprofundam-se nos procedimentos e significados que permeiam o tema em questão. Com essa mudança de paradigma, dos símbolos para o texto em prosa, esse exercício pressupõe uma grande disposição, nem sempre encontrada. (p. 131)

Ao analisar as ideias que os alunos expressam na carta, percebemos que acreditam ser mais fácil obter resultados diferentes, nas diversas jogadas, ao invés das mesmas somas; isso nos dá indícios de que atribuem o resultado aos números da soma de dois dados, porém pensando em cada fileira como um único sucesso, independentemente do número de fichas que há no mesmo número. Além disso, interpretam como espaço amostral os números escritos no tabuleiro, de 1 a 12.

A produção da carta favoreceu diagnosticar uma complexidade de ideias que não seriam identificadas por meio de algoritmos e desconstruir a hipótese de que, ao apresentar uma concepção probabilística em determinada situação, o aluno interiorizou aquele pensamento.

Reflexões e considerações realizadas a partir das preciosas contribuições da Profa. Beatriz D'Ambrosio, no seminário interno à linha de pesquisa Matemática, Cultura e Práticas Pedagógicas da USF/Itatiba, conduziram-nos à coleta de novos dados. Outras tarefas, envolvendo a temática desenvolvida nas tarefas foram realizadas com quatro alunos, individualmente, fora do contexto de sala de aula, juntamente com entrevistas semiestruturadas, que serão descritas no próximo capítulo. O objetivo é analisar se as hipóteses observadas nessa sequência se confirmam em outras tarefas e em outro contexto.

4.3 Tarefas: segunda etapa

Esta fase é composta por sete tarefas, que envolvem problemáticas relacionadas às tarefas da primeira fase, ou seja, a linguagem ligada à estocástica, a análise de possibilidades, a estimativa de medida de chances e o jogo.

Como já foi mencionado, a dinâmica dessas tarefas não foi a mesma das anteriores, pois foram realizadas com quatro alunos, individualmente, fora da sala de aula. No primeiro momento, a professora-pesquisadora leu com eles as tarefas, tirou as dúvidas que surgiram, e os alunos as realizaram individualmente, sem troca de informações entre colegas. Em outro momento, a professora-pesquisadora fez uma entrevista e o jogo, também individualmente. Na entrevista, as questões eram relacionadas às respostas de suas respectivas tarefas. Nosso objetivo, nesta fase, era analisar se as hipóteses observadas na primeira sequência de tarefas se confirmariam em outras tarefas e contexto.

Na **primeira tarefa**, queríamos observar quais relações os alunos iriam estabelecer entre a linguagem probabilística e os possíveis resultados do jogo de tómbola. Na **segunda tarefa**, tínhamos a pretensão de analisar quais exemplos os alunos apresentariam, visando os possíveis acontecimentos da problemática da retirada de bolas. Na **tarefa 3**, os alunos tinham que analisar e estimar as chances de as bolas de ténis serem retiradas dos recipientes. Nas **tarefas 4 e 5**, os alunos teriam que estimar a probabilidade de alguns eventos, mediante os possíveis resultados da soma de dois dados; dessa forma, precisariam analisar as possibilidades dos resultados antes de prever as probabilidades dos eventos e indicar o número que tinha maior número de sair. A **tarefa 6** era uma questão de múltipla escolha, na qual os alunos deveriam optar pela alternativa que consideravam a mais provável para a problemática proposta e justificar sua escolha.

O “jogo corrida de cavalo”, **tarefa 7**, foi proposto pela professora-pesquisadora no final da entrevista e deixou os alunos descontraídos, pois não o entenderam como tarefa. Nesse jogo, os alunos apostavam suas fichas, três, em cavalos, numerados de 1 a 12; as três fichas poderiam ser apostadas em um único cavalo ou em mais, até três. Os cavalos avançavam quando seu número era obtido na soma de dois dados; assim, o primeiro que alcançasse a linha de chegada seria o vencedor. O apostador recebia o triplo de sua aposta. Nosso objetivo com esse jogo era observar se os alunos apostariam nos números que tinham mais chance de sair ou em outros números; e quais seriam suas justificativas.

4.3.1 Tarefas: 1, 2, 3, 4, 5 e 6⁴⁸

Tarefas:

- 1) Roda-se uma tómbola de jogo com número de 1 a 90. Considerando os resultados possíveis deste jogo, classifique com uma das palavras da lista abaixo, cada um dos acontecimentos seguintes:

Impossível
Pode ser
Possível
Bastante provável
Certo
Se espera que
Seguro
Há alguma possibilidade

⁴⁸ Tarefas 1 e 2 adaptadas de Fernandes e Barros (2005); tarefa 3 adaptada de Godino, Batanero e Cañizares (1996); tarefas 4 e 5 adaptadas de Lopes (1999); tarefa 6 adaptada de Lopes (2003).

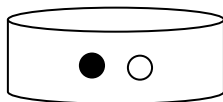
*Há alguma probabilidade
Incerto*

- a) Sair um número ímpar:
- b) Sair um número menor do que 91:
- c) Sair o número 100:
- d) Sair um número maior do que 0:
- e) Sair o número 31:

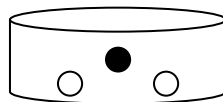
2) Retira-se uma bola, ao acaso, de uma caixa que contém 4 bolas azuis, 7 vermelhas e 3 verdes. Referindo-se aos possíveis resultados desta experiência, apresente um exemplo de acontecimento:

- a) Impossível:
- b) Possível:
- c) Pode ser:
- d) Bastante provável:
- e) Se espera que:
- f) Sem dúvida:
- g) Há alguma possibilidade:
- h) Há alguma probabilidade:
- i) Certo:
- j) Seguro:

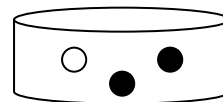
3) Em uma vitrine de uma loja de esportes há alguns recipientes transparentes com bolas de tênis coloridas⁴⁹. Veja o desenho abaixo, representando a vitrine.



Recipiente 1



Recipiente 2



Recipiente 3



Recipiente 4

a) Suponha que você fosse retirar, sem olhar, uma bola do recipiente 3. Qual a cor de bola que provavelmente você iria retirar? Por quê?

⁴⁹ Para maior compreensão da tarefa com a impressão substituímos as bolas de cores verdes por brancas e as bolas de cores vermelhas por pretas.

b) De qual recipiente seria mais provável retirar (sem olhar) uma bola verde? Justifique sua resposta.

c) Seria mais fácil retirar uma bola vermelha do recipiente 2 do que do recipiente 1? Explique o porquê de sua resposta.

4) Qual a probabilidade, ao lançar dois dados e somar os números obtidos, de que o resultado seja:

- Um número par?
- Um número ímpar?
- O número 1?

5) Na tarefa anterior é possível saber qual resultado tem maior probabilidade de sair? Justifique sua resposta.

6) Uma classe tem 19 alunos. Há 11 meninas e 8 meninos. Se você escrever o nome de cada um dos alunos em um papel, colocá-los num saco e retirar um nome ao acaso, o que considera que seja mais provável? Assinale, dentre as alternativas abaixo, a que esteja de acordo com seu pensamento:

- a) que o nome seja de um menino;
- b) que o nome seja de uma menina;

continuação

- c) a probabilidade de o nome ser de um menino é a mesma de o nome ser de uma menina;
- d) não sei responder.

Por quê? _____

A seguir, apresentamos os quadros que organizamos com as respostas dos alunos nas tarefas.

Quadro 8 - Tarefa 1 – Análise de acontecimentos

Acontecimento	Respostas dos alunos
----------------------	-----------------------------

Sair um número ímpar:	Júlio: <i>Pode ser</i> Humberto: <i>Há alguma possibilidade</i> Maicon/Júlia: <i>Possível</i>
Sair um número menor do que 91:	Júlio: <i>Possível</i> Humberto: <i>Possível</i> Maicon/ Júlia: <i>Certo</i>
Sair o número 100:	Todos: <i>Impossível (4).</i>
Sair um número maior do que 0:	Júlio: <i>Pode ser</i> Humberto: <i>Possível</i> Maicon/ Júlia: <i>Certo</i>
Sair o número 31:	Júlio: <i>Certo</i> Humberto/ Júlia: <i>Há alguma probabilidade</i> Maicon: <i>Possível</i>

Quadro 9 - Tarefa 2 – Exemplos de acontecimentos

Impossível:	Júlia: <i>Não há nada que seja impossível, pois tem bolas de todas as cores.</i> Maicon: <i>Não dá para responder, pois a palavra expressa certeza e nesta situação não tem como expressar certeza.</i> Humberto: <i>Uma bola azul desaparecer.</i> Júlio: <i>Sair verde.</i>
Possível:	Todos: <i>Que saia uma bola vermelha.</i>
Pode ser:	Júlio/ Júlia: <i>Que saia uma bola azul.</i> Maicon: <i>Que saia uma bola verde.</i> Humberto: <i>Que a caixa seja retirada do lugar.</i>
Bastante provável:	Humberto: <i>Que a caixa não saia do lugar.</i> Maicon/ Júlia/ Júlio: <i>Que saia uma bola vermelha.</i>
Se espera que:	Maicon/ Júlia/ Júlio: <i>Saia uma bola vermelha.</i> Humberto: <i>As bolas saiam da caixa.</i>

continuação

Sem dúvida:	Maicon: <i>Não dá para responder, pois expressam certeza e dentre essas situações não tem como expressar certeza.</i> Júlio: <i>Sair vermelha.</i> Humberto: <i>Que a caixa saia dali.</i> Júlia: <i>Não tem como dar certeza, é sorte.</i>
Há alguma possibilidade:	Júlio/ Júlia: <i>De sair uma bola azul.</i> Maicon: <i>De sair uma bola verde.</i> Humberto: <i>Que alguém só deixe bolas vermelhas na caixa.</i>
Há alguma probabilidade:	Júlio/ Júlia: <i>De sair uma bola verde.</i> Maicon: <i>De sair uma bola azul.</i> Humberto: <i>O aluno deixou em branco este item.</i>

Certo:	Júlia: Não tem como falar que é certo, porque todas têm chances. Maicon: Não dá para responder, pois a palavra expressa certeza e nesta situação não tem como expressar certeza. Humberto: Que as bolas saiam da caixa. Júlio: Sair vermelha.
Seguro:	Júlia: Não tem como falar que é seguro, porque todas têm chances. Maicon: Não dá para responder, pois a palavra expressa certeza e nesta situação não tem como expressar certeza. Humberto/Júlio: Alguém pegue uma bola vermelha.

Quadro 10 - Tarefa 3 – Estimando as chances da retiradas de bolas de tênis

Problemática	Conclusão dos alunos
a) Suponha que você fosse retirar, sem olhar, uma bola do recipiente 3, qual a cor de bola que provavelmente você iria retirar? Por quê?	Júlio: Vermelha, porque tem mais probabilidade. Humberto: A vermelha, pois tem duas vermelhas e uma verde, mas o verde tem chances. Júlia/Maicon: Vermelha, porque há mais bolas vermelhas.
b) De qual recipiente seria mais provável retirar (sem olhar) uma bola verde? Justifique sua resposta.	Júlio: Nos dois, porque é mais possível. Humberto: Dois, pois tem duas verdes, mas a vermelha também tem chances. Júlia/ Maicon: Recipiente 2, porque é o recipiente que o número de bolas verdes é maior que o número de bolas vermelhas.
c) Seria mais fácil retirar uma bola vermelha do recipiente 2 do que do recipiente 1? Explique o porquê de sua resposta.	Júlio: No recipiente 1, porque tem a mesma probabilidade. Humberto: Um, pois tem uma vermelha e outra verde, então, os dois têm chances. Maicon: Não, porque o recipiente 2 tem mais bolas verdes. Júlia: Não, porque no recipiente 1 tem uma bola de cada, as chances são iguais, mas no recipiente 2 tem duas bolas verdes e uma vermelha, tem mais chance de sair uma bola verde.

Quadro 11 - Tarefa 4 – Probabilidade dos resultados relacionados à soma obtida no lançamento de dois dados

Probabilidade de o resultado ser:	Júlia	Júlio	Maicon	Humberto
Um número par?	Tem a mesma quantidade de chance, porque como é um dado, não tem como saber que número vai dar. É sorte. E se fosse para colocar uma porcentagem, colocaria 50% para par e 50% para ímpar.	É mais provável.	Possível	Possível
Um número ímpar?		É menos provável.	Possível	Possível
O número 1?	Não tem nenhuma chance de	É	Impossível	Há alguma

	<i>sair o número 1 com dois dados, o menor resultado seria 2.</i>	<i>impossível.</i>		<i>probabilidade.</i>
--	---	--------------------	--	-----------------------

Quadro 12 – Tarefa 5 - Resultado que tem maior probabilidade de sair, ao lançar dois dados e somar os números obtidos.

Aluno	Resposta
Júlia	<i>Não, porque tem várias chances, tanto com o ímpar, quanto o par. É difícil saber! É a sorte.</i>
Maicon	<i>Um número par, porque dois dados numerados de 1 a 6, somando os dois, podem dar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12; e dos onze números 5 são ímpares e 6 são pares, mas isso não quer dizer que toda vez irá cair número par.</i>
Humberto	<i>Não, pois todos têm uma chance de sair, até o 1 tem uma chance.</i>
Júlio	<i>É um número par.</i>

Quadro 13 – Tarefa 6 –Acontecimento mais provável

Aluno	Resposta	Justificativa
Júlia	<i>b- Que o nome seja de uma menina.</i>	<i>Porque tem mais meninas.</i>
Maicon	<i>b- Que o nome seja de uma menina.</i>	<i>Porque há mais meninas, mas também pode sair o nome de um menino.</i>
Humberto	<i>a- Que o nome seja de um menino.</i>	<i>Porque tem mais meninos na classe.</i>
Júlio	<i>b- Que o nome seja de uma menina.</i>	<i>Porque tem mais probabilidade.</i>

4.3.2 Entrevista: considerações e reconsiderações.

Os alunos foram entrevistados individualmente, as perguntas foram elaboradas a partir das respostas apresentadas nos quadros anteriores. Ao elaborarmos as questões, priorizamos as respostas que fugiram ao esperado ou aquelas cujas justificativas não estavam claras. Outras questões foram acrescentadas mediante as justificativas dos alunos.

4.3.2.1 Entrevista com Humberto

Tarefa 1

Prof^a: - *Que porcentagem você utilizaria para estimar as chances de cada palavra do quadro?*

Humberto: - Impossível, 100%; Possível, 30%; Pode ser, 45%; Bastante provável, 75%; Se espera que, 50%; Há alguma possibilidade, 60%; Há alguma probabilidade, 55%; Certo, 100%; Seguro, 100%; Incerto, 25%.

Após a professora ter lido com o aluno as respostas que ele havia apresentado em seu registro, ele quis fazer algumas alterações e deu a elas a seguinte forma:

Quadro 14 - Alterações da tarefa 1 - Humberto

Acontecimento	Antes da entrevista	Depois da entrevista
Sair um número menor que 91:	<i>Possível</i>	<i>Certo</i>
Sair um número maior que 0:	<i>Possível</i>	<i>Seguro</i>
Sair o número 31	<i>Há alguma probabilidade</i>	<i>Incerto</i>

A entrevista prosseguiu depois das alterações:

Profª: - *Você acha que há alguma possibilidade de sair um número ímpar?*

Humberto: - *Sim.*

Profª: - *É possível você colocou 30%. Você acha que as chances de sair uma bola menor que 91 neste jogo é de 30%?*

Humberto: - *Eu coloquei porque tem o número 90 nas bolas.*

Profª: - *Quais seriam os números menores que 91?*

Humberto: - *90, 89, 88, 87, 86. Agora, pensando em porcentagem, o possível não seria 30%, seria mais. Talvez eu devesse mudar a palavra para há alguma probabilidade. Eu acho que ficaria mais certo.*

Profª: - *Você colocou que é possível que saia o número zero neste jogo. Isso quer dizer pode sair um número menor que zero?*

Humberto: - *Eu poderia mudar, para pode ser, porque é 45% de chance.*

Profª: - *Se há 45% de chance de sair, há 55% de não sair. Se não sair o número 0, que número vai sair?*

Humberto: - *Nenhum. Está errado na **b** e na **d**. Nas duas eu errei, poderia colocar seguro ou certo, porque não tem menor que zero e nem maior que 91.*

Profª: - *Por que você acha que há alguma probabilidade de sair o número 31?*

Humberto: - *Eu coloquei que é mais ou menos 50%.*

Profª: - *Quantas bolas tem na tómbola?*

Humberto: - *90.*

Profª: - *Quantas bolas com o número 31?*

Humberto: - *Uma*

Profª: - *As chances de eu tirar uma dentre 90 é de 50%?*

Humberto: - *Puts, está errado, só tem uma bola, seria incerto, porque é difícil sair.*

Tarefa 2

Humberto disse que ficou confuso nesta tarefa; na sala de aula não é diferente, apresenta dificuldades de concentração, apresenta melhor desempenho em tarefas dinâmicas.

A professora leu com o aluno o enunciado e iniciou a entrevista:

Prof^a: - *Imagine que tem uma caixa sobre a mesa, dentro dessa caixa tem bolas azuis, vermelhas e verdes, se eu colocar a mão dentro dela o que acha que seria impossível acontecer nesta situação?*

Humberto: - *Tirar uma bola roxa. Nossa! Eu não li direito, agora que eu entendi.*

A professora sugeriu um pingue-pongue: ela dizia a palavra e ele a resposta. Ele pediu para apagar suas respostas e colocar de outra forma. A professora disse que ele poderia fazer isso. A preocupação de deixar a resposta certa no papel, que faz parte da cultura escolar, ainda é muito forte. Surgiram algumas questões durante essa dinâmica:

Prof^a: - Possível.

Humberto: - *Você retirar uma bola azul.*

Prof^a: - Pode ser.

Humberto: - *Que eu tire uma verde. Não vermelha, porque verde seria 45%, não é vermelha.*

Prof^a: - Bastante provável.

Humberto: - *Uma bola vermelha de novo.*

Prof^a: - Se espera que.

Humberto: - *Uma bola azul.*

Prof^a: - *Porque você espera tirar uma bola azul?*

Humberto: - *Não, a mais provável é a vermelha, mas toda hora colocar vermelha, as outras têm chance também. Ah, azul mesmo.*

Prof^a: - Sem dúvida.

Humberto: - *A vermelha, por causa do número, ela tem mais chance.*

Prof^a: - Há alguma possibilidade.

Humberto: - *De sair uma bola azul.*

Prof^a: - Há alguma probabilidade.

Humberto: - *De sair uma bola verde.*

Prof^a: - Certo.

Humberto: - *A bola vermelha.*

Prof^a: - Seguro.

Humberto: - *A mesma, a bola vermelha.*

Tarefa 3

Prof^a: - *As possibilidades de retirar bolas vermelhas e verdes eram iguais em todos os recipientes?*

Humberto: - *Não, alguns têm menos verdes e mais vermelhas, outros mais verdes e menos vermelha.*

Prof^a: - *Você poderia me dizer quais as possibilidades das cores em cada recipiente?*

Humberto: - *No recipiente 1, as chances são iguais. No 2, as bolas verdes têm mais chances, pois elas têm duas bolas. No 3, as vermelhas têm mais chances, porque tem duas. No 4, são iguais, porque tem duas bolas de cada cor.*

Prof^a: - *Você colocou que é mais fácil retirar uma bola do recipiente 1 porque as possibilidades são iguais. Pode me explicar?*

Humberto: - *Porque no 2 a vermelha não tem tanta chance, a verde é mais ou menos 80% e a vermelha 20%.*

Tarefa 4

Prof^a: - *Por que é possível tirar um número par?*

Humberto: - *Você não tem certeza, pode sair par ou ímpar ou outro diferente.*

Prof^a: - *Tem número diferente de par ou ímpar?*

Humberto: - *Não, não tem. Os dois são possíveis de sair. Eu acho que errei porque o número 1 ele se encaixa na resposta dos dois anteriores.*

Prof^a: - *Que números você somou para dar o número 1?*

Humberto: - *Não entendi.*

Prof^a: - *Quais os números que você soma nos dois dados para que o resultado seja 1?*

Humberto: - *Não tem como, a menos que tivesse um dado.*

Tarefa 5

Prof^a: - *Quais são os resultados que você se refere quando diz que “todos têm uma possibilidade de sair”?*

Humberto: - *Não, as chances de par e ímpares são iguais, mas o 1 não tem chance. Pensei em um dado só, se retirar um dará certo.*

Tarefa 6

A professora leu com o aluno a tarefa; ao final da leitura, ele disse:

Humberto: - *Eu acho que não seria uma menina, devido à quantidade. Não prestei atenção também. Pensei em meninos 11 e meninas 8.*

Conversa final

Prof^a: - *Humberto, você disse que errou muito, porque você acha que cometeu tantos erros?*

Humberto: - *Não prestei atenção, preciso melhorar nisso, ficar mais atento às perguntas e também nas minhas provas.*

4.3.2.2 Entrevista com Maicon

A entrevista com Maicon foi rápida, ele é muito atento, suas respostas são claras e objetivas. Nas aulas, não é diferente: ele questiona quando não concorda com algumas situações.

Tarefa 2

Prof^a: - *Você não respondeu todos os itens da tarefa 2 (impossível, certo, seguro e sem dúvida), por que disse que expressavam certeza e nestas situações não tem como expressar certeza. Porém, no item 1 você utilizou a palavra certo duas vezes e uma vez a palavra impossível. Por que na tarefa 1 era possível utilizar essas palavras e na tarefa 2 não?*

Maicon: - *Com certeza sairia uma bola.*

Prof^a: - *Você sabe como seria essa bola?*

Maicon: - *A cor eu não sei*

Prof^a: - *Você não faz uma ideia?*

Maicon: - *Tem mais chance de sair vermelha, mas não poderia afirmar.*

Prof^a: - *Quando você diz que sairia uma dessas bolas, o que poderia sair?*

Maicon: - *Qualquer uma delas.*

Prof^a: - *Eu também acho que sairia uma delas!*

Maicon: - *Ah, agora entendi! É impossível sair uma bola de outra cor que não esteja na caixa.*

Tarefa 5

Prof^a: - *Dentre as somas possíveis, tem alguma que tem uma maior probabilidade?*

Maicon: - *Acho que são iguais.*

Prof^a: - *Pra sair o 2, quais números tem que somar?*

Maicon: - *Tem que ser 1 e 1.*

Prof^a: - *E o 3?*

Maicon: - *2 e 1 e 1 e 2.*

Prof^a: - *E o 4?*

Maicon: - *Ah! Ele tem mais chance 2 e 2, 3 e 1, 1 e 3.*

Prof^a: - *E o 5?*

Maicon: - *4 e 1, 1 e 4, 3 e 2, 2 e 3.*

Prof^a: - *Você acha que tem número que tem mais chance?*

Maicon: - *Tem.*

Prof^a: - *Qual?*

Maicon: - *O seis.*

Prof^a: - *Por quê?*

Maicon: - *A gente tinha feito os números que tinha mais chance na classe, começava com pouco, no meio aumentava e depois ia diminuindo.*

Prof^a: - *Você poderia fazer isso agora?*

Maicon: - *Sim.*

Ele começou a escrever as possibilidades na folha, foi até o número 8, depois disse:

Maicon: - *Vai começar diminuir agora as possibilidades, o número que tem mais é o 7.*

4.3.2.3 Entrevista com Júlio

Júlio é muito ansioso; normalmente, faz as tarefas correndo; não apresenta dificuldades de aprendizagem, porém nem sempre tira boas notas sempre. Durante a entrevista, frequentemente olhava para o relógio e para a porta.

Prof^a: - *Você foi o primeiro a entregar, você sempre é rápido ao fazer tarefa?*
 Júlio: - *Não, é que algumas estavam fáceis.*
 Prof^a: - *Qual era a mais fácil?*
 Júlio: - *A primeira, de dizer se era possível ou impossível os números de 1 a 90.*
 Prof^a: - *E qual foi questão mais difícil?*
 Júlio: - *A das bolas na caixa. Tinha muitas perguntas e a cabeça não conseguia responder todas.*

Tarefa 1

Prof^a: - *Que porcentagem você utilizaria para estimar as chances de cada palavra do quadro?*
 Júlio: - *Impossível, 0%; Pode ser, 50% , porque pode ser ou não; possível, 50%; bastante provável , 75%; Certo, 75%.*
 Prof^a: - *O que é certo?*
 Júlio: - *A mesma coisa que possível.*
 Prof^a: - *Você já ouviu esta palavra em alguma situação?*
 Júlio: - *Em pergunta.*
 Prof^a: - *E quando essa palavra faz parte de pergunta ou de resposta, qual o significado dela?*
 Júlio: - *O mesmo que possível.*
 Prof^a: - *E o que é possível?*
 Júlio: - *O mesmo que sim.*
 Prof^a: - *Se certo é a mesma coisa que possível, porque você colocou 50% para um e 75% para outro?*
 Júlio: - *Eu estava pensando em outra coisa.*
 Prof^a: - *Que coisa?*
 Júlio: - *Que certo era de pergunta. Posso apagar e mudar a porcentagem?*
 Prof^a: - *Pode. [colocou 50% para certo]*
 Prof^a: - *Se eu disser que é certo que eu vá ao cinema, o que você acha?*
 Júlio: - *Que você vai! Ah, é o mesmo 75%.*
 Continuou falando sobre as probabilidades palavras.
 Júlio: - *Seguro, 100%; há alguma possibilidade, 50%, há ou não há; há alguma probabilidade, 75%, é mais provável; incerto, 25%, porque é quase igual o impossível.*
 Prof^a: - *Você usou o pode ser para sair um número ímpar, isto significa que tem 50% de chance de sair um número ímpar?*
 Júlio: - *É, porque é do 1 aos 90 e o número de ímpares e pares são iguais. Se fosse do 0 aos 90 não.*
 Prof^a: - *Por quê?*
 Júlio: - *Tem o zero, um número par, então teria um a mais.*
 Prof^a: - *Você usou o possível para os números menores que 91, de acordo com a probabilidade que colocou; isso significa que as chances de sair um número menor que 91 é de 50%. Então, a probabilidade de sair um número maior que 91 é de 50% também?*
 Júlio: - *Não são 50%. Eu coloquei isso porque pensei no zero. Eu deveria colocar seguro.*
 Prof^a: - *Vamos pensar nas possibilidades, quais os possíveis resultados deste jogo?*

Júlio: - Os números de 1 a 90. Então é seguro, a questão **b** e **d**, pois, são iguais, seguro. Errei os itens **d** e **e** também, porque eu não tinha pensado. O **c** está correto.

Prof^a: - E como seria o item **d**?

Júlio: - Seguro. O **e** eu errei também, é possível.

Prof^a: - Para você o possível significa 50% de chances, então você tem 50% de chances de tirar uma pedra dentre 90?

Júlio: - Não acho que 5%, não pode ser 50% para cada bolinha, pode?

Prof^a: - Não.

Júlio: - Então não sei, fica difícil. – pensou um pouco - Então é uns 1,11%, não tem final [queria dizer que a divisão é uma dizima].

Prof^a: - Como você chegou nesse número?

Júlio: - Dividindo 90 por 100.

Prof^a: - Que palavra da lista poderia ser usada nesta situação?

Júlio: - Não tem palavra com 1%. Talvez o incerto.

Prof^a: - E a alguma possibilidade?

Júlio: - É 50%! – organizou a frase e falou em voz alta - Há alguma possibilidade de sair o nº 31. Sim!!! Mas eu coloquei os 50%!

Prof^a: - E se você não tivesse colocado os 50% daria certo?

Júlio: - Sim. Pode mudar?

Prof^a: - Pode.

Tarefa 2

A professora leu a tarefa com o aluno; assim que terminaram, ele disse:

Júlio: - Está tudo errado! Pode mudar?

Prof^a: - Como mudaria a primeira?

Júlio: - De nenhum jeito, é a verde mesmo.

Prof^a: - Mas é impossível sair verde?

Júlio: - Mas é a que tem menos chance.

Prof^a: - Mas tem chances! E se eu disser que tirei uma bola preta dessa caixa, o que você me diria?

Júlio: - Que é impossível, ou que você fez mágica.

Prof^a: - Neste caso de análise de probabilidade, de chances, a possibilidade de mágica deve ser considerada?

Júlio: - Só se alguém colocou uma bola, sem a gente ver.

Prof^a: - Vou refazer minha pergunta. Vamos imaginar que aqui está a caixa, nela tem 7 bolas vermelhas, 4 azuis e 3 verdes. Coloco minha mão dentro da caixa; que bola acha que sairá?

Júlio: - Vermelha.

Prof^a: - Por quê?

Júlio: - Porque é bastante provável que saia vermelha, porque tem mais, acho que uns 60%.

Prof^a: - Por que você espera que saia uma bola vermelha?

Júlio: - Porque tem mais possibilidade. Sem dúvida sairá vermelha. Tem mais.

Prof^a: - Não pode sair azul?

Júlio: - Pode, mais as chances são poucas.

Prof^a: - Se eu tenho um pouco de chances, posso dizer que é seguro? Você disse que seguro é 100%.

Júlio: - *É seguro. [Confirmou que seria seguro que sairia uma bola vermelha, pois tem pouca possibilidade de outras cores].*

Prof^a: - *Você tem certeza?*

Júlio: - *Vermelha, por que tem mais.*

Prof^a: - *Eu acho que se eu colocar a mão dentro da caixa, sem dúvida tirarei uma bola verde ou azul ou vermelha. O que você acha?*

Júlio: - *Que está certo, mas a outra, que eu disse também.*

Tarefa 3

Prof^a: - *O que significa “ter mais probabilidade”?*

Júlio: - *Tem mais possibilidades de sair, neste caso tem uma a mais.*

Prof^a: - *Eu não entendi a sua resposta ao item **b** “Em qual recipiente seria mais provável retirar (sem olhar) uma bola verde?”.*

Júlio: - *No dois, porque é mais provável. Tem mais chance.*

Prof^a: - *Por que tem mais chance?*

Júlio: - *Porque tem mais bolas, igual no recipiente 3, mas trocou as cores.*

Prof^a: - *As possibilidades de retirar bolas vermelhas e verdes são iguais em todos os recipientes?*

Júlio: - *Não, só no recipiente 4 e no 1.*

Prof^a: - *Você colocou que é mais fácil retirar uma bola do recipiente 1 porque as possibilidades são iguais.*

Júlio: - *Sim.*

Prof^a: - *Quais são as possibilidades?*

Júlio: - *50% cada uma. No recipiente 4 é quase igual ao 1, 25%, só que dobra.*

Prof^a: - *E no recipiente 2?*

Júlio: - *As bolas verdes têm mais possibilidades que as vermelhas.*

Prof^a: - *Você sabe quanto?*

Júlio: - *Mais ou menos 33% cada bola. As duas verdes vão dar mais ou menos 66%.*

Prof^a: - *No recipiente 2, a possibilidade da vermelha é 33%; e no recipiente 1?*

Júlio: - *De 50%*

Prof^a: - *E você acha que as chances tirar uma bola vermelha no um e no dois são as mesmas?*

Júlio: - *Não. A do recipiente 2 tem menos chance.*

Tarefa 4

Prof^a: - *Por que é mais provável sair um número par, ao somar os números obtidos em dois dados?*

Júlio: - *Porque o 1 não vale, então tem mais par. Tem o 2, o 4, o 6, o 8, o 10 e o 12. O ímpar tem o 3, o 5, o 7, o 9 e o 11. Não, eu errei! Acho que são iguais, porque não tem o zero. [Começou a contar nos dedos o que falou no início: tem o 2, o 4, o 6, o 8, o 10 e o 12. O ímpar tem o 3, o 5, o 7, o 9 e o 11] Está certo, o zero e o 1 não têm possibilidades. Então, tem mais par.*

Tarefa 5

Prof^a: - *É possível saber qual resultado tem maior probabilidade de sair?*

Júlio: - *Tem mais números pares que ímpares, então os pares, como eu expliquei antes.*

4.3.2.4 Entrevista com Júlia

Júlia é uma aluna calma, gosta de pensar antes de falar, é muito curiosa e, quando tem dúvidas, não fica quieta; além de ouvir a professora, gosta de explicar como entendeu a situação.

Tarefa 2

Prof^a: - *Por que você espera que saia uma bola vermelha?*

Júlia: - *Porque tem mais vermelha.*

Prof^a: - *Você respondeu que não tem como dar exemplos de alguns acontecimentos - impossíveis, certo, seguro e sem dúvida. Explique-me melhor.*

Júlia: - *Não dá para pôr impossível: é possível sair uma bola de azul, porque tem bola de todas as cores.*

Prof^a: - *Mas não tem preta.*

Júlia: - *Todas as cores eu queria dizer seria: azul, vermelha e verde.*

Prof^a: - *É impossível tirar uma bola preta?*

Júlia: - *Não! Poderia acontecer, ou melhor, acho que não! Depende! O exercício fala dos possíveis resultados, mas acho que pode ser, pois eu estava pensando que um acontecimento impossível não faz parte do possível.*

Prof^a: - *E o sem dúvida?*

Júlia: - *Não tem como ter certeza, porque tem bola de três cores, pode sair qualquer uma.*

Prof^a: - *E isso não é uma certeza?*

Júlia: - *É.*

Prof^a: - *O que você tem certeza?*

Júlia: - *Que vai sair uma dessas cores.*

Prof^a: - *E para o certo e seguro?*

Júlia: - *Mais ou menos isso, vai sair uma dessas cores.*

Tarefa 4

Prof^a: - *Por que você colocou que a probabilidade de sair um número par e um número ímpar é igual?*

Júlia: - *Porque em um dado tem três números ímpares e três pares, mas não é certo, não tem como saber. Mas tem três de cada, então, coloquei assim.*

Tarefa 5

Prof^a: - *Você disse não tem como saber qual o resultado que tem maior probabilidade de sair porque tem várias chances. Você sabe quais são os possíveis resultados?*

Júlia: - *Poderia ser o 3, o 4, o 7, o 8, o 10, o 2, o 5.*

Prof^a: - *Para dar 3, que números precisaria sair no dado?*

Júlia: - *Pra cair o 3, precisaria sair 2 e 1.*

Prof^a: - *E o 4?*

Júlia: - *Pra cair o 4, 2 e 2, 3 e 1.*

Prof^a: - *Será que não dá para descobrir todos os possíveis resultados?*

Júlia: - *Dá. Acho que dá pra fazer com todos.*

Prof^a: - *Que tal você tentar?*

A aluna, na folha de tarefas, fez a lista das possibilidades da forma como iniciou oralmente.

Prof^a: - *Então, qual número tem mais chance?*

Júlia: - *O oito tem mais, e o 2, o 3 o 11 e o 12 têm menos.*

As entrevistas foram objetivas, não queríamos que fossem cansativas. Notamos que Humberto e Júlio, ao lerem as tarefas com a professora, percebiam erros que cometeram e pediam para alterar suas respostas: a preocupação em deixar as respostas certas é marcante. Sobre essa questão perguntamos: será que os alunos apresentam dificuldades de interpretação dos enunciados de problemas? Ou será insegurança, pois precisam ouvir da professora o problema? Também nos preocupa o processo de ensino e aprendizagem, pois nem tudo o que os alunos responderam por escrito representa seu pensamento. Dessa forma, os professores também podem avaliar os alunos e o processo de ensino de maneira equivocada.

4.3.3 Jogo: corrida de cavalos

No final da entrevista, a professora-pesquisadora propôs aos alunos o jogo “Corrida de cavalos”, com o propósito de avaliar as ideias probabilísticas em situação de jogo.

Jogo “Corrida de cavalos”⁵⁰

Instruções do jogo:

- Você terá três fichas para apostar; se ganhar, recebe o triplo do que apostou.
- Você poderá escolher como fazer sua aposta: em um único cavalo, em dois ou em três cavalos.
- A aposta deve ser colocada sobre o(s) número(s) do(s) cavalo(s) escolhido(s).
- O cavalo avança quando a soma dos números extraídos de dois dados lançados seja igual ao do cavalo. O avanço é marcado com um x no diagrama em frente ao número obtido.
- Vence o cavalo que primeiro se colocar na linha da chegada.

CORRIDA DE CAVALOS

⁵⁰ Tarefa adaptada de Skovsmose (2008).

CHEGADA												
LARGADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Aposta realizada: _____

4.3.3.1 As apostas

As apostas dos alunos e suas respectivas justificativas foram as seguintes:

Humberto dividiu sua aposta em três cavalos, de números 7, 10 e 12, e fez as seguintes considerações:

Prof^a: - Por que escolheu esses números?

Humberto: - O sete, pelos números que estão do lado dele. Acho que ele tem mais chance que o 6 e o 8. Ele (o número 7) poderia sair o 5 com 2 ou 6 com 1 ou 4 com 3. O seis eu achava que não tinha tanta chance e o oito também porque seriam 4 e 4, 6 e 2. O dez é mais fácil: 5+5 e 6+4. O doze, porque eu poderia ter uma chance de acontecer de sair o 6 e 6.

Prof^a: - Quanto você ganhou?

Humberto: - 3 mil.

Prof^a: - Quanto gastou com apostas?

Humberto: - 3 mil.

Prof^a: - Teve lucro?

Humberto: - Não, não perdi nada.

Prof^a: - Por que escolheu dividir sua aposta em três cavalos?

Humberto: - Para ter mais chance de ganhar.

Maicon também dividiu suas fichas em três cavalos, nos números 5, 6 e 7, e justificou da seguinte forma:

Maicon: - Eu aposto mil em cada um.

Prof^a: - Em quais?

Maicon: - No 5, 6 e 7.

Prof^a: - Por que escolheu esses números?

Maicon: - Porque tinham mais possibilidades.

Prof^a: - *Porque dividiu sua aposta em três números?*
 Maicon: - *Não sei, eu achei que os três poderiam ganhar.*
 Prof^a: - *Se você ganhasse, quanto ganharia?*
 Maicon: - *Três mil.*
 Prof^a: - *Quanto gastou com aposta?*
 Maicon: - *Três mil.*
 Prof^a: - *Se um de seus cavalos tivesse ganhado, poderia se dizer que é um rapaz de sorte?*
 Maicon: - *Não, só se tivesse apostado tudo em um só. Seria o triplo, né?*
 Prof^a: - *E da forma que apostou não seria?*
 Maicon: - *Não, ganharia menos.*
 Prof^a: - *Por que você não venceu, já que apostou nos que tinham mais possibilidades de sair?*
 Maicon: - *Ah, não sei, é jogo.*

Júlio, da mesma forma que os colegas descritos anteriormente, apostou em três cavalos, de números 6, 7 e 8. Suas explicações foram as seguintes:

Prof^a: - *Por que escolheu os números: 6, 7, 8?*
 Júlio: - *Porque eu penso que o 7 e 8, eles têm mais possibilidades de soma.*
 Prof^a: - *E o seis?*
 Júlio: - *Não tem muita.*
 Prof^a: - *Por que dividiu sua aposta em três cavalos?*
 Júlio: - *Porque daí eu tinha mais chance.*

Júlia, diferentemente de seus colegas, apostou em dois cavalos, ou seja, duas fichas no número 6 e uma no número 7. Seus comentários foram os seguintes:

Prof^a: - *Por que apostou nestes números?*
 Júlia: - *No seis, porque eu gosto; e no sete, porque tinha mais possibilidades.*
 Prof^a: - *Por que não apostou em um só?*
 Júlia: - *Eu fiquei com medo de escolher um e o outro ganhar; como estava em dúvida com eles, apostei nos dois.*
 Prof^a: - *Por que apostou mais no número que gosta?*
 Júlia: - *Por impulso.*
 Prof^a: - *Quanto você gastou com apostas?*
 Júlia: - *Com ele, mil. [Estava se referindo ao cavalo vencedor]*
 Prof^a: - *Você acha que teve sorte neste jogo?*
 Júlia: - *Sim.*
 Prof^a: - *Você teve lucro?*
 Júlia: - *Não tive lucro, deu para repor o que gastei. Entrei e saí com o mesmo dinheiro.*

4.4. Encaminhamentos para a pesquisa

Como já foi mencionado, os dados apresentados neste capítulo possibilitaram uma pré-análise, em que algumas categorias de análise se delinearam. No entanto, com as contribuições da banca de qualificação, duas solidificaram-se: a linguagem probabilística e o movimento das concepções probabilísticas apresentadas pelos alunos no decorrer das tarefas, as quais aprofundaremos teoricamente nos próximos capítulos.

CAPÍTULO V

AS IDEIAS SOBRE LINGUAGEM PROBABILÍSTICA APRESENTADAS PELOS ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste capítulo realizaremos a análise da linguagem probabilística de que os alunos vão se apropriando a partir das tarefas desenvolvidas. Identificamos quais são as ideias que eles têm sobre probabilidade; como se apropriam de palavras e expressões utilizadas no cotidiano que, na verdade, são carregadas de sentidos e medidas, (re)interpretadas e compreendidas de diferentes formas em um mesmo contexto; e como eles expressam tais ideias por meio de uma linguagem.

Para isso, analisaremos os registros produzidos pelos alunos e as considerações apresentadas por eles durante o desenvolvimento das tarefas, articulados ao conjunto de dados de que dispomos: registros no diário de campo da professora-pesquisadora, registros dos momentos da socialização, transcrições das gravações em vídeo e identificação de episódios.

A análise foi realizada, levando em conta os pressupostos teóricos apresentados nos capítulos I e II e outros que consideramos relevantes aos dados apresentados; algumas observações já destacadas no capítulo IV; e nossas considerações a partir do apresentado.

5.1 O despertar para a linguagem probabilística: primeiras considerações

Tínhamos como hipótese inicial que um contexto de sala de aula diferente do modelo tradicional, um ambiente mediado pelo processo de comunicação e com tarefas na perspectiva investigativa de resolução de problema favoreceria a emersão de ideias probabilísticas. Dessa forma, iniciamos a análise, revendo as primeiras tarefas, que tinham por objetivo proporcionar algumas reflexões acerca da linguagem probabilística, pois, mesmo que parte do vocabulário probabilístico compoinha o cotidiano dos nossos alunos, acreditamos que eles não tiveram anteriormente, em ambiente escolar, a oportunidade de refletir sobre essa temática. Assim, admitimos as respostas dadas pelos alunos, nas primeiras tarefas, como intuições primárias que, segundo Fischbein (1987, apud BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1994, p. 71), são aquisições cognitivas que derivam diretamente das experiências, sem necessidade de instrução sistemática.

Entendemos que nesse momento algumas questões foram relevantes para que as ideias fossem apresentadas. A primeira tarefa⁵¹, um problema fechado, possibilitou que as discussões tivessem um foco mais restrito, já que esse era o primeiro contato escolar com a linguagem probabilística, ao mesmo tempo que a tornou rica de sentidos e significações.

Na *fase do durante* (VAN DE WALLE, 2009) houve algumas discussões individualizadas nos grupos, mas foi na *fase do depois* que as ideias foram apresentadas e até alteradas por alguns grupos. Os argumentos apresentados pelos colegas, no momento de socialização, possibilitaram que os alunos atribuíssem novos sentidos às suas ideias, como mostra o seguinte episódio:

Episódio 14

⁵¹ A primeira tarefa consistia em relacionar frases do cotidiano com termos estocásticos.

Prof^a.: *Para vocês, o que significa ocorre com frequência?* [A pergunta foi direcionada ao grupo do Luciano e do Pietro, que relacionou “ocorre com frequência” com “pouco provável”]

Luciano: *Ocorre muito.*

Prof^a.: *E você, acha que ocorre muito é o mesmo que pouco provável?*

Pietro: *Não! É todo dia.*

Prof^a.: *Dessa forma, posso dizer que é pouco provável que você venha à escola?*

Classe: *Não! É muito provável.*

Humberto: *Não! É provável, se fosse muito provável nós viríamos à escola aos sábados e domingos.*

Prof^a.: *- E quase sempre?*

Humberto: *É muito provável.*

Mário: *É pouco provável.*

Humberto: *Se você faz algo quase sempre, então, é muito provável que você faça isso.*

Prof^a.: *Tem algum grupo que mudou de ideia?*

Marina (grupo do Mário): *É mesmo, é quase todo dia, é muito provável.*

Júlio: *O Humberto tem razão, quase sempre fica melhor com muito provável.*

Esse trecho evidencia o quanto essa metodologia possibilita a formulação e o poder de argumentação dos alunos, momento destacado por Van de Walle (2009): “onde a maior parte da aprendizagem acontece enquanto os alunos refletem individualmente e coletivamente sobre as ideias que eles criaram e inventaram”. De modo semelhante, Lopes e Coutinho (2009, p. 74) ressaltam que a explicitação de ideias é um ponto crucial na resolução de problemas estatísticos e acrescentam que “compreender o significado de expressões relacionadas nas quais estejam presentes as noções probabilísticas faz hoje parte da competência matemática e estatística que todos devem desenvolver para serem cidadãos críticos e participativos”

Entendemos que as ideias apresentadas por Humberto sobre as expressões estocásticas *ocorre com frequência*, *ocorre quase sempre*, *pouco provável* e *muito provável* mostram que nossos estudantes não são tábuas rasas, que possuem suas próprias heurísticas e concepções sobre estocástica (SHAUGHNESSY, 1992). Os exemplos utilizados pelo aluno Humberto evidenciam que, mesmo não tendo instrução sistemática sobre probabilidade e utilizando as que se desenvolvem espontaneamente em suas experiências cotidianas, seus argumentos são coerentes e lógicos. Assim, suas afirmações foram relevantes para as reflexões de colegas que apresentavam concepções equivocadas acerca dos significados das palavras da tarefa em questão, como no grupo de Mário e de Marina. Isso não significa que esse grupo se tivesse apropriado desses

significados e conceitos, mas que os argumentos do colega Humberto lhes proporcionaram produzir reflexões, atividade necessária para a aquisição de novas concepções probabilísticas.

Os problemas abertos possibilitam que as ideias espontâneas dos alunos não sejam delimitadas, o que é importante tanto na aprendizagem dos alunos quanto no campo das pesquisas. Porém, no cotidiano de sala de aula, os professores de Matemática não costumam trabalhar com esse tipo de problema, pois consideram que sua correção fica difícil. Sobre o trabalho com problemas abertos, Schoenfeld (1998) ressalta que o “professor necessita ser matematicamente confiante”, o que não significa que ele tenha que saber todas as respostas ou conhecer as técnicas corretas, mas deve ser capaz de explorar as questões e fazer generalizações em torno delas, de modo que haja conjecturas plausíveis e progressos nessas conjecturas.

Assim, consideramos a imprevisibilidade dos problemas abertos, tarefas 2 e 3 relacionadas à linguagem estocástica, como um fator positivo tanto no processo ensino-aprendizagem como nas pesquisas, pois as ideias espontâneas apresentadas pelos alunos podem ser utilizadas como indicativos dos significados que eles foram atribuindo aos problemas propostos. Essas informações, no cotidiano de sala de aula, também podem ser utilizadas pelo professor para definir o próximo passo nesse processo. Em nossa pesquisa, as ideias espontâneas apresentadas pelos alunos nessas tarefas em seus registros escritos permitiram que identificássemos ideias equivocadas a respeito da linguagem probabilística, as quais apresentamos no quadro a seguir.

Quadro 15 – Ideias equivocadas a respeito da linguagem probabilística.

Grupo - Classe	Significado de pouca possibilidade:	Significado de muita probabilidade:
Grupo B – 7ºE	Pouco provável de acontecer.	Muitas chances de ocorrer.
Grupo A – 7ºB	Aquilo que é pouco provável.	Qualidade de provável.
Grupo E – 7ºB	Pode acontecer, mas não tem muitas chances.	Muitas chances de ganhar alguma coisa.
Grupo G – 7º B	Difícil de acontecer.	Bastante chance de acontecer.
Grupo B – 7ºE	Pouco provável de acontecer.	Muitas chances de ocorrer.

Grupo C – 7ºE	Pouca chance.	Muitas chances.
Grupo F – 7ºE	Não muitas chances de acontecer.	Várias chances de acontecer.
Grupo G – 7ºE	Pouca chance de acontecer.	Muitas chances de ocorrer.

Esse quadro foi elaborado com base nas respostas dadas pelos referidos grupos, no registro escrito da tarefa 2, com o objetivo de mostrar que as ideias sobre o significado de “pouca possibilidade” e “muita probabilidade” apresentadas pelos alunos são semelhantes, diferindo apenas na intensidade relativa aos termos “pouca” e “muita”, que precedem tais palavras. Observamos, nas respostas dos grupos quanto ao significado das palavras, que mais da metade dos grupos interpretam as palavras “possibilidade”⁵² e “probabilidade”⁵³ como sinônimas, o que é um equívoco, pois, além dos significados, envolvem raciocínios diferentes: o combinatório⁵⁴ e o probabilístico, respectivamente.

De acordo com Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), a combinatória, ou análise combinatória, como historicamente se conhece, estuda os conjuntos discretos e as configurações que se podem obter a partir de seus elementos, mediante certas transformações que originam combinações na sua estrutura e na sua composição. Os autores complementam que as operações combinatórias, além de serem algoritmos para o cálculo de probabilidade, proporcionam uma interpretação clara da estrutura interior dos experimentos.

Os livros didáticos, normalmente, trazem primeiro a análise de possibilidades (análise combinatória), depois a probabilidade e, por último, a estatística, tendo como pressuposto que, para estabelecer as probabilidades, é necessário antes definir as possibilidades, o que também é

⁵² “Possível/Possibilidade: aquilo que não é, mas poderia ser, que é realizável, que satisfaz as condições gerais da existência. Pode-se distinguir a *possibilidade física*, ou seja, aquilo que é de fato realizável, que não vai contra as leis da natureza, as *possibilidade lógica*, que indica aquilo que é de princípio realizável, já que não envolve nenhuma contradição. (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2006, p. 222).”

⁵³ “Probabilidade: Determinação da expectativa racional da ocorrência de um fato. Cálculo através do qual se procura estabelecer a ocorrência ou não de um fato a partir de sua frequência. A probabilidade pode ser determinada em vários graus, podendo ser maior ou menor, dependendo do grau de certeza que se tem. A teoria clássica da probabilidade procura estabelecer as chances de ocorrência de um evento em relação a outras alternativas. Ex.: dois dados podem ser jogados em trinta e seis combinações possíveis, onze dentre estas incluem o número seis, logo a probabilidade de obtermos um seis é de 11/36. (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2006, p. 226).”

⁵⁴ No Ensino Fundamental, emprega-se mais o termo “análise de possibilidades”; no entanto, nos livros de Ensino Médio e de estudo teórico utiliza-se mais a denominação “análise combinatória”. Podemos considerar esses termos como sinônimos. Em nosso estudo, utilizamos o termo “análise de possibilidades”.

denominado “espaço amostral”. A probabilidade, por sua vez, é uma das ferramentas utilizadas pela estatística.

Dessa forma, entendemos que, na matemática, possibilidade e probabilidade envolvem significados e raciocínios diferentes, mas, mesmo assim, existe uma relação fundamental entre esses termos. As ideias combinatórias são importantes para o desenvolvimento do pensamento probabilístico, uma vez que o raciocínio combinatório interpreta os possíveis resultados em situações de incerteza; por outro lado, os problemas probabilísticos permitem que se construam objetos combinatórios, mesmo que implicitamente. Linguisticamente, possibilidade e probabilidade fazem parte do mesmo campo semântico, ou seja, são palavras unidas pelo sentido, o que também favorece os equívocos de sentidos na matemática.

Essas relações permitem-nos entender as interpretações desses termos probabilísticos apresentadas pelos alunos, as quais, mesmo possuindo certa coerência, são equivocadas e podem ser um obstáculo ao ensino-aprendizagem da probabilidade, uma vez que essas ideias podem ser transferidas para as concepções probabilísticas dos alunos. Nesse sentido, Shaughnessy (1992), ao revisar as pesquisas de Konold (1989) e Garfield e delMas (1989) sobre concepções estocásticas de estudantes, declara que a mensagem desses estudos é clara e consistente ao apontar que as concepções equivocadas de estocástica são mais difíceis de serem mudadas ou superadas por alguns estudantes.

No episódio da tarefa 3, item 2, que relaciona a linguagem probabilística às questões de previsão do tempo, verificaram-se os efeitos positivos das discussões a respeito da linguagem estocástica, realizadas nas primeiras tarefas. Observamos a linguagem probabilística sendo incorporada ao discurso dos alunos, ao argumentarem sobre suas hipóteses e ao refutarem considerações dos colegas; notamos, também, que seus argumentos se mostram mais sofisticados e consistentes. No item citado, os alunos deveriam relacionar uma palavra ou expressão probabilística com a frase “a temperatura máxima passará dos 30 graus”, de acordo com a confiança que tinham nessa previsão. A princípio, os grupos foram falando as palavras que faziam a relação entre as frases, e a professora foi anotando na lousa: *é bastante provável que a temperatura máxima passará de 30 graus, é incerto que a temperatura passe dos 30 graus, é impossível..., há alguma possibilidade ..., é quase impossível ...* Depois disso, iniciou-se a socialização transcrita no seguinte episódio:



Episódio 15

Prof^a.: *E aí, pessoal, o que pensam sobre as frases?*
Humberto: *O impossível não dá, pois pode passar de 30 graus.*
Pietro: *Mas em junho é frio.*
Humberto: *Mas impossível está afirmando muito.*
Marília: *É mesmo, você não sabe se vai estar frio.*
Júlio: *Ninguém sabe! Pode chover, fazer sol ou ventar! É clima, é instável.*
Bruna: *Mas não pode ir de 15° para 30° de uma hora para outra..*
Marília: *Mas pode estar em 25° e ir para 30°.*
Pietro: *O aquecimento global pode interferir, mas nem tanto.*
Humberto: *Está afetando, sim.*
Prof^a.: *É fato que nesta época de junho começa a fazer frio aqui, mas enfim, posso utilizar o impossível para esta situação?*
Michel: *Mas não dá pra saber, ainda vai demorar a chegar o dia 12 de junho.*
Jairo: *Mas já está fazendo frio!*
Prof^a.: *E todos os dias faz frio?*
Humberto: *Não! Uma hora faz calor, outra faz frio.*
Pietro: *Mas calor de 30° não faz.*
Maitê: *Se não faz agora, imagina em junho!*
Pietro: *Não fez no verão, não vai fazer agora?*
Prof^a.: *Será que não fez no verão?*
Pietro: *Aqui em Amparo, não.*
Humberto: *Fez, sim.*
Pietro: *Eu não concordo, acho que é impossível.*
Humberto: *Pode passar.*
Prof^a.: *Resumindo, vocês disseram que é difícil, mas que pode ocorrer; então, quais palavras poderiam ser utilizadas?*
Alunos: *O pode ser, o incerto...*
Humberto: *O Pietro está falando que o bastante provável também pode.*
Prof^a.: *E você, Flávio, o que pensa?*
Flávio: *Que não.*
Michel: *Mas também não sabemos se passa!*
Pietro: *Mas eles estão afirmando.*
Prof^a.: *Quando eu digo que é bastante provável, o que eu quero dizer?*
Elaine: *Que você já sabe que vai passar.*
Marília: *Você tem quase certeza que vai passar.*
Prof^a.: *Vocês estavam dizendo que era impossível, agora que é quase certeza que vai passar dos 30°, e aí como fica?*
Elaine: *Ninguém sabe se vai passar.*
Prof^a.: *Quando eu não sei o que vai ocorrer, quais palavras devo utilizar?*
Renato: *Passou uma vez, então passará de novo. [Estava se referindo à temperatura de 30°]*
Marília: *É verdade.*
Prof^a.: *Quando algo acontece uma vez, é certeza que acontecerá novamente?*
Júlio: *Não! Neste caso, é Deus quem define.*
Prof: *Deixa-me ver se eu entendi, vocês disseram que bastante provável é quase certeza que algo acontecerá, mas que se a temperatura passou dos 30° uma vez, é praticamente certo que passe de novo!*
Alunos: *Não!*

Prof^a.: *Se já passou uma vez, não há chances de passar de novo?*
Humberto: *Há, mas assim você está afirmando muito.* [Estava se referindo aos termos, bastante provável e praticamente certo]
Jairo: *Há chance de passar e de não passar.*
Prof^a.: *Então, como fica?*
Michel: *Acho seria o pouco provável.*
Prof^a.: *Renato, o que você pensa sobre isso?*
Renato: *Também acho que seria o pouco provável.*
Prof^a.: *Por quê?*
Renato: *Tem chance, mas não bastante.*
Prof^a.: *E o impossível?*
Elaine: *Não, mas o pode ser também poderia ser utilizado.*
Prof^a.: *Afinal, quais palavras podem ser usadas neste caso em que a maioria acredita ser muito difícil de acontecer, mas que pode ocorrer?*
Humberto: *O pode ser e o quase impossível.*
Bruna: *Há alguma possibilidade também.*

Evidenciamos, no episódio transcrito acima, que as experiências dos alunos, tanto em seu cotidiano como no ambiente escolar, são marcadas em seus argumentos e que muitas vezes não são alteradas facilmente. A provável falta de contato com termômetro de medida de temperatura de ambientes⁵⁵ manifestada pelo aluno Pietro, ou seja, a falta de experiências anteriores do aluno Pietro em contexto de previsão do tempo o fez expressar confiança — que espontaneamente não foi modificada — em uma previsão, de forma diferente dos colegas. De forma semelhante, Fischbein, Nello e Marino (1991, apud FERNANDES, 1999, p. 69) afirmam que não devemos partir do princípio de que as crianças compreendam naturalmente termos estocásticos. Assim, diante do exposto, acrescentamos a necessidade de outras situações, de tarefas, no cotidiano escolar, as quais possibilitem que os alunos estabeleçam relações entre a linguagem probabilística e os diferentes acontecimentos.

Como já mencionamos, acreditamos que as discussões estabelecidas entre os alunos e a professora, tanto no momento do desenvolvimento das tarefas como nos momentos de socialização, evidenciam uma estratégia de ensino que favorece a capacidade dos alunos de comunicar-se matematicamente, refletir sobre suas formulações e desenvolver seu poder de argumentação. Aliado a isso, acrescentamos que há outras estratégias de ensino que também favorecem o desenvolvimento de tais capacidades, como as tarefas de linguagem escrita, por exemplo.

⁵⁵ Na cidade em que os alunos moram só há um termômetro no qual fica exposta a temperatura do ambiente; além disso, fica em um local de difícil acesso para eles. Os alunos disseram que não possuem tal instrumento de medida em casa.

5.2 A produção de cartas favorecendo a apropriação da linguagem probabilística

A produção de cartas pelos alunos como forma de apropriação da linguagem probabilística não estava prevista entre as tarefas, porém houve uma situação que favoreceu essa forma de trabalho em nossa pesquisa: o afastamento da professora-pesquisadora da sala de aula, no final da pesquisa de campo, por um determinado tempo, para assumir um cargo administrativo. Assim, a tarefa 18⁵⁶, última da primeira etapa, em que os alunos deveriam avaliar duas situações do jogo “A travessia do rio” e registrar suas conclusões e justificativas, foi realizada em parceria com a professora-substituta, que desenvolveu a introdução — momento de apresentação da tarefa — e a fase do “durante”, momento de desenvolvimento da tarefa. O momento da socialização, nessa tarefa, foi substituído pela troca de cartas, ou seja, após ter recebido os registros dos alunos por meio de cartas sobre as conclusões obtidas, a professora-pesquisadora escreveu uma carta a cada grupo, com alguns questionamentos sobre seus registros. Os alunos, também por meio de carta, responderam aos questionamentos da professora-pesquisadora.

O processo de comunicação de ideias nas aulas de Matemática é significativo quando contribui para que os alunos atribuam sentidos ao que estão aprendendo. Logo, o processo de leitura e escrita de cartas não é somente mais uma forma de trabalho, pois possibilita que se estabeleçam relações importantes entre as ideias adquiridas e a linguagem apropriada para expressá-las.

A seguir, apresentamos a análise feita a partir da sequência de registros e das cartas trocadas entre professora-pesquisadora e dois grupos de alunos.

5.2.1 A escrita e a reescrita das reflexões do primeiro grupo

Iniciaremos a análise, apresentando a sequência de dados em que nos baseamos; assim, relataremos, na sequência, a tarefa 18 realizada pelo primeiro grupo, composta de reflexão 1 e 2; a carta escrita pela professora-pesquisadora aos alunos; a carta-resposta enviada pelos alunos à professora-pesquisadora. Finalizaremos com as nossas considerações.

<u>Tarefa 18</u>

⁵⁶ Apresentada na página 83 desta dissertação.

Reflexão 1:

	MARGEM											
Vermelho	•	•	•				•	•			•	•
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Azul			•	•	•	•	•	•			•	
	MARGEM											

1) Vocês acham esse jogo justo? Por quê?

Não, tem uma bolinha no 1, e entre 2 dados o menor número é 2

2) Quem tem mais chance de ganhar? Justifique.

Azul, porque ele não tem uma bolinha no 1

Reflexão 2:

	MARGEM											
Vermelho					•	•	•	•	•			
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Azul			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	MARGEM											

1) Vocês acham esse jogo justo? Por quê?

Sim, por que todos os números tem possibilidade de sair.

2) Qual tem mais chance de ganhar? Justifique.

0

xxxxxxx, 09 de junho de 2009.

Queridos alunos,

Tudo bem com vocês? Estou com saudades!

Escrevi esta carta, pois fiquei pensando em algumas coisas que registraram na tarefa que fizeram nos últimos dias.

Na reflexão 1, vocês escreveram que o jogo não era justo, pois tem uma bolinha no 1 e entre dois dados o menor número é 1. Não entendi. O que queriam dizer com isso?

Quanto à reflexão 2, vocês não responderam o segundo item, estou enviando-lhes a folha para que a façam.

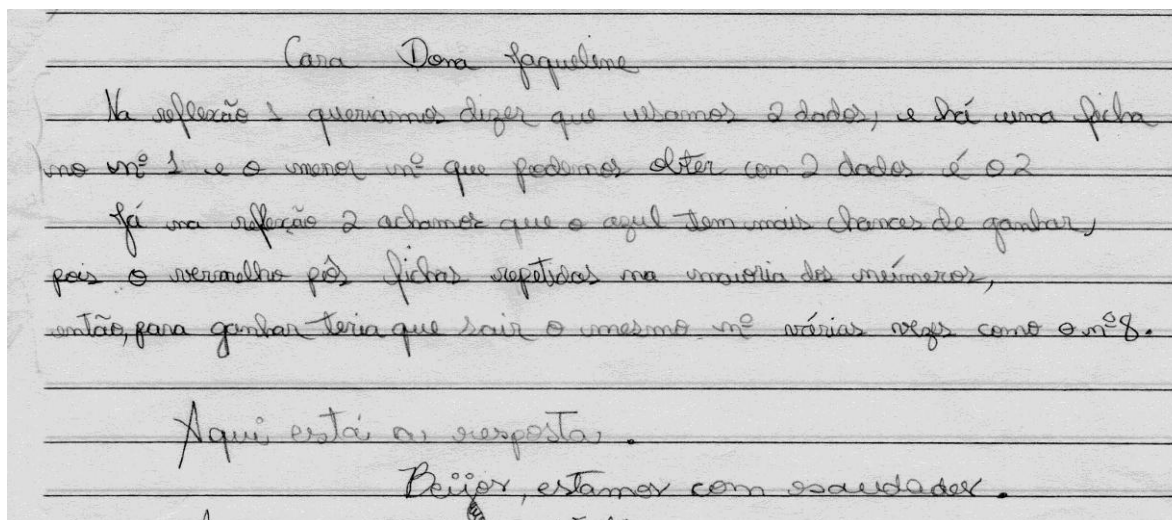
Aguardo ansiosa a carta de vocês.

Beijos,

Prof^a. Jaqueline

PS: Estou enviando a atividade a que me referi, caso queiram rever.

Carta dos Alunos



Cará Dona Jaqueline

Na reflexão 1 queríamos dizer que usamos 2 dados, e só uma ficha no nº 1 e o menor nº que podemos obter com 2 dados é o 2.

Já na reflexão 2 achamos que o azul tem mais chances de ganhar, pois o vermelho pôs fichas repetidas na maioria dos números, então, para ganhar teria que sair o mesmo nº várias vezes como o nº 8.

Aqui estão as respostas.

Beijos, estamos com saudades.

Ao considerarem que o jogo não é justo e ao afirmarem que a equipe azul tem mais chance porque não tem fichas no número 1, fica claro que os alunos sabem que não há possibilidade de obter o número 1 na soma de dois dados. Em outras palavras: provavelmente, ao determinarem que o 1 não seja um resultado possível, os alunos fizeram uma análise das possibilidades de somas, ficando evidente que eles têm a ideia de combinatória. Contudo, ao

escreverem por que o jogo é injusto, “tem uma bolinha no 1 e entre dois dados o menor número é o 1”, observa-se uma imprecisão na linguagem ao registrar suas ideias, o que pode ocasionar equívocos de interpretação. Tal fato fortalece a necessidade de práticas de leitura e escrita nas aulas de Matemática, pois, ao escrever, o aluno escolhe suas próprias palavras para expressar o que aprendeu; e isso não é tarefa fácil, principalmente na disciplina de Matemática, que envolve formas e significados que são próprios da linguagem matemática.

Constatamos que, ao responderem aos questionamentos da professora-pesquisadora por meio de carta, os alunos não só responderam a questão que haviam deixado de fazer como reescreveram suas ideias expressando confiança. Isso nos leva a dizer que o sentido produzido pela leitura e pela escrita das cartas possibilitou que os alunos (re) construíssem ideias e vocabulário probabilístico.

Porém, a mesma tarefa, realizada por outro grupo, possibilitou-nos outras observações as quais apresentaremos no próximo trecho.

5.2.2 A escrita e a reescrita das reflexões do segundo grupo

Neste trecho apresentaremos os registros produzidos pelo segundo grupo de alunos, a carta da professora-pesquisadora enviada ao grupo, a resposta dada por eles à professora-pesquisadora e nossas observações.

Tarefa 18

Reflexão 1:

	MARGEM											
Vermelho	•	•	•				•	•		•	•	•
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Azul			•	•	•	•	•	•	•		•	

MARGEM

1) Vocês acham esse jogo justo? Por quê?

Sim. Por que a chances são iguais

2) Quem tem mais chance de ganhar? Justifique.

Ninguém, Por que os dois tem chances

Reflexão 2:

	MARGEM											
Vermeinho	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
					•	•	•	•	•			
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Azul			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

MARGEM

1) Vocês acham esse jogo justo? Por quê?

Sim. Por que os dois têm as mesmas quantidades de bolinhas.

2) Qual tem mais chance de ganhar? Justifique.

Os dois. Porque os dois têm as mesmas possibilidades

xxxxx, 09 de junho de 2009.

Tudo bem com vocês? Estou com saudades!

Escrevi esta carta, pois fiquei pensando em algumas coisas que registraram nas tarefas que fizeram nos últimos dias.

Na reflexão 2, escreveram que o jogo é justo porque as duas equipes têm a mesma quantidade de bolinhas. Será que somente o número de fichas (bolinhas) indica se o jogo é justo ou injusto?

Aguardo ansiosa a carta de vocês.

Prof^a. Jaqueline

Carta dos Alunos

Querida Professora Jaqueline.

Na reflexão 1 → mudamos nossa resposta as chances não são iguais, porque a parte vermelha tem uma ficha no nº 1, que no caso é impossível de sair na soma de 2 dados. Já a parte azul, não tem ficha no nº 1, portanto é ela quem vai ganhar.

Na reflexão 2 → Os dois grupos com a mesma quantidade de bolinhas é justo, mas depende também de onde elas estão, se em um deles estiver a bolinha no nº 1 é certo que o outro grupo ganhará, neste caso o jogo será injusto.

Um abraço.

No registro produzido pelo grupo na reflexão 1, observa-se que os alunos, ao considerarem o jogo justo, fizeram uma avaliação equivocada do jogo apresentado. À primeira vista, esperava-se que eles transferissem espontaneamente o resultado das tarefas realizadas anteriormente e, sendo assim, considerassem o jogo injusto, levando em conta que é impossível obter a soma 1 utilizando dois dados; porém, tal afirmação deixou-nos um pouco intrigada quanto às ideias dos alunos. A justificativa dada pelo grupo, em relação a esta conclusão: “as chances são iguais” e “os dois têm chances”, expressavam suas hipóteses de forma sucinta, possibilitando, a princípio, uma análise vaga de suas ideias.

Ao analisar os registros da segunda reflexão, entende-se que os alunos consideram como justo o jogo em que duas equipes têm as mesmas possibilidades, ou seja, têm as mesmas quantidades de bolinhas. No entanto, a resposta dada por eles pode ser interpretada de duas formas: a primeira, em que eles avaliam o jogo, conforme o enunciado da tarefa, sem levar em conta as experiências probabilísticas desenvolvidas em sala de aula, e, sim, as experiências de jogo presentes no seu cotidiano, como o futebol, por exemplo. Neste jogo, quando um dos times tem um jogador a menos, está em desvantagem; então, começar um jogo dessa forma parece injusto, assim como ter o mesmo número de jogadores nos dois times é justo.

A segunda hipótese da interpretação dos alunos é que levam em conta alguma ideia equivocada de que ter o mesmo número de fichas significa que as equipes têm as mesmas possibilidades e, conseqüentemente, as mesmas chances. Tal ideia seria significativa, por exemplo, em situações em que fichas numeradas de 1 a 12 estivessem em uma caixa e fossem extraídas aleatoriamente, sem que seus números fossem somados; porém, como a condição do jogo é que as fichas sejam mudadas de lado, de acordo com a soma dos números obtidos nos dois dados, pode-se entender que os alunos apresentam uma ideia equivocada em relação aos sucessos favoráveis desse evento.

A carta enviada pela professora ao grupo contemplou alguns questionamentos a respeito das respostas dadas por eles, os quais possibilitaram que os alunos refletissem sobre seus registros e ideias, alterassem e expressassem suas respostas com mais clareza. A ideia de que o jogo era justo foi alterada: passaram a considerá-lo injusto, porque admitem ser impossível sair o número 1 na soma de dois dados. Para Fischbein (1975), o processo de aquisição de conceitos probabilísticos não é espontâneo nem relacionado ao processo de autoregulação do crescimento e, sim, mediado pela intervenção escolar.

O aprimoramento dos registros feitos pelos alunos por meio desta tarefa indica, mais uma vez, que o uso de instrumentos adequados constitui um argumento a favor da linguagem e das ideias probabilísticas. A isso, acrescentamos a importância do trabalho em sala de aula baseado em cenários de investigações, no qual as referências que o aluno estabelece entre as ideias, individuais e coletivas, possibilitam que ele produza significados não só para as tarefas propostas, mas para o conhecimento matemático; neste caso específico, para o conhecimento probabilístico. Ressaltamos também, como foi apontado, que a linguagem dos enunciados é passível de equívocos, tanto por parte do professor quanto dos alunos. Tal questão será discutida no próximo item.

5.3 A linguagem dos enunciados conduzindo a diferentes interpretações

Corroboramos as palavras de Salmazo (2005, p. 14), ao referir-se à aprendizagem em matemática: “muitos dos problemas são relativos às dificuldades de leitura e interpretações de enunciados e situações problemas”, porém acrescentamos que a linguagem utilizada nos enunciados e nas situações problemas pode gerar dificuldades de interpretação e, dessa forma, levar a avaliações equivocadas a respeito do conhecimento do aluno.

Espera-se, no desenvolvimento do trabalho em sala de aula, que os alunos transfiram os conhecimentos adquiridos de uma tarefa para outra, porém, nem sempre isso acontece. A falta de atenção, de interesse e as dificuldades de leitura e interpretação são algumas das causas apontadas por professores que se deparam com problemas desse tipo. Uma das hipóteses de análise apontada por nós, no item anterior, sugere que possíveis falhas de linguagem nos enunciados de tarefas possibilitam equívocos na interpretação e, conseqüentemente, nas respostas dadas pelos alunos. Outras situações relacionadas à linguagem de enunciados foram observadas por nós em outros momentos da pesquisa.

Como mencionado anteriormente e apontado por Bentz e Borovcnik (apud SAENZ, 1999, p. 30), as tarefas de múltipla escolha podem não expressar as reais ideias dos alunos; assim, o autor propõe, para uma análise mais efetiva, que se entreviste o aluno, com o objetivo de compreender suas concepções ao fazer determinada escolha. Tendo em vista a dificuldade de realizar tal proposta em pesquisa na sala de aula com o número total de alunos, optamos⁵⁷ por acrescentar no final das tarefas de múltipla escolha propostas, a indagação, “por quê?”, com o objetivo de que os alunos explicassem o motivo de suas escolhas e fornecessem mais informações sobre suas ideias.

Uma discussão ocorreu em um dos grupos do 7º E, na fase de desenvolvimento da tarefa 12⁵⁸, de múltipla escolha, e a professora-pesquisadora foi chamada.

Tarefa 12 – Fichas no saco

Vou colocar uma ficha azul e uma amarela em um saco e pedir para você tirar uma sem olhar. Qual você pensa que seja mais provável sair?

- a) a azul
- b) a amarela
- c) ambas têm a mesma possibilidade
- d) não sei

Por quê? _____

A conversa ficou registrada no seu diário de campo da professora-pesquisadora:

⁵⁷ Professora-pesquisadora, orientadora e Grucomat.

⁵⁸ Tarefa apresentada na página 73 desta dissertação.

Breno me chamou, pois seu grupo não entrava em acordo na tarefa 12, seus três colegas achavam que a resposta correta seria a alternativa “c” (ambas têm as mesmas chances) e Breno, a alternativa “d” (não sei). Ele me disse: - “Eu não sei qual ficha irá sair”, então, o correto é o item “d”. Seus colegas argumentavam, dizendo que “também não sabiam qual ficha sairia, mas que as duas tinham as mesmas chances de serem sorteadas”, dessa forma, para eles a opção correta seria a alternativa “c”. Breno me perguntou o que significava o item “d”, não sei; eu respondi que, quando organizamos a tarefa, pensamos no item, “não sei”, como “não sei responder essa tarefa”. Depois da minha explicação ele disse que o correto seria a letra c, pois ele não sabia qual ficha iria sair, mas sabia responder a tarefa. (DC, 28/05/2009)

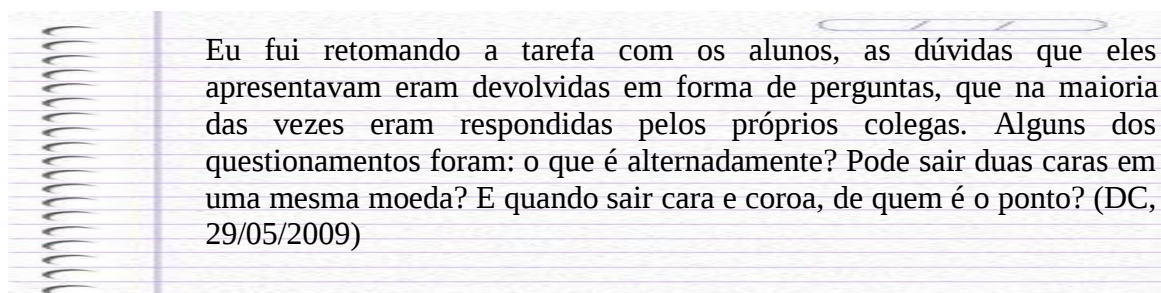
De forma semelhante, tal situação também ocorreu com um grupo do 7º B. Eles assinalaram o item “d”, “não sei”, e justificaram que só experimentando iriam saber. As alegações feitas pelos alunos quanto à escolha que fizeram são coerentes. Breno não sabia qual ficha iria sair, assim como seus colegas; então, a expressão “não sei”, para ele, é mais significativa que “ambas têm a mesma possibilidade”; o mesmo pode ter ocorrido com o grupo que considera que “só atuando iriam saber” o resultado. Essa situação indica que a linguagem dos enunciados é passível de equívocos, ou seja, pode conduzir a diferentes interpretações, levando o aluno a optar por uma alternativa que não revela o que realmente pensa. O item “não sei” foi apresentado de forma muito sucinta e talvez não possibilitasse equívocos, caso o seu sentido estivesse explícito: “não sei responder a tarefa”.

Algumas dúvidas sobre palavras ou expressões dos enunciados surgiram durante a realização das tarefas, porém, na tarefa 16, apresentada abaixo, a expressão “não entendi a tarefa” foi repetida pela maioria dos grupos.

Lobo Mau propôs o seguinte jogo para Chapeuzinho Vermelho:

- Cada um lança, alternadamente, 10 vezes uma moeda para cima.
 - Se as duas moedas apresentam cara, a Chapeuzinho ganha 1 ponto.
 - Caso isso não ocorra, o Lobo Mau é quem ganha 1 ponto.
- Quem obtiver o maior número de pontos ficará com os doces da vovó.

A professora-pesquisadora questionou-os sobre o que não entenderam; responderam que não entenderam como seria o jogo. O procedimento então utilizado pela professora-pesquisadora também foi registrado em seu diário de campo:



Eu fui retomando a tarefa com os alunos, as dúvidas que eles apresentavam eram devolvidas em forma de perguntas, que na maioria das vezes eram respondidas pelos próprios colegas. Alguns dos questionamentos foram: o que é alternadamente? Pode sair duas caras em uma mesma moeda? E quando sair cara e coroa, de quem é o ponto? (DC, 29/05/2009)

Observamos que alguns grupos, mesmo não tendo dúvidas sobre as palavras ou as expressões do enunciado da tarefa, não haviam entendido o jogo proposto pelo Lobo Mau, enquanto em outros, em que os alunos simularam o jogo para explicar aos colegas, não havia dúvidas. Tal técnica foi aplicada pela professora-pesquisadora, com auxílio dos alunos, como garantia de que todos os grupos houvessem compreendido a tarefa.

Entendemos que a linguagem dos enunciados das tarefas deve ser clara; isso não significa que as ações para sua resolução estejam evidentes, mas que a linguagem seja acessível para que o aluno consiga estabelecer relações entre as informações e os conhecimentos que possui, com os quais buscará resolver seu problema. Ao analisarmos o enunciado da referida tarefa, levando em conta as dúvidas dos alunos, constatamos que realmente sua forma não é tão clara.

Observa-se, no segundo e no terceiro parágrafos, certa confusão sobre o número de moedas — “lança 10 vezes uma moeda” e “se as duas moedas apresentam” — que nos remete a diversas leituras para sua compreensão. Entendemos que o propósito do jogo seria uma análise das possibilidades em que o Lobo Mau ganharia pontos, o que nos fez considerar como uma tarefa interessante e significativa para os alunos. Dessa forma, é compreensível que algumas informações estejam implícitas, porém, temos que levar em conta que as regras de um jogo necessitam ser apresentadas de forma clara. O problema, neste caso, não pode ser a interpretação do texto e, sim, a análise das possibilidades dos jogadores. Algumas alterações na organização das palavras utilizadas no enunciado da tarefa poderiam favorecer sua interpretação, como mostra o exemplo abaixo, em que as alterações foram sublinhadas:

Lobo Mau propôs o seguinte jogo a Chapeuzinho Vermelho:

- Cada um lança, alternadamente, uma moeda para cima.

- Se as moedas dos dois apresentarem cara, a Chapeuzinho ganha 1 ponto.
- Caso isso não ocorra, o Lobo Mau é quem ganha 1 ponto.
- Ao total de 10 jogadas, quem tiver o maior número de pontos ficará com os doces da vovó.

Dessa forma, concluímos que a linguagem utilizada nas regras do jogo pode possibilitar uma interpretação mais acessível, ao mesmo tempo que os objetivos de análise do jogo, por parte de quem os interpreta, se mantêm.

A segunda fase das tarefas, como já foi mencionado, foi realizada individualmente, com quatro alunos que, após a resolução das tarefas, foram entrevistados pela professora-pesquisadora. As questões, semiestruturadas, foram elaboradas com base nas respostas que os alunos deram às tarefas apresentadas e tinham por objetivos esclarecer dúvidas, elucidar algumas ideias apresentadas pelos alunos em seus registros e promover novas reflexões a partir dos questionamentos realizados. Além disso, a entrevista nos mostrou que as respostas “erradas/equivocadas” dos alunos, normalmente atribuídas à não compreensão dos conteúdos estudados, podem expressar a não compreensão da tarefa proposta.

As respostas dadas pelo aluno Humberto na tarefa 2⁵⁹ fugiram um pouco do esperado, o que nos deixou muito curiosa sobre suas ideias. No momento da entrevista, Humberto disse que ficou muito confuso na realização desta tarefa. A professora-pesquisadora leu com ele o enunciado e iniciou a entrevista da seguinte forma:

Episódio 16

Prof^a: *Imagine que tem uma caixa sobre a mesa, dentro dessa caixa tem bolas azuis, vermelhas e verdes; se eu colocar a mão dentro dela, o que acha que seria impossível acontecer nesta situação?*

Humberto: *Tirar uma bola roxa. Nossa! Eu não li direito, agora que eu entendi a tarefa..*

Observa-se, neste caso, que o aluno, em seu registro, escreveu que seria impossível uma bola azul desaparecer, o que pode ou não ser considerado como uma resposta coerente; porém, quando a professora-pesquisadora retomou a tarefa com uma linguagem mais clara, o aluno

⁵⁹ Ver páginas 97 e 98.

respondeu de forma diferente, expressando mais compreensão e confiança em suas ideias. Outras respostas foram alteradas pelo aluno no decorrer da entrevista:

Quadro 16 – Alterações da tarefa 2 – Humberto

Acontecimento	Exemplos de resultados possíveis para o acontecimento, antes da entrevista.	Exemplos de resultados possíveis para o acontecimento, alterados durante a entrevista.
Impossível:	Uma bola azul desaparecer.	Tirar uma bola roxa.
Possível:	Que saia uma bola vermelha.	Você tirar uma bola azul.
Pode ser:	Que a caixa seja retirada do lugar.	Que eu tire uma bola verde. Não vermelha, porque verde seria 45%.
Bastante provável:	Que a caixa não saia do lugar.	Que saia uma bola vermelha novamente.
Espera-se:	Que as bolas saiam da caixa.	Uma bola azul.
Sem dúvida:	Que a caixa saia dali.	A vermelha, devido ao número, ela tem mais chances.

continuação

Acontecimento	Exemplos de resultados possíveis para o acontecimento, antes da entrevista.	Exemplos de resultados possíveis para o acontecimento, alterados durante a entrevista.
Sem dúvida:	Que a caixa saia dali.	A vermelha, devido ao número, ela tem mais chances.
Há alguma possibilidade:	De que alguém só deixe bolas vermelhas na caixa.	De sair uma bola azul.
Há alguma probabilidade:	De que o aluno não tenha respondido anteriormente esta questão.	De sair uma bola verde.
Certo:	Que as bolas saiam da caixa.	A bola vermelha.
Seguro:	Que alguém pegue uma bola vermelha.	A bola vermelha.

A análise dos registros escritos dos alunos possibilitou que percebêssemos equívocos de linguagem promovidos pelos enunciados das tarefas, porém, sua constatação só foi possível por meio da comunicação oral e escrita (cartas) estabelecida entre professora-pesquisadora e alunos, no desenvolvimento das tarefas e no momento da entrevista. As situações equivocadas apresentadas neste trecho indicam o quanto a produção de enunciados de tarefa é complexa e que, no cotidiano de sala de aula, tais fatos também podem ocasionar avaliações duvidosas a respeito do conhecimento do aluno.

5.4 Considerações sobre o capítulo

Ficou claro, diante do exposto neste capítulo, que o processo de comunicação – oral e escrita - estabelecido entre professora-pesquisadora e alunos, por meio das tarefas propostas, não só possibilitou que os alunos refletissem sobre o vocabulário estocástico e se apropriassem de tal vocabulário, mas também que esse processo favorecesse a apresentação de ideias espontâneas dos alunos a respeito das questões probabilísticas. A metodologia utilizada possibilitou que os alunos estabelecessem relações entre as situações probabilísticas propostas e situações cotidianas, que expressassem ideias probabilísticas coerentes e adequadas às tarefas propostas. Assim, a importância de práticas de leitura e escrita nas aulas de matemática foi destacada, uma vez que elas favoreceram tais possibilidades, e alguns equívocos relacionados à linguagem probabilística fizeram-se presentes na análise. Dentre eles, destaca-se a interpretação dos termos “possibilidade” e “probabilidade” como se fossem sinônimos.

No próximo capítulo, apresentaremos o movimento do pensamento probabilístico dos alunos.

Capítulo VI

O movimento das ideias probabilísticas apresentadas pelos alunos

Neste capítulo propomo-nos a apresentar, individualmente, as concepções probabilísticas apresentadas pelos quatro alunos descritos no capítulo 4: Humberto, Júlio, Júlia e Maicon. Para tal, revisamos os dados coletados; os registros escritos, as transcrições de vídeo dos momentos de socialização e as anotações do diário de campo da professora-pesquisadora, nos grupos em que esses alunos faziam parte na primeira fase da pesquisa. A isso, incorporamos os registros escritos e as entrevistas realizadas individualmente, com os respectivos alunos, na segunda fase da pesquisa e realizamos uma análise das concepções probabilísticas, levando em conta os pressupostos teóricos apresentados nos primeiros capítulos e nossas considerações a partir do apresentado.

Ao realizarmos a revisão, sentimos a necessidade de reunir algumas tarefas, de acordo com o contexto que as envolviam, para uma compreensão mais detalhada das ideias dos alunos, tendo em vista que não estão acostumados com este tipo de trabalho e de registro em sala de aula, mesmo porque, em alguns momentos, eles os fizeram de forma concisa. Nesta revisão, como mencionamos no capítulo 4, constatamos que as tarefas favorecem a interpretação por

determinados conceitos estocásticos, o que possibilitou que observássemos se as concepções probabilísticas dos alunos são modificadas em diferentes situações e quais as situações que influenciam essas alterações. Apontaremos, no item a seguir, as concepções apresentadas pelo aluno Humberto.

6.1 O movimento das concepções probabilísticas de Humberto

Humberto pertencia, na primeira fase, a um grupo de quatro alunos formado por duas meninas e dois meninos. O aluno destacou-se, perante os colegas de grupo e de classe, por suas argumentações durante a realização das tarefas, pois, quando não concordava com as considerações feitas por eles, expunha espontaneamente suas ideias. Tal fato nos conduziu a selecioná-lo para realizar a segunda fase.

Como já foi mencionado, na segunda fase da pesquisa foram realizadas individualmente sete tarefas, com quatro alunos. Depois dessa etapa, foram realizadas entrevistas reflexivas, nas quais os alunos foram confrontados com respostas dadas por eles na primeira fase da pesquisa; também lhes foi dada a oportunidade de refletir e explicar suas respostas e suas ideias.

Na sequência apresentaremos as concepções probabilísticas de Humberto e seu grupo, nas respectivas fases da pesquisa.

6.1.1 As concepções probabilísticas apresentadas por Humberto e seu grupo na primeira fase da pesquisa

Nas primeiras tarefas, que visavam à reflexão e à apropriação da linguagem, observamos que o grupo de que o aluno fazia parte utilizava justificativas qualitativas do tipo pessoal e raciocínio baseado no reconhecimento das situações de incerteza, mas não se aprofundavam em suas explicações, como mostra o trecho a seguir:

Tarefa 1

Leia as quatro frases da primeira coluna e as relacione com a segunda coluna:

- | | |
|---------------------------|--------------------|
| (1) Não pode ocorrer | (A) muito provável |
| (2) Não ocorre muito | (B) Improvável |
| (3) Ocorre com frequência | (C) Provável |
| (4) Ocorre quase sempre | (D) Pouco provável |

não pode ocorrer Improvável
não ocorre muito Pouco provável
Ocorre com frequência Provável
Ocorre quase sempre ^{muito} pouco provável

Nas demais tarefas relacionadas ao vocabulário probabilístico, o grupo estabeleceu relações entre a linguagem estocástica e a previsão meteorológica do tempo de forma coerente; entre as justificativas verificamos que esses alunos se basearam na frequência dos fenômenos climáticos observados na cidade onde residem, levando em conta as diferentes estações do ano e o aquecimento global, fatores que eles admitiram que poderiam interferir em tais previsões. Aliado a isso, acrescentaram os valores quantificadores pessoais que são atribuídos implicitamente ao vocabulário probabilístico.

Pode ser que chova.
Há alguma probabilidade que o dia seja ensolarado.
É possível que o céu esteja nublado.
É bastante provável a temperatura esteja acima de zero.
É impossível que caia neve nos telhados.
É impossível que a temperatura mínima seja 10 graus abaixo de zero.
Há alguma possibilidade que a temperatura máxima passe dos 30 graus.
É possível que haja um ligeiro vento.

Dessa forma, observamos que as explicações conceituais subjetivistas e frequenciais estão presentes em suas concepções, além de decisões apoiadas no modelo laplaciano, cujas relações estabelecidas indicam a ideia de equiprobabilidade entre os possíveis acontecimentos. Em tais justificativas evidencia-se a apresentação da concepção conceitual “probabilística emergente”.

Das tarefas 4 a 9, cuja ênfase estava na análise das possibilidades de situações combinatórias simples, verificamos, pelos registros escritos, que os alunos apresentaram raciocínio combinatório correto, porém incompleto.

Tarefa 4

Para ganhar o campeonato mundial de Fórmula 1, o piloto Rubens Barrichelo precisou obter 10 pontos em apenas duas corridas. Quais são os resultados possíveis que lhe garantem o campeonato? Use a tabela de pontos abaixo.

Classificação	Pontos
1 ^a	9
2 ^a	6
3 ^a	4
4 ^a	3
5 ^a	2
6 ^a	1

R: 1^o e 6, 2^o e 3^o, 1^o e 2^o, 1^o e 5^o, 1^o e 3^o, 1^o e 4^o,
 1 1 1 1 1 1
 10 10 15 11 13 12

Em apenas uma das tarefas, em que havia no total cinco possibilidades, o grupo determinou todas as combinações; nas demais, os alunos registraram apenas parte delas, porém não apresentaram suas ideias de forma organizada, nem mesmo as conferiram pensando certa sequência.

Tarefa 5

Para chegar as finais do campeonato brasileiro de futebol, basta ao Corinthians obter 4 pontos nas 3 partidas que tem pela frente contra o Grêmio, o Vasco e o Cruzeiro. Sabendo que a vitória vale 3 pontos, o empate 2 pontos e que a derrota vale 0 ponto:

- a) liste os casos em que o Corinthians vai para as finais.

1 Vitória	2 Empate	3 Vitória
2 Empate	Derrota	Empate
3 Vitória	Vitória	Empate

- b) liste os casos em que o Corinthians é desclassificado.

Verificamos, no decorrer das tarefas, que os alunos que apresentavam tal organização determinavam o número total de possibilidades ou aproximavam-se dele. Não defendemos o ensino de técnicas de organização em situações como essas, mas apontamos que esse modo de apresentar os dados pode exprimir um avanço no raciocínio combinatório.

Tarefa 8

De quantas maneiras diferentes dá para obter 1000 adicionando dois números naturais? Será que é preciso escrever todas as maneiras? Por quê?

$$\begin{array}{r}
 999 + 1 = 1000 \\
 500 + 500 = 1000 \\
 700 + 300 = 1000 \\
 600 + 400 = 1000 \\
 998 + 2 = 1000 \\
 980 + 20 = 1000 \\
 970 + 30 = 1000 \\
 950 + 50 = 1000 \\
 940 + 60 = 1000 \\
 900 + 100 = 1000 \\
 400 + 600 = 1000 \\
 700 + 300 = 1000
 \end{array}$$

Não! Porque daria muitas maneiras!

Tarefa 9

Levando em conta os registros realizados e a justificativa dada pelo grupo na tarefa 8, sobre as diferentes maneiras de obter 1000 adicionando dois números naturais e a necessidade de realizar o respectivo registro, a resposta do aluno, mesmo pouco profunda — observamos em sua explicação: “Não! Porque daria muitas maneiras” —, revela o reconhecimento de um número elevado de combinações. Assim, podemos entender que nestas tarefas o aluno apresenta, no aspecto quantificador, a concepção “probabilística emergente”, pois apresenta raciocínio

combinatório correto e o conhecimento de que o número de possibilidades varia de acordo com as situações, e que em casos mais amplos fica difícil escrever todas as possibilidades.

As tarefas 12 e 13, a seguir, contemplavam a medida de chance. Nelas observaram-se equívocos relacionados à compreensão do espaço amostral.

Tarefa 12 – Fichas no saco

Vou colocar uma ficha azul e uma amarela em um saco e pedir para você tirar uma sem olhar. Qual você pensa que seja mais provável sair?

a) a azul
b) a amarela
☒ ambas têm a mesma possibilidade
d) não sei

Por quê? ambas tem as mesmas possibilidades, pois pode sair tanto azul como amarela.

Tarefa 13

E se eu colocar duas fichas azuis dentro do saco e uma amarela; qual é a mais provável que saia?

a) a azul
b) a amarela
☒ ambas têm a mesma chance
d) não sei

Por quê? Pois a azul tem 2, mais pode ser que a amarela saia, porque não importa a quantidade de fichas.

Nas tarefas 12 e 13, observamos que o grupo de alunos apresenta uma concepção equivocada de espaço amostral, ou seja, na tarefa 12 eles responderam e justificaram sua resposta “corretamente”, assumindo a equiprobabilidade dos acontecimentos elementares do espaço amostral; no entanto, na tarefa 13 responderam da mesma forma, afirmando em sua justificativa que, independentemente do número de fichas, as chances são as mesmas. Ao admitirem que as chances sejam iguais, os alunos baseiam-se na amostra e concedem equivocadamente como espaço amostral as cores azul e amarelo, atribuindo, a cada uma delas, 50% de chances de ser sorteada. Situação semelhante ocorreu nas pesquisas de Rubel (2006), o qual sugere que o professor examine a variedade de respostas dadas pelos alunos, pois, para o autor, respostas corretas não significam necessariamente um raciocínio matemático correto; neste caso específico, um raciocínio probabilístico normativo. Rubel (2006) também nos aconselha a analisar as

justificativas dadas pelos alunos em suas respostas, pois podem trazer indícios de eventuais equívocos ou, mesmo, revelar métodos de solução alternativa.

Diante do exposto, evidenciamos, nas respostas e justificativas apresentadas por Humberto e seu grupo, no conjunto de tarefas propostas, de 10 a 14, que envolvem o mesmo contexto, o uso concepção conceitual “probabilística intuitiva”, uma vez que empregam valores qualitativos pessoais, respostas baseadas na transferência de estabilidade frequencial da amostra e decisões apoiadas em explicações baseadas no modelo laplaciano.

Transcrevemos, na tabela a seguir, o tabuleiro organizado pelos respectivos alunos no jogo “A travessia do rio”. A letra “o” representa as fichas já dispostas no tabuleiro e a letra “x”, as fichas acrescentadas pelo grupo de Humberto.

Tabela 5 – Tabuleiros da tarefa 17 do grupo de Humberto.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1ª etapa	o	o	oo				oo	oo		o	o	oo
2ª etapa		o	oo	o	x	o	o	x	x	o	o	o
3ª etapa			xx	o	o	oo	o	x	o	xx	x	
4ª etapa			x	x	xx	xx	x	x	x	xx	x	

Humberto e seu grupo só no momento posterior, quando terminaram a jogada, perceberam, por meio dos colegas de classe, que o número 1 não tinha possibilidade de sair. Observamos que, na segunda etapa, as fichas ficaram distribuídas entre os números 3 e 12, pois os alunos colocaram as fichas de que dispunham em números que ainda não possuíam fichas: 5, 8 e 9. Na terceira etapa, as fichas ficaram distribuídas entre os números 3 e 11, e novamente os alunos acrescentaram fichas em números que ainda não as possuíam. Todas as fichas da quarta etapa foram colocadas pelos alunos, que novamente não acrescentaram fichas nos números 1, 2 e 3. Dessa vez, colocaram duas fichas nos números 4, 6 e 10. Com exceção da primeira etapa, em todas as outras a equipe vencedora foi a de Humberto.

Esses dados nos mostram que os alunos se baseiam na observação da estabilidade frequencial dos resultados nas etapas anteriores para dispor suas fichas no tabuleiro em outras jogadas. Tal ideia remete às características da noção conceitual de frequência, ou seja, o conceito frequentista, ou empírico, em que as chances de determinado evento são analisadas a partir de resultados de experiências realizadas.

No registro escrito da tarefa 18, anterior à etapa das cartas, o grupo de Humberto escreveu que o jogo era justo, porque as duas equipes tinham as mesmas possibilidades e chances iguais, pois não tinham fichas no número 1. Essas afirmações indicam que esses alunos sabem quais são os resultados possíveis e impossíveis e possuem o raciocínio combinatório, porém admitem que todos os sucessos possíveis são equiprováveis, possuem as mesmas chances, o que é um equívoco.

A professora-pesquisadora, na carta que escreveu a esses alunos, questionou-os sobre tais afirmações:

Queridos alunos...

Tudo bem com vocês? Estou com saudades!

Escrevi esta carta, pois fiquei intrigada com algumas coisas que registraram nas tarefas que realizaram nos últimos dias.

Na reflexão 2 vocês escreveram que o jogo é justo porque as duas equipes têm as mesmas possibilidades, porque não tinham nenhuma ficha (bolinha) no nº 1. Será que basta não ter fichas neste número para o jogo ser justo?

Por que as duas equipes têm as mesmas possibilidades?

Gostaria que me escrevessem sobre isso.

Aguardo ansiosa a carta de vocês.

Beijos

Prof^a Jaqueline

Os alunos responderam da seguinte forma:

Querida Professora Jaqueline

Estamos com Saudades. Bom a sua carta e refletimos bastante sobre o assunto, mudamos nessa maneira de pensar, que é a seguinte:

1- vocês acham esse jogo justo? Por quê?

Sim, porque é questão de sorte, pode cair igual, tanto para a vermelha quanto para a azul.

Não, pois as vermelhas estão muito agrupadas e as azuis soltas, então, a azul tem mais chances de sair.

2- Qual tem mais chance de ganhar?

Eles tem quase as mesmas chances, mas a azul tem mais.

Essas são nossas respostas, nessa nova forma de pensar.

Na carta, Humberto e seus amigos consideram que há dois fatores relevantes em relação ao resultado do jogo: a sorte e a distribuição das fichas. No primeiro caso, os alunos assumem explicitamente, na carta, que é justo, porque depende da sorte. Essa interpretação intuitiva da probabilidade em situações de jogo é muito comum, uma vez que o aluno não está apenas refletindo sobre o aleatório, mas também o vivencia. Um segundo fator seria o de distribuição das fichas: Humberto e seus colegas acreditam ser mais fácil ter resultados diferentes do que os mesmos várias vezes seguidas. Neste caso, baseiam-se em sua própria percepção de frequência relativa. Shaughnessy (1992) caracteriza esse tipo de julgamento como disponibilidade heurística, situação em que as pessoas estimam a probabilidade de eventos com base em observações realizadas por elas em instâncias particulares. Essas informações caracterizam que Humberto e seu grupo, neste contexto conceitual, apresentam a concepção probabilística intuitiva.

Apresentaremos, no próximo item, a análise que realizamos na segunda fase da pesquisa, em que Humberto trabalhou individualmente.

6.1.2 As concepções probabilísticas apresentadas por Humberto na segunda fase da pesquisa

Verificamos que Humberto, na primeira tarefa, atribuiu termos probabilísticos que expressavam graus de probabilidade não atribuídos comumente aos acontecimentos previstos na situação proposta.

1) Roda-se uma tómbola de jogo com números de 1 a 90. Considerando os resultados possíveis deste jogo, classifique, com uma das palavras da lista abaixo, cada um dos acontecimentos seguintes:

Impossível - Pode ser – Possível - Bastante provável – Certo - Se espera que – Seguro -
Há alguma possibilidade - Há alguma probabilidade – Incerto

A photograph of a piece of paper with five handwritten responses to probability questions. The questions are labeled a through e. The responses are written in cursive ink.

- a. Sair um número ímpar: *Há alguma possibilidade*
- b. Sair um número menor do que 91: *Possível*
- c. Sair o número 100: *impossível*
- d. Sair um número maior do que 0: *Possível*
- e. Sair o número 31: *Há alguma probabilidade*

Durante a entrevista, com o objetivo de que o aluno refletisse sobre seus equívocos, a professora-pesquisadora propôs que ele estabelecesse relações entre as considerações feitas em tarefas anteriores com a que estava sendo discutida. Dessa forma, ela pediu para o aluno que atribuisse um valor percentual às palavras organizadas na lista, de acordo com a confiança que elas expressavam, como feito anteriormente na tarefa 3. Assim, na entrevista, a professora-pesquisadora propôs, com seus questionamentos, que o aluno estabelecesse a analogia entre a probabilidade numérica atribuída por ele aos termos probabilísticos e os acontecimentos do jogo:

Prof^a: *Você acha que há alguma possibilidade de sair um número ímpar?*
Humberto: *Sim.*
Prof^a: *É possível; você colocou 30%. Você acha que as chances de sair uma bola menor que 91 neste jogo é de 30%?*
Humberto: *Eu coloquei porque tem o número 90 nas bolas.*
Prof^a: *Quais seriam os números menores que 91?*
Humberto: *90, 89, 88, 87, 86. Agora, pensando em porcentagem, o possível não seria 30%, seria mais. Talvez eu devesse mudar a palavra para há alguma probabilidade. Eu acho que ficaria mais certo.*
Prof^a: *Você colocou que é possível que saia o número zero neste jogo. Isso quer dizer pode sair um número menor que zero?*
Humberto: *Eu poderia mudar, para pode ser, porque é 45% de chance.*
Prof^a: *Se há 45% de chance de sair, há 55% de não sair. Se não sair o número 0, que número vai sair?*
Humberto: *Nenhum. Está errado na **b** e na **d**. Nas duas eu errei, poderia colocar seguro ou certo, porque não tem menor que zero e nem maior que 91.*
Prof^a: *Por que você acha que há alguma probabilidade de sair o número 31?*
Humberto: *Eu coloquei que é mais ou menos 50%.*
Prof^a: *Quantas bolas tem na tômbola?*
Humberto: *90.*
Prof^a: *Quantas bolas com o número 31?*
Humberto: *Uma.*
Prof^a: *As chances de eu tirar uma dentre 90 é de 50%?*
Humberto: *Puts, está errado, só tem uma bola, seria incerto, porque é difícil sair.*

A intervenção da professora-pesquisadora com a entrevista possibilitou que o aluno refletisse não só sobre o significado das palavras, mas sobre a medida probabilística que essas palavras expressam implicitamente. De forma semelhante, ocorreram reflexões e alterações na segunda tarefa desta fase, o que nos leva a intuir que a concepção “não probabilística” apresentada pelo aluno a princípio, no registro escrito destas tarefas, foi alterada, passando a expressar a concepção “probabilística intuitiva”.

Na tarefa 3, nos itens a e b, em que o aluno analisa as chances de bolas vermelhas e verdes serem retiradas dos recipientes, Humberto afirma que as bolas cujas cores estão em maior quantidade têm mais chances de serem retiradas, porém enfatiza que as outras bolas, em menor quantidade, também têm chances. O item “c” desta tarefa foi retomado pela professora-pesquisadora na entrevista, pois a justificativa dada pelo aluno em seu registro escrito não apresentava suas ideias de forma clara:

Prof^a: *As possibilidades de retirar bolas vermelhas e verdes eram iguais em todos os recipientes?*

Humberto: Não, alguns têm menos verdes e mais vermelhas, outras mais verdes e menos vermelhas.

Prof^a: Você poderia me dizer quais as possibilidades das cores em cada recipiente?

Humberto: No recipiente 1, as chances são iguais. No 2, as bolas verdes têm mais chances, pois elas têm duas bolas. No 3, as vermelhas têm mais chances, porque tem duas. No 4, são iguais, porque tem duas bolas de cada cor.

Prof^a: Você colocou que é mais fácil retirar uma bola do recipiente 1 porque as possibilidades são iguais. Pode me explicar?

Humberto: Porque no 2 a vermelha não tem tanta chance, a verde é mais ou menos 80% e a vermelha 20%.

Observamos, nesta tarefa, que Humberto reconhece a existência das diferentes possibilidades do evento e que em suas respostas prevalece o raciocínio aditivo e um ensaio de raciocínio proporcional. Dessa forma, a concepção “probabilística intuitiva”, no aspecto quantificador, é evidenciada.

Humberto tem utilizado a linguagem probabilística com frequência, tanto quando explica oralmente suas ideias como em suas respostas e justificativas escritas. Na tarefa 4, estimou a probabilidade de resultados obtidos com a soma dos números sorteados em dois dados, por meio de vocabulário probabilístico, como mostra o quadro a seguir:

Quadro 17 – Justificativas de Humberto na tarefa 4

Acontecimento apresentado na tarefa	Probabilidade estimada por Humberto
Um número par?	Possível
Um número ímpar?	Possível
O número 1?	Há alguma possibilidade

Sua resposta em relação à probabilidade de obter o número 1 somando os números sorteados em dois dados e sua justificativa confusa na tarefa 5 — que questionava se era possível saber qual o resultado de maior probabilidade na tarefa 4 — foram objeto de discussão no momento da entrevista com Humberto:

Prof^a: Por que é possível tirar um número par?

Humberto: Você não tem certeza, pode sair par ou ímpar ou outro diferente.

Prof^a: Tem número diferente de par ou ímpar?

Humberto: Não, não tem. Os dois são possíveis de sair. Eu acho que errei porque o número 1 ele se encaixa na resposta dos dois anteriores.[O aluno se

referia aos itens par e ímpar, queria dizer que também poderia ter colocado possível para o 1].

Prof^a: *Que números você somou para dar o número 1?*

Humberto: *Não entendi.*

Prof^a: *Quais os números que você soma nos dois dados para que o resultado seja 1?*

Humberto: *Não tem como, a menos que tivesse um dado.*

Prof^a: *Quais são os resultados que você se refere quando diz que “todos têm uma possibilidade de sair”?*

Humberto: *Não, as chances de par e ímpar são iguais, mas o 1 não tem chance. Pensei em um dado só, se retirar um dará certo.*

Percebemos, por meio das entrevistas, que Humberto se expressa bem oralmente, esclarece e revê suas ideias, faz as alterações que julga necessárias e apresenta justificativas para essas alterações. Os termos probabilísticos e as justificativas utilizadas pelo aluno, nas tarefas 4 e 5, apoiam-se em critérios de equiprobabilidade e subjetividade, o que nos mostra que a hipótese conceitual “probabilística intuitiva” foi apresentada pelo aluno.

A resposta equivocada apresentada por Humberto na tarefa 6, mais uma vez, foi esclarecida no momento da entrevista, assim que a professora-pesquisadora leu a tarefa para o aluno:

6) Uma classe tem 19 alunos. Há 11 meninas e 8 meninos. Se você escrever o nome de cada um dos alunos em um papel, colocá-los num saco e retirar um nome ao acaso, o que considera que seja mais provável? Assinale, dentre as alternativas abaixo, a que esteja de acordo com seu pensamento.

a) que o nome seja de um menino.

☒ b) que o nome seja de uma menina.

c) a probabilidade de o nome ser de um menino é a mesma do nome ser de uma menina.

d) não sei responder.

Por quê? Pela quantidade de meninas, classe

Humberto: *Eu acho que não seria uma menina, devido à quantidade. Não prestei atenção também. Pensei em meninos 11 e meninas 8.*

Neste momento da entrevista, em que se estabeleceu um diálogo entre a professora-pesquisadora e o aluno a respeito das suas respostas e das ideias equivocadas apresentadas em seu registro escrito, evidencia-se que o processo de comunicação ajuda o aluno a explicar e a refletir sobre o seu próprio pensamento; e que a avaliação escrita é pouco eficaz para revelar o conhecimento do aluno. Assim, após a entrevista, o aluno apresenta uma “visão normativa” para responder e justificar sua resposta, uma vez que, ao rever suas ideias, o aluno opta pela “resposta adequada” e a justifica, levando em conta que, por haver um número maior de meninas, elas têm mais chances de serem sorteadas que os meninos.

No jogo “Corrida de cavalos”, Humberto apostou nos números 7, 10 e 12 e justificou sua aposta, dizendo que apostou no 7, porque acredita que este tem mais chances que os números que estão do seu lado; no 10, porque é fácil de sair; e disse quais eram as combinações para formar o número 10; e no 12, porque tem uma chance. A resposta e a justificativa de Humberto evidenciam, mais uma vez, a presença da concepção “probabilística intuitiva”, pois, mesmo apresentando explicações relacionadas ao raciocínio combinatório, notamos que também se apoia na leitura frequencial de experiências anteriores e em valores qualitativos pessoais, sem critérios objetivos em sua explicação. Vale lembrar que o número 10 é um número bastante utilizado em situações cotidianas, como o cálculo mental, nas situações de agrupamentos em 10.

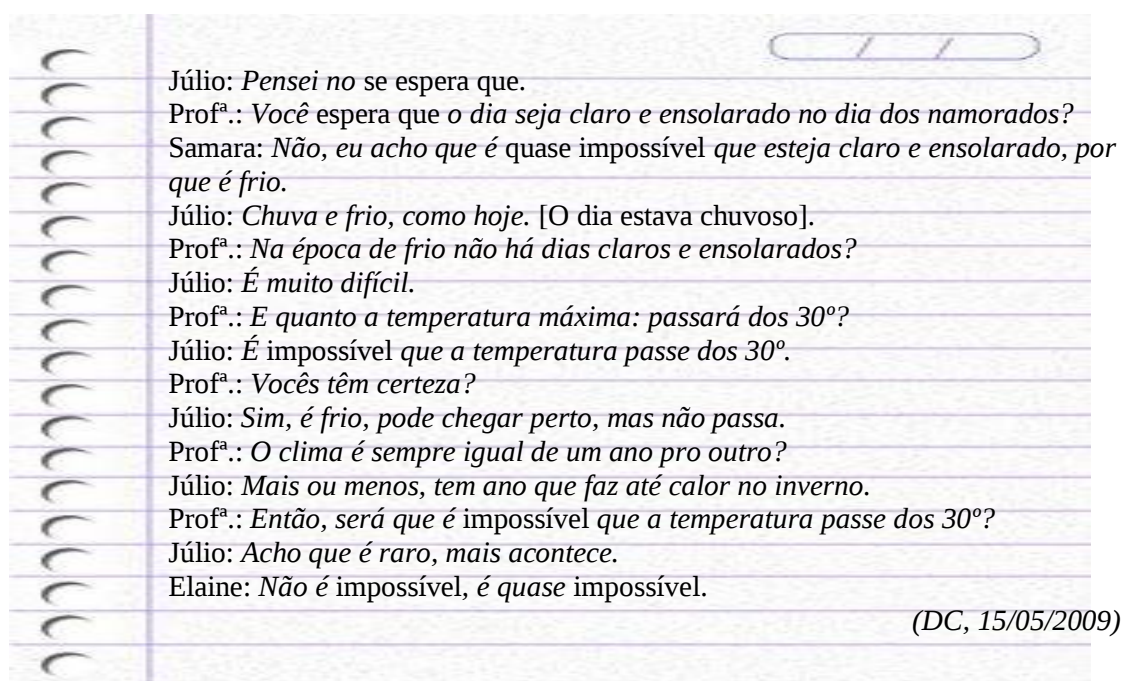
Em resumo, podemos constatar que a concepção intuitiva prevaleceu nas ideias apresentadas por Humberto; no entanto, houve um movimento entre suas ideias, que ora eram estimuladas pela tarefa proposta, ora pela intervenção da professora-pesquisadora. Na análise ficou claro que o aspecto probabilístico conceitual é mais forte que o aspecto probabilístico quantificador, o que pode ser decorrente de dois fatores: o primeiro, relacionado às tarefas que contemplam mais a estimativa de probabilidades por meio de vocabulário estocástico; e o segundo, derivado da não instrução escolar a respeito do cálculo de estimativas numéricas das probabilidades.

6.2 O movimento das concepções probabilísticas apresentadas por Júlio

Júlio, na primeira fase da pesquisa, tinha uma menina e dois meninos como colegas de grupo. Sua ansiedade e sua objetividade na resolução das tarefas foram alguns dos motivos que nos conduziram a realizar uma análise de suas ideias, que serão apresentadas primeiramente em conjunto com seu grupo e, na sequência, individualmente.

6.2.1 As concepções probabilísticas apresentadas por Júlio e seu grupo na primeira fase da pesquisa

Nas tarefas relacionadas à linguagem estocástica, as três primeiras, observamos que Júlio e seus colegas utilizaram o raciocínio baseado no reconhecimento da incerteza dos sucessos. A transferência, para a resolução da tarefa, de conhecimento sobre a estabilidade frequencial de características climáticas observadas na região em que moram também fez parte de suas explicações à professora-pesquisadora na tarefa 3. Inicialmente estavam tentando relacionar a previsão sobre o “dia claro e ensolarado”:



De acordo com as características dos dados apresentados por Júlio e seus colegas nas tarefas mencionadas, a concepção “probabilística intuitiva” é evidenciada, tendo em vista que suas explicações apoiavam-se em valores quantitativos pessoais atribuídos a termos probabilísticos.

No conjunto de tarefas relacionadas à análise das possibilidades, Júlio foi quem organizou o registro das possibilidades de seu grupo e os fez de diferentes maneiras: por meio de tabela, de forma sequencial e com a sequência inversa:

Tarefa 4

Para ganhar o campeonato mundial de Fórmula 1, o piloto Rubens Barrichelo precisou obter 10 pontos em apenas duas corridas. Quais são os resultados possíveis que lhe garantem o campeonato? Use a tabela de pontos abaixo.

Classificação	Pontos
1ª	9
2ª	6
3ª	4
4ª	3
5ª	2
6ª	1

Primeira Corrida

1ª 9
1ª 9
1ª 9
1ª 9
1ª 9
1ª 9
2ª 6
2ª 6

Segunda Corrida

1ª 9
2ª 6
3ª 4
4ª 3
5ª 2
6ª 1
2ª 6
3ª 4

Tarefa 5

Para chegar as finais do campeonato brasileiro de futebol, basta ao Corinthians obter 4 pontos nas 3 partidas que tem pela frente contra o Grêmio, o Vasco e o Cruzeiro. Sabendo que a vitória vale 3 pontos, o empate 2 pontos e que a derrota vale 0 ponto:

a) liste os casos em que o Corinthians vai para as finais.

1º 3 pontos 1º 3 pontos 1º 3 pontos 1º 2 pontos 1º 2 pontos 1º 3 pontos
2º 3 1 2º 3 1 2º 2 1 2º 2 1 2º 2 1 2º 3 1
3º 3 1 3º 2 1 3º 2 1 3º 2 1 3º 0 1 3º 0 1

b) liste os casos em que o Corinthians é desclassificado.

1º 2 pontos 1º 3 pontos 1º 0 pontos
2º 0 1 2º 0 1 2º 0 1
3º 0 1 3º 0 1 3º 0 1

Tarefa 6

Existem 5 maneiras diferentes de obter o número 4 adicionando dois números naturais. Quais são elas?

$0 + 4 = 4$
 $2 + 2 = 4$
 $3 + 1 = 4$
 $4 + 0 = 4$
 $1 + 3 = 4$

Tarefa 7

De quantas maneiras diferentes dá para obter o número 10 adicionando dois números naturais?
Escreva essas maneiras.

$$\begin{array}{ll} 5+5=10 & 9+1=10 \\ 6+4=10 & 4+6=10 \\ 7+3=10 & 3+7=10 \\ 8+2=10 & 2+8=10 \\ 10+0=10 & 0+10=10 \end{array}$$

Os registros realizados por Júlio indicam que ele possui certa habilidade para realizar composições combinatórias e, na maioria das vezes, consegue determinar todas as possibilidades da tarefa proposta. Suas afirmações no momento da socialização da tarefa 5, após a professora-pesquisadora e os alunos terem registrado coletivamente as possibilidades de o Corinthians ser classificado e desclassificado na lousa, indicaram também que Júlio possui raciocínio proporcional:

Prof^a.: *Será que colocamos todas as possibilidades?*

Júlio: *Sim.*

Prof^a.: *Quantas são as possibilidades do time ser desclassificado?*

Classe: *Três.*

Prof^a.: *E de ele ser classificado?*

Classe: *Sete.*

Prof^a.: *O que é mais provável que aconteça?*

Elaine: *Que ele seja classificado.*

Prof^a.: *Por quê?*

Elaine: *Ele tem mais chance.*

Prof^a.: *Tem como medir essas chances.*

Rodrigo: *Dez.*

Prof^a.: *Dez, o quê?*

Júlio: *Não, ele tem sete chances em 10.*

Prof^a.: *E como represento sete dentre dez?*

Júlio: *Sete décimos.*

Prof^a.: *Tem outra forma.*

Júlio: *70%.*

Prof^a.: *E qual a probabilidade do time ser desclassificado?*

Júlio: *30% ou três décimos.*

Observamos, nos dados acima, que Júlio apresenta uma compreensão da relação dos modelos operativos matemáticos com as situações aleatórias propostas nas respectivas tarefas;

que o raciocínio combinatório e o proporcional estão presentes em suas respostas e justificativas nestas e em outras tarefas semelhantes, podendo sua concepção ser interpretada como “probabilística normativa”, pois seus argumentos conformam-se ao modelo normativo do contexto.

Júlio e seu grupo, de forma semelhante a Humberto e sua equipe, nas tarefas relacionadas à estimativa de probabilidades, em situações equiprováveis, utilizam a estratégia normativa, que leva à solução formalmente adequada. Suas explicações consideram a simetria do espaço amostral.

Tarefa 13

E se eu colocar duas fichas azuis dentro do saco e uma amarela; qual é a mais provável que saia?

a) a azul
b) a amarela
☒ ambas têm a mesma chance
d) não sei

Por quê? Porque todas têm as mesmas chances, mesmas possibilidades

No entanto, nas tarefas em que não há simetria no espaço amostral, suas respostas e explicações permanecem as mesmas aplicadas às que apresentam simetria. Tal fato representa um equívoco em relação ao espaço amostral, ou seja, o grupo considera as características físicas dos eventos ao definir o espaço amostral, ao invés das reais possibilidades.

As visões “normativa” e “equivocada” apresentadas nas tarefas relacionadas à medida de chances evidenciam que, em seu raciocínio, o uso de juízos heurísticos alternados em situações semelhantes relacionadas à incerteza caracteriza a presença da concepção “probabilística intuitiva” nessas tarefas.

Assim que iniciaram o jogo “A travessia do rio”, Júlio e seu parceiro de equipe perceberam que o número 1 não teria possibilidade de sair com dois dados. A equipe adversária era quem possuía fichas neste número. O tabuleiro de cada etapa ficou organizado da seguinte maneira:

Tabela 6 – Tabuleiros da tarefa 17 do grupo de Júlio.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1ª etapa			o	oo	o	oo	ooo	o	o		o	
2ª etapa			o	o	x	oo	oo	o	o	x	o	x
3ª etapa			oo	o	x	ox	xx	x	o	x	o	
4ª etapa				xx	xx	xx	xx	xx	x	x		

Verificamos que Júlio e seu colega, na segunda etapa, dispõem suas fichas em números que não as possuem. Na terceira etapa, além de acrescentar fichas em números que não as possuíam, colocam duas nos números 6 e 7. Na quarta etapa, momento em que os alunos têm a liberdade para dispor todas as suas fichas, esses alunos organizaram o tabuleiro colocando duas fichas nos números de 4 a 8 e uma nos números 9 e 10. Júlio e seu colega de equipe perderam apenas na terceira etapa.

De acordo com o observado, constatamos que os alunos transferiram a estabilidade frequencial do fenômeno observado, com respostas baseadas no reconhecimento da repetição do fenômeno e seus possíveis resultados. Inferimos, portanto, que eles apresentam a noção “frequencial da probabilidade”.

Nas respostas e nas justificativas dadas, Júlio e sua equipe expressam uma multiplicidade de ideias probabilísticas e uma movimentação em função das tarefas propostas e da intervenção entre alunos e professora-pesquisadora. Essa movimentação de ideias probabilísticas também é observada na segunda fase da pesquisa, apresentada a seguir, em que Júlio realiza as tarefas individualmente e estabelece um processo de comunicação mais estreito com a professora-pesquisadora, no momento da entrevista.

6.2.2 As concepções probabilísticas apresentadas por Júlio na segunda fase da pesquisa

As primeiras tarefas da segunda fase da pesquisa relacionavam a análise e a expressão das probabilidades de situações propostas. Júlio fez uso de exemplos e linguagem probabilística não presumida para a situação apresentada. A princípio, no registro escrito, Júlio atribuiu os seguintes termos aos possíveis acontecimentos do jogo de tômbola:

- Sair um número ímpar:
Pode ser.
- Sair um número menor que 91:
Possível.
- Sair o número 100:
Impossível.
- Sair um número maior do que 0:
Pode ser.
- Sair o número 31:

Certo.

Tais fatos foram alvo de diálogo na entrevista realizada pela professora-pesquisadora, que de forma semelhante à proposta ao aluno Humberto, solicitou a Júlio que atribuisse porcentagens, de acordo com a confiança que depositava nos termos probabilísticos listados na tarefa proposta. Assim se conduziu o diálogo:

Prof^a: *Você usou o pode ser para sair um número ímpar, isto significa que tem 50% de chance de sair um número ímpar?*

Júlio: *É! Porque é do 1 aos 90, o número de ímpares e pares são iguais. Se fosse do 0 aos 90 não.*

Prof^a: *Por quê?*

Júlio: *Tem o zero, um número par, então teria um a mais.*

Prof^a: *Você usou o possível para os números menores que 91, de acordo com a probabilidade que colocou, isso significa que as chances de sair um número menor que 91 é de 50%. Então a probabilidade de sair um número maior que 91 é de 50% também?*

Júlio: *Não são 50%. Eu coloquei isso porque pensei no zero. Eu deveria colocar seguro.*

Prof^a: *Vamos pensar nas possibilidades, quais os possíveis resultados deste jogo?*

Júlio: *Os números de 1 a 90. Então é seguro, a questão **b** e **d**, pois são iguais, seguro. Errei os itens **d** e **e** também, porque eu não tinha pensado. O **c** está correto.*

Prof^a: *E como seria o item **d**?*

Júlio: *Seguro. O **e** eu errei também, é possível.*

Prof^a: *Para você o possível significa 50% de chances, então você tem 50% de chances de tirar uma pedra dentre 90?*

Júlio: *Não acho que 5%, não pode ser 50% para cada bolinha, pode?*

Prof^a: *Não.*

Júlio: *Então não sei, fica difícil. [pensou um pouco] Então é uns 1,11%, não tem final [queria dizer que a divisão é uma dízima].*

Prof^a: *Como você chegou nesse número?*

Júlio: *Dividindo 90 por 100.*

Prof^a: *Que palavra da lista poderia ser usada nesta situação?*

Júlio: *Não tem palavra com 1%. Talvez o incerto.*

Prof^a: *E há alguma possibilidade?*

Júlio: *É 50%! – organizou a frase e falou em voz alta - Há alguma possibilidade de sair o nº 31. Sim!!! Mas eu coloquei os 50%!*

Prof^a: *E se você não tivesse colocado os 50% daria certo?*

Júlio: *Sim. Pode mudar?*

Prof^a: *Pode.*

A intervenção da professora-pesquisadora foi fundamental para que Júlio percebesse seus equívocos e explicasse suas ideias. As concepções probabilísticas apresentadas no momento da

entrevista assinalam para a “concepção normativa” no aspecto quantificador, tendo em vista que suas argumentações são adequadas à situação e se apoiam no modelo clássico, além do quê, são baseadas em relações quantificadoras e conceituais de proporcionalidade.

Na tarefa 3, relacionada à estimativa de chances de retirada de bolas em recipientes, as respostas de Júlio, mesmo ele não tendo se aprofundado em suas explicações, sinalizam para a visão normativa, pois apresenta habilidade de comparar e contrastar as diferentes situações aleatórias, assim como de calcular as probabilidades.

As respostas dadas por Júlio no registro escrito das tarefas 4 e 5, além da entrevista baseada nas respectivas respostas, trazem dados relevantes sobre suas ideias.

4) Qual a probabilidade, ao lançar dois dados e somar os números obtidos, de que o resultado seja:

- Um número par?
É mais provável.
- Um número ímpar?
É menos provável.
- O número 1?
É impossível.

5) Na atividade anterior é possível saber qual resultado tem maior probabilidade de sair? Justifique sua resposta.

É um número par.

Prof^a: *Porque é mais provável sair um número par ao somar os números obtidos em dois dados?*

Júlio: *Por que o 1 não vale, então tem mais par. Tem o 2, o 4, o 6, o 8, o 10 e o 12. O ímpar tem o 3, o 5, o 7, o 9 e o 11. Não, eu errei! Acho que são iguais, porque não tem o zero. [Começou a contar nos dedos o que falou no início: tem o 2, o 4, o 6, o 8, o 10 e o 12. O ímpar tem o 3, o 5, o 7, o 9 e o 11]. Está certo, o zero e o 1 não têm possibilidades. Então tem mais par.*

Prof^a: *É possível saber qual resultado tem maior probabilidade de sair?*

Júlio: *Tem mais números pares que ímpares, então são os pares, como eu expliquei antes.*

Conforme a análise de possibilidades de somas com dois dados, realizada na socialização da tarefa 17⁶⁰, notamos que há dezoito possibilidades tanto para as somas pares como para as somas ímpares, ou seja, a probabilidade de cada uma é de 50%. Com essa análise, é possível estimar a probabilidade de cada resultado e constatar que o sete é o número que obtém maior chance de ser sorteado.

Ao comparar as respostas de Júlio com as observações acima e analisar suas explicações no momento da entrevista, percebemos que há, em suas considerações, um equívoco de interpretação do espaço amostral o que poderia ser interpretado como falta de conhecimento sobre o conteúdo. Júlio assume como espaço amostral os números de 2 a 12 e considera que cada número tem a mesma probabilidade de ser sorteado, ou seja, eles são equiprováveis. Dessa forma, ignora a relação entre a frequência de cada um desses números no espaço amostral e consequentemente com as respectivas probabilidades.

No entanto, baseado em suas ideias expressas na entrevista, o aluno apresenta raciocínio combinatório e proporcional, utilizando a linguagem probabilística normativa para estimar a probabilidade dos resultados questionados, característicos da “visão normativa”; no entanto, o equívoco relacionado ao espaço amostral apresentado o conduz à concepção “probabilística emergente”.

Júlio, na tarefa 6, novamente utilizou-se de estratégia normativa ao responder a situação proposta, assinalou o item que indicava ser mais provável sortear uma menina e justificou essa opção de resposta afirmando que tem maior probabilidade. No jogo “corrida de cavalos” o aluno apostou nos números 6, 7 e 8 e justificou que dividiu sua aposta em três cavalos, pois teria mais chances de ganhar; afirmou que escolheu os respectivos números porque tinham mais possibilidades de soma e ressaltou que os números 7 e 8 têm mais possibilidades que o número 6. Percebemos, nas explicações do aluno, uma compreensão do modelo matemático para o tratamento da incerteza e de sua aplicação em situações de jogo, referências atribuídas à concepção “probabilística normativa”.

⁶⁰ Páginas 87 e 88 desta dissertação.

A análise realizada possibilitou que observássemos o movimento de concepções probabilísticas de Júlio, expressas tanto por meio de conjecturas, refutações e reconsiderações apresentadas em seus registros escritos quanto pelo processo de comunicação estabelecido na sala de aula. O aluno revela habilidade para estimar as probabilidades, seja por meio de linguagem seja por algoritmo, e utiliza o modelo explicativo adequado a cada situação, o que em várias tarefas o aproximou da concepção da “probabilidade normativa”. Contudo, apresenta ideias equivocadas — relacionadas ao espaço amostral em situações que envolvem análise combinatória — que merecem atenção.

6.3 O movimento das concepções probabilísticas de Júlia

Júlia distinguiu-se dos colegas de grupo e de classe, pelo interesse demonstrado durante a realização das tarefas e pela habilidade que apresentava no momento de sintetizar as ideias apresentadas pelos colegas. Essa foi a razão que nos motivou a incluí-la na segunda fase da pesquisa.

No próximo item exporemos as concepções probabilísticas apresentadas por Júlia e seu grupo nas tarefas propostas na primeira fase da pesquisa e, em seguida, as concepções individuais manifestadas por Júlia.

6.3.1 As concepções probabilísticas apresentadas por Júlia e seu grupo na primeira fase da pesquisa

Nas tarefas relacionadas à linguagem probabilística, Júlia e seus colegas de grupo reconhecem a incerteza de sucessos aleatórios e utilizam-se de valores qualitativos do tipo pessoal, ao relacionar ou estimar probabilidades de certos acontecimentos. No entanto, notamos, em determinadas respostas, como a da previsão do tempo para o dia dos namorados apresentada a seguir, que as estimativas pessoais apoiam-se em critérios lógicos, como a transferência de estabilidade frequencial de fenômenos da natureza observados no cotidiano; e que esses alunos estabelecem relações proporcionais à confiança que depositam nos termos probabilísticos. Dessa forma, a concepção “probabilística intuitiva” foi evidenciada nestas tarefas.

a) Você considera o jogo justo? Justifique.

Não, porque o lobo tem 2 chances de ganhar e a Chapeuzinho tem só uma.

b) Quem tem mais chances de ficar com os doces? Por quê?

O lobo, porque ele tem duas possibilidades de ganhar.

c) Então, o que é melhor? Ser a Chapeuzinho ou o Lobo Mau?

Ser o lobo mau.

Ao analisar as possibilidades do jogo, o grupo elegeu como espaço amostral: cara/cara, coroa/coroa e cara/coroa e, partindo desses dados, eles avaliaram e justificaram a equidade do jogo de forma coerente. No momento da socialização, conforme apresentado no capítulo 4, a professora-pesquisadora, por meio de uma tabela, registrou os resultados de possíveis jogadas citadas pelos alunos, organizando em duas colunas a jogada do lobo e da Chapeuzinho do Vermelho. Essa estratégia possibilitou que os alunos observassem que a inversão da ordem cara/coroa produziria outra possibilidade, que na verdade seriam quatro e não três, como as previstas pela maioria dos grupos. Com essa informação, Júlia, utilizando-se de raciocínio proporcional, estimou que a probabilidade de o lobo vencer o jogo era de 75% e a da Chapeuzinho Vermelho, 25%. Tais fatos a conduziram a uma interpretação “probabilística normativa” da tarefa proposta.

Percebemos, nas respostas dadas às tarefas de 12 a 14, que Júlia e seus colegas adotam a “estratégia normativa” para sua resolução, e suas justificativas são baseadas em relações

proporcionais, no modelo laplaciano e no reconhecimento das múltiplas possibilidades envolvidas em situações aleatórias.

Tarefa 12 – Fichas no saco

Vou colocar uma ficha azul e uma amarela em um saco e pedir para você tirar uma sem olhar. Qual você pensa que seja mais provável sair?

- a) a azul
- b) a amarela
- ☒ ambas têm a mesma possibilidade
- d) não sei

Por quê? *Tem a mesma quantidade de chances. É a sorte!*

Tarefa 13

E se eu colocar duas fichas azuis dentro do saco e uma amarela; qual é a mais provável que saia?

- ☒ a azul
- b) a amarela
- c) ambas têm a mesma chance
- d) não sei

Por quê? *Tem duas cartas azuis e uma amarela é mais provável que saia a azul.*

Tarefa 14

Tarefa 14

Com duas fichas azuis e uma amarela dentro do saco, a probabilidade de tirar uma vermelha:

- a) é certa
- b) pouco provável
- ☒ impossível
- d) não sei

Por quê? *Porque coloquei 2 cartas azuis e 1 amarela não é possível que saia uma vermelha.*

No presente contexto, Júlia e seus colegas expõem certa habilidade para interpretar as tarefas propostas e aplicar o modelo normativo adequado a cada uma delas, ou seja, apresentam a concepção “probabilística normativa”.

Na tarefa 17, do jogo “A travessia do rio”, Júlia e seus colegas de equipe organizaram os tabuleiros da seguinte maneira:

Tabela 7 – Tabuleiros da tarefa 17 do grupo de Júlia.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1ª etapa			oo	oo	o	oo	ooo	o	o		o	
2ª etapa		o	oo	o	x	o	o	x	x	o	o	o
3ª etapa				o	o	oo	ox	x	o	xx	x	x
4ª etapa			X	x	xx	x	x	x	x	x	xx	x

É possível notar que, de forma semelhante a Humberto e seu grupo, Júlia e sua colega de equipe baseiam-se na observação da estabilidade frequencial dos resultados nas etapas anteriores para dispor suas fichas no tabuleiro em outras jogadas; e optam por distribuir as fichas em mais números, ao invés de colocá-las em números com maior probabilidade de serem sorteados. Tal ideia é manifestada no registro escrito da segunda problemática da tarefa 18, relacionada ao respectivo jogo:

VERMELHO									•				
								•	•				
							•	•	•	•			
					•	•	•	•	•				
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
AZUL			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
				•			•						

1) Vocês acham esse jogo justo? Por quê?

não, porque o azul tem muito mais chances de ganhar

2) Qual tem mais chance de ganhar? Justifique

O azul por que ele está mais espalhado

Os alunos sabem quais são os resultados possíveis e impossíveis; isso indica que possuem o raciocínio combinatório, mas julgam que todos os sucessos possíveis são equiprováveis, o que é um equívoco de interpretação de espaço amostral. Ao assumir que quem apostar no mesmo número tem menos chances de ganhar, os alunos fazem uso da heurística da disponibilidade. Diante do exposto, observamos, nestas tarefas, a concepção “probabilística intuitiva”.

A análise realizada com Júlia e seu grupo indica que há um movimento de ideias que variam de acordo com o contexto. Constatamos que o grupo apresenta concepções coerentes com as tarefas propostas, porém revela uma concepção equivocada de espaço amostral em situações que envolvem a probabilidade de situações combinatórias, como a de jogo, por exemplo.

6.3.2 As concepções probabilísticas apresentadas por Júlia na segunda fase da pesquisa

As primeiras tarefas, na segunda fase da pesquisa, relacionadas à compreensão do vocabulário estocástico e de sua relação com alguns acontecimentos foram realizadas por Júlia por meio de termos probabilísticos adequados aos contextos propostos. Porém, na segunda tarefa, a aluna apresentou um equívoco de interpretação, ao relacionar os termos que expressavam certeza aos possíveis resultados. Esse equívoco foi superado a partir do diálogo estabelecido com a professora-pesquisadora no momento da entrevista:

Prof^a: Por que você espera que saia uma bola vermelha?

Júlia: Porque tem mais vermelha.

Prof^a: Você respondeu que não tem como dar exemplos de alguns acontecimentos - impossíveis, certo, seguro e sem dúvida. Explique-me melhor.

Júlia: Não dá para pôr impossível: é possível sair uma bola de azul, por que tem bola de todas as cores.

Prof^a: Mas não tem preta?

Júlia: Todas as cores eu queria dizer seria: azul, vermelha e verde.

Prof^a: É impossível tirar uma bola preta?

Júlia: Não! Poderia acontecer, ou melhor, acho que não! Depende! O exercício fala dos possíveis resultados, mas acho que pode ser, pois eu estava pensando que um acontecimento impossível não faz parte do possível.

Prof^a: E o sem dúvida?

Júlia: Não tem como ter certeza, porque tem bola de três cores, pode sair qualquer uma.

Prof^a: E isso não é uma certeza?

Júlia: É.

Prof^a: O que você tem certeza?

Júlia: Que vai sair uma dessas cores.

Prof^a: E para o certo e seguro?

Júlia: Mais ou menos isso, vai sair uma dessas cores.

A comunicação estabelecida entre a professora-pesquisadora e a aluna foi fundamental para que a aluna expressasse suas ideias, baseada em uma “visão normativa” que, no primeiro momento, foi “mascarada” pelo equívoco de interpretação observado pela professora-pesquisadora.

Tanto na tarefa 3 como na 6, Júlia apresenta uma concepção “probabilística normativa”. Suas respostas e seus argumentos são apresentados de forma clara por meio de vocabulário probabilístico, as estimativas das probabilidades realizadas estão corretas e adequadas ao modelo normativo do contexto, como mostra o exemplo abaixo.

3) Em uma vitrine de uma loja de esportes há alguns recipientes transparentes com bolas de tênis coloridas. Veja, o desenho abaixo representando a vitrine.



Recipiente 1 Recipiente 2 Recipiente 3 Recipiente 4

a) Suponha que você fosse retirar, sem olhar, uma bola do recipiente 3, qual a cor de bola que provavelmente você iria retirar? Por quê?

vermelha, porque tem mais bolas vermelhas do que verdes.

b) Em qual recipiente seria mais provável retirar (sem olhar) uma bola verde? Justifique sua resposta.

No recipiente 2, porque há mais bolas verdes do que vermelha.

As respostas dadas por Júlia na tarefa 4, nos primeiros itens, a princípio aproximam-se da resposta correta, pois, como já foi mencionado, ao lançar os dois dados e somar os números obtidos, as chances de obter um resultado par ou ímpar são iguais, ou seja, 50% para cada acontecimento.

4) Qual a probabilidade, ao lançar dois dados e somar os números obtidos, de que o resultado seja:

- Um número par?
- Um número ímpar?
- O número 1?

Ter a mesma quantidade de chance, porque como é um dado, não tem como saber no que vai dar. É a sorte.

É se fosse pra colocar em porcentagem colocaria 50% para par e 50% para ímpar.

Não tem nenhuma chance de sair o número 1 com dois dados, o menor resultado seria 2.

5) Na atividade anterior é possível saber qual resultado tem maior probabilidade de sair? Justifique sua resposta.

Não, porque tem várias chances, tanto com o ímpar, quanto par. É difícil saber! É a sorte.

A entrevista foi muito importante para esclarecer as ideias de Júlia em relação às tarefas 4 e 5:

Prof^a: Por que você colocou que a probabilidade de sair um número par e um número ímpar é igual?

Júlia: Porque em um dado tem três números ímpares e três pares, mas não é certo, não tem como saber. Mas tem três de cada, então, coloquei assim.

Prof^a: Você disse que não tem como saber qual o resultado que tem maior probabilidade de sair porque tem várias chances. Você sabe quais são os possíveis resultados?

Júlia: Poderia ser o 3, o 4, o 7, o 8, o 10, o 2, o 5.

Prof^a: Para dar 3, que números precisariam sair no dado?

Júlia: Pra sair o 3 precisariam cair 2 e 1.

Prof^a: - E o 4?

Júlia: Pra sair o 4, 2 e 2, 3 e 1.

Prof^a: Será que não dá para descobrir todos os possíveis resultados?

Júlia: Dá. Acho que dá para fazer com todos.

Prof^a: Que tal você tentar? [A aluna, na folha de atividades fez a lista das possibilidades da forma como iniciou oralmente]

Prof^a: Então, qual número tem mais chance?

Júlia: O oito tem mais e o 2, o 3 o 11 e o 12 têm menos.

Fica evidente, por meio das explicações de Júlia, uma série de equívocos relacionados ao espaço amostral. A princípio, ao estimar as probabilidades dos resultados pares ou ímpares, a aluna ignora o segundo dado e faz a medida da probabilidade “corretamente”, analisando as possibilidades de obter tais resultados apenas utilizando um dado. Posteriormente, ela estabelece a combinação dos pares de dados para analisar as possibilidades de resultados, porém desconsidera a ordem inversa dos pares de dados, a permutação dos resultados, como outras possibilidades. Tais equívocos, que em um momento a conduziram e em outro a aproximaram da resposta “correta”, evidenciam que Júlia apresenta, nestas tarefas e no jogo “A corrida de cavalos”, a concepção “probabilística intuitiva”, uma vez que revela certa capacidade intuitiva para avaliar a dimensão e a estrutura do espaço amostral.

As concepções apresentadas por Júlia na segunda fase da pesquisa aproximam-se das apresentadas por ela e por seu grupo na primeira fase. A intervenção da professora-pesquisadora foi importante para que alguns equívocos fossem avaliados pela aluna. A interpretação normativa ocorreu em diversos momentos, porém, nas situações que envolviam estimativa de probabilidade por meio de combinações, tal interpretação aconteceu de forma equivocada, em razão de dificuldades relacionadas à definição de espaço amostral.

6.4 O movimento das concepções probabilísticas de Maicon

O “silêncio” de Maicon foi o que nos conduziu a incluí-lo na segunda etapa da pesquisa. Percebemos que, em vários momentos da realização das tarefas, seu grupo destacava-se pela sofisticação das ideias apresentadas; no entanto, quando Maicon era indagado sobre alguma situação, ele ficava em silêncio por alguns segundos, “pensando”, para depois proferir seu pensamento.

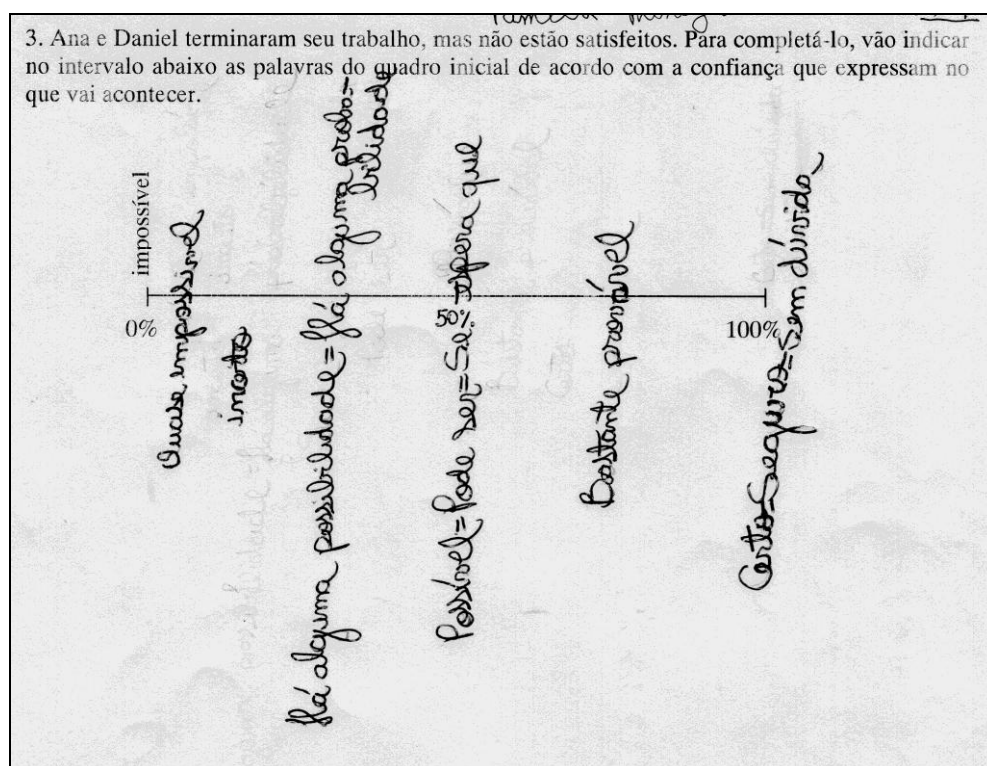
As concepções probabilísticas apresentadas por Maicon e seu grupo apresentam-se nos próximos itens.

6.4.1 As concepções probabilísticas apresentadas por Maicon e seu grupo na primeira fase da pesquisa

As discussões a respeito da linguagem probabilística possibilitaram que a linguagem escrita utilizada por Maicon e seu grupo nos registros das tarefas se apresentasse de forma clara e objetiva. Os termos utilizados por eles, ao realizar a previsão do tempo, são adequados:

Pode ser que chova.
 Se espera que o dia seja claro e ensolarado.
 Pode ser que haja um ligeiro vento.
 É quase impossível a temperatura máxima passe dos 30 graus.
 É impossível que a temperatura mínima seja 10 graus abaixo de zero.
 Sem dúvida a temperatura estará acima de zero graus.
 É impossível que caia neve sobre o telhado das casas.
 Há alguma possibilidade que o céu esteja nublado.

Podemos notar que as previsões dos alunos são baseadas na transferência da estabilidade frequencial dos fenômenos climáticos observados na região em que moram e relacionadas às estimativas quantificadoras que atribuem aos termos probabilísticos. Tais estimativas foram expressas na tarefa 3:



Os alunos agregam os termos probabilísticos que acreditam expressar o mesmo grau de confiança realizam uma classificação quantificadora proporcional desses termos de forma coerente. Assim, baseados em critérios adequados ao contexto, assumem a concepção “probabilística normativa”.

Nas tarefas relacionadas à análise das possibilidades, notamos que Maicon e seus colegas expressam as possibilidades das tarefas de forma correta e, na maioria das vezes, de forma completa. A organização de tais possibilidades aconteceu por meio de registro escrito e por ordem sequencial numérica:

Tarefa 4

Para ganhar o campeonato mundial de Fórmula 1, o piloto Rubens Barrichelo precisou obter 10 pontos em apenas duas corridas. Quais são os resultados possíveis que lhe garantem o campeonato? Use a tabela de pontos abaixo.

Classificação	Pontos
1ª	9
2ª	6
3ª	4
4ª	3
5ª	2
6ª	1

Ele pode chegar na 1ª rodada em 1º lugar e na segunda em qualquer posição ou chegar na 1ª rodada em 2º lugar, e na 2ª rodada em 3º lugar.

Tarefa 9

Escreva todas as possibilidades num jogo de par ou ímpar entre dois colegas. Cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos.

0+0=0	1+0=1	2+0=2	3+0=3	4+0=4	5+0=5
0+1=1	1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6
0+2=2	1+2=3	2+2=4	3+2=5	4+2=6	5+2=7
0+3=3	1+3=4	2+3=5	3+3=6	4+3=7	5+3=8
0+4=4	1+4=5	2+4=6	3+4=7	4+4=8	5+4=9
0+5=5	1+5=6	2+5=7	3+5=8	4+5=9	5+5=10

R: Há 36 possibilidades neste jogo, com os dois jogadores usando uma das mãos.

No jogo proposto pelo lobo mau a Chapeuzinho Vermelho, tarefa 16, o grupo não considerou a permutação de uma das possibilidades, porém, em suas respostas e justificativas, eles expressaram que compreendem as características das situações aleatórias; que possuem raciocínio combinatório e capacidade para selecionar e aplicar o modelo normativo explicativo adequado ao contexto. Tais considerações podem ser observadas no segmento seguinte:

a) Você considera o jogo justo? Justifique.

Não, porque ele só ganha se sair 2 caras, e o lobo pode ganhar se sair cara e coroa ou se sair 2 coroas.

b) Quem tem mais chances de ficar com os doces? Por quê?

O lobo, porque ele tem 2 possibilidades de ganhar, e chapeuzinho apenas 1, mas isso não quer dizer que o lobo irá ganhar.

c) Então, o que é melhor? Ser a Chapeuzinho ou o Lobo Mau?

O lobo mau, pois ele tem mais chances de ganhar.

Nesta tarefa fica claro que Maicon e seu grupo não apresentam apenas a compreensão das possibilidades da situação apresentada, mas a compreensão de sua relação com as análises da estimativa de chances. As hipóteses apresentadas pelo grupo neste contexto caracterizam a concepção “probabilística emergente”.

As respostas — algumas delas apresentadas a seguir — dadas por Maicon e seus colegas às tarefas de 10 a 14 evidenciam o uso da “estratégia normativa” em sua resolução. Suas justificativas são baseadas no reconhecimento das múltiplas possibilidades envolvidas em situações aleatórias e no modelo clássico.

Tarefa 10

Uma ficha é vermelha de um lado e verde de outro. Se lançarmos essa ficha para cima, qual a face que terá mais chance de sair?

a) a vermelha tem mais possibilidade

b) a verde tem mais possibilidade

☒ c) as chances são as mesmas

d) não sei

Por quê? Porque pode sair tanto uma cor como a outra

Tarefa 14
 Com duas fichas azuis e uma amarela dentro do saco, a probabilidade de tirar uma vermelha:

a) é certa
 b) pouco provável
☒ impossível
 d) não sei

Por quê? Porque não há ficha vermelha

A noção de transferência de estabilidade frequencial em situações de jogo também foi constatada nas respostas de Maicon e seus colegas de equipe, pois, na tarefa 17, a disposição das fichas no tabuleiro do jogo “A travessia do rio” era alterada a cada etapa, tendo em vista a facilidade ou a dificuldade para que os números fossem sorteados. Esse julgamento, baseado na observação da frequência relativa de acontecimentos repetitivos, pode ser caracterizado como frequentista.

A ideia — já apresentada por alguns alunos e fundamentada no julgamento heurístico da disponibilidade — de que é mais fácil sortear números diferentes do que o mesmo número em situações aleatórias, também foi apresentada por Maicon e seu grupo:

fá uma reflexão a achar que o azul tem mais chances de ganhar,
 pois o vermelho pôs fichas repetidas na maioria dos números,
 então, para ganhar teria que sair o mesmo em várias vezes como o nº 8.

Tais ideias conduzem a uma interpretação “probabilística intuitiva” das probabilidades em situações relacionadas a jogos.

A investigação realizada com Maicon e seu grupo evidencia que eles apresentam uma compreensão da noção da aleatoriedade e de sua aplicação no estudo da realidade e que possuem habilidade para aplicar o modelo normativo relacionado a vários contextos. Porém os alunos demonstram possuir uma concepção equivocada em relação ao espaço amostral em situações que envolvem as possibilidades dos acontecimentos, a permuta entre as combinações e revelam dificuldade em estabelecer relações entre as probabilidades em situações.

6.4.2 As concepções probabilísticas apresentadas por Maicon na segunda fase da pesquisa

Nas primeiras tarefas realizadas na segunda fase da pesquisa, relacionadas à compreensão do vocabulário probabilístico e sua relação com alguns acontecimentos, alguns dos itens foram deixados sem resposta por Maicon. As demais respostas foram elaboradas por meio de termos probabilísticos adequados aos contextos propostos. Segundo o aluno, os termos: *impossível*, *sem dúvida*, *certo* e *seguro* expressavam *certeza*, e não era possível, diante da tarefa proposta, expressar *certeza* dos acontecimentos. Essa afirmação foi questionada no diálogo estabelecido com a professora-pesquisadora no momento da entrevista, o qual desencadeou algumas reconsiderações por parte do aluno, como mostra o trecho a seguir:

Prof^a: *Você não respondeu todos os itens da tarefa 2 (impossível, certo, seguro e sem dúvida), porque disse que expressavam certeza e nestas situações não tem como expressar certeza. Porém, no item 1 você utilizou a palavra **certo** duas vezes e uma vez a palavra **impossível**. Por que na tarefa 1 era possível utilizar essas palavras e na tarefa 2 não?*

Maicon: *Com certeza sairia uma bola.*

Prof^a: *Você sabe como seria essa bola?*

Maicon: *A cor eu não sei*

Prof^a: *Você não faz uma ideia?*

Maicon: *Tem mais chance de sair vermelha, mas não poderia afirmar.*

Prof^a: *Quando você diz que sairia uma dessas bolas, o que poderia sair?*

Maicon: *Qualquer uma delas.*

Prof^a: *Eu também acho que sairia uma delas!*

Maicon: *Ah, agora entendi! É impossível sair uma bola de outra cor que não esteja na caixa.*

A comunicação estabelecida entre a professora-pesquisadora e o aluno possibilitou que Maicon refletisse sobre suas primeiras ideias e as reconsiderasse, fazendo uso de exemplos adequados à situação. Os termos e os exemplos utilizados pelo aluno são característicos da “visão normativa”, como se observa nas respostas utilizadas por ele para expressar a confiança no resultado do jogo de tômbola:

- Sair um número ímpar:

Possível.

- Sair um número menor que 91:

Certo.

- Sair o número 100:

Impossível.

- Sair um número maior do que 0:

Certo.

- Sair o número 31:

Possível.

A “estratégia normativa” também é utilizada por Maicon nas tarefas 3 e 6, relacionadas à estimativa de chances.

6) Uma classe tem 19 alunos. Há 11 meninas e 8 meninos. Se você escrever o nome de cada um dos alunos em um papel, colocá-los num saco e retirar um nome ao acaso, o que considera que seja mais provável? Assinale, dentre as alternativas abaixo, a que esteja de acordo com seu pensamento:

a) que o nome seja de um menino.

☒ b) que o nome seja de uma menina.

c) a probabilidade de o nome ser de um menino é a mesma do nome ser de uma menina.

d) não sei responder.

Por quê? *Porque há mais meninas, mas também pode sair o nome de um menino*

4 *5*

Podemos observar que o aluno respondeu de forma adequada. Em suas justificativas, fica claro que possui a habilidade de comparar e contrastar as possibilidades das situações aleatórias e que apresenta ideias baseadas no conceito clássico.

Ao analisar as respostas dadas por Maicon no registro das tarefas 4 e 5, relacionadas aos possíveis resultados de soma dos números extraídos ao jogar dois dados, percebemos que, de forma semelhante ao aluno Júlio, Maicon também assume como espaço amostral os números de 2 a 12. Assim, considera que as chances de obter resultado par são maiores do que de obter uma soma ímpar, o que é um equívoco. Ele também considera que cada número tem a mesma probabilidade de ser sorteado, ou seja, os números são equiprováveis. Tal fato também foi exposto pelo aluno na entrevista:

Profª: *Dentre as somas possíveis, tem alguma que tem uma maior probabilidade?*

Maicon: *Acho que são iguais.*

Prof^a: *Pra sair o 2, quais números tem que somar?*
 Maicon: *Tem que ser 1 e 1.*
 Prof^a: *E o 3?*
 Maicon: *2 e 1 e 1 e 2.*
 Prof^a: *E o 4?*
 Maicon: *Ah! Ele tem mais chance 2 e 2, 3 e 1, 1 e 3.*
 Prof^a: *E o 5?*
 Maicon: *4 e 1, 1 e 4, 3 e 2, 2 e 3.*
 Prof^a: *Você acha que tem número que tem mais chance?*
 Maicon: *Tem.*
 Prof^a: *Qual?*
 Maicon: *O seis.*
 Prof^a: *Por quê?*
 Maicon: *Nós tínhamos feito os números que tinha mais chance na classe, começava com pouco, no meio aumentava e depois ia diminuindo.*
 Prof^a: *Você poderia fazer isso agora?*
 Maicon: *Sim.* [Ele começou a escrever as possibilidades na folha, foi até o número 8, depois parou e fez o seguinte comentário:]
 Maicon: *Vai começar diminuir agora as possibilidades, o número 7 é o que tem mais possibilidades.*

A princípio, o aluno acredita que as possibilidades de cada um desses números são iguais; no entanto, durante a entrevista, percebe que não são e identifica o número com maior probabilidade de resultados. Essa percepção o conduziu a apostar, no jogo “Corrida de cavalos”, nos números que tinham maior probabilidade de sair.

É possível perceber que o aluno possui raciocínio combinatório e proporcional; além disso, utiliza a linguagem probabilística normativa para estimar a probabilidade dos resultados questionados e revela compreensão das características relacionadas às situações de incerteza, o que o conduz a uma visão normativa. No entanto, tendo em conta o equívoco relacionado ao espaço amostral, podemos considerar que, neste contexto, o aluno apresenta a concepção “probabilística emergente”.

Nas ideias apresentadas por Maicon, notamos que prevaleceu o uso de vocabulário probabilístico normativo, ao estimar as probabilidades; que os equívocos de linguagem apresentados foram alterados por meio do processo de comunicação estabelecido entre a professora-pesquisadora e o aluno; e que as concepções probabilísticas apresentadas na primeira fase da pesquisa se assemelham às apresentadas, em tarefas semelhantes, na segunda fase. Dentre as concepções equivocadas, destacam-se as que surgiram em tarefas relacionadas a jogos, como na definição do espaço amostral que envolvia possibilidades combinatórias e no julgamento

heurístico apresentado, ao afirmar que é mais fácil sortear números diferentes do que o mesmo número em situações aleatórias.

6.5 Considerações sobre o capítulo

A análise pormenorizada das produções apresentadas por alguns alunos para as tarefas propostas pela pesquisadora evidencia a manifestação de determinadas ideias probabilísticas, que se apresentam, em um primeiro momento, carregadas de “verdades e sentidos pessoais”; deixa claro também que, num segundo momento, com a intervenção do professor e de colegas, é possível a reflexão e a alteração de ideias equivocadas ou não.

Quanto ao pensamento probabilístico dos alunos, ficou evidente que as “intuições primárias” (FISCHBEIN, 1975) não representam ideias primitivas, mas estão carregadas de coerência e rigor. Notamos que os alunos possuem habilidades para estabelecer relações de situações probabilísticas do seu cotidiano e relacioná-las ao contexto das tarefas. Nas situações probabilísticas relacionadas a jogos, a concepção “probabilística intuitiva” prevalece, enquanto nas demais a concepção “probabilística normativa” tem sido bastante utilizada. Provavelmente isso ocorra porque as experiências envolvendo a aleatoriedade para alunos, crianças ainda, estejam quase sempre associadas a situações de jogo. É nos jogos que as crianças experimentam lançar dados, observar regularidades em jogos do tipo dominó, etc. Nas situações de jogo os alunos estabelecem relações com outros jogos já vivenciados, o que lhes possibilita certa intuição a respeito do que acontece com os dados, com o baralho, etc.

Como já foi mencionado, o movimento das concepções probabilísticas foi observado nas análises realizadas; no entanto, não se observou uma regularidade nas concepções apresentadas, mas, sim, em alguns equívocos de estimativa de probabilidades em situações que envolviam a análise combinatória no espaço amostral, como por exemplo nas tarefas 16 – jogo da Chapeuzinho e do lobo mau; 17 e 18, relacionadas ao jogo travessia do rio, na primeira fase da pesquisa; e nas tarefas 4 e 5 – dos resultados possíveis da soma dos dados, na segunda fase. No jogo da Chapeuzinho e do lobo mau, em que as possibilidades do lobo mau vencer eram de $\frac{3}{4}$ e da Chapeuzinho $\frac{1}{4}$, seis grupos admitiram que as chances eram as mesmas para cada um deles, ou seja, a probabilidade era de 50% para ambos; e sete grupos afirmaram que o lobo mau tinha mais chance que a Chapeuzinho: suas justificativas indicavam a probabilidade de $\frac{2}{3}$ para o lobo mau e $\frac{1}{3}$ para Chapeuzinho. Em justificativas da tarefa 18, também é possível observar tal equívoco:

Reflexão 2:

MARGEM

Vermeiho					•	•	•	•	•			
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Azul			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

MARGEM

1) Vocês acham esse jogo justo? Por quê?

Sim. Porque ambos não têm fichas no nº 1.

exemplo abaixo:

Tarefa 5

Para chegar as finais do campeonato brasileiro de futebol, basta ao Corinthians obter 4 pontos nas 3 partidas que tem pela frente contra o Grêmio, o Vasco e o Cruzeiro. Sabendo que a vitória vale 3 pontos, o empate 2 pontos e que a derrota vale 0 ponto:

a) liste os casos em que o Corinthians vai para as finais.

1º 3 pontos 2º 3 " " 3º 3 " "	1º 3 pontos 2º 3 " " 3º 2 " "	1º 3 pontos 2º 2 " " 3º 2 " "	1º 2 pontos 2º 2 " " 3º 2 " "	1º 2 pontos 2º 2 " " 3º 0 " "	1º 3 pontos 2º 3 pontos 3º 0 " "
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	--

b) liste os casos em que o Corinthians é desclassificado.

1º 2 pontos 2º 0 " " 3º 0 " "	1º 3 pontos 2º 0 " " 3º 0 " "	1º 0 pontos 2º 0 " " 3º 0 " "
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

Prof^a: *Para você o possível significa 50% de chances, então você tem 50% de chances de tirar uma pedra dentre 90?*

Júlio: *Não acho que 5%, não pode ser 50% para cada bolinha, pode?*

Prof^a: *Não.*

Júlio: *Então não sei, fica difícil.* [pensou um pouco] *Então é uns 1,11%, não tem final* [queria dizer que a divisão é uma dízima].

Prof^a: *Como você chegou nesse número?*

Júlio: *Dividindo 90 por 100.*

Consideramos que o trabalho com a análise de possibilidades, realizada entre as tarefas 4 e 9, foi importante na sequência de tarefas, mas a análise das possibilidades relativa à estimativa de chances, desenvolvida na tarefa 16, o jogo do lobo mau e da Chapeuzinho, mostrou-se mais significativa, uma vez que os alunos perceberam a necessidade de tal realização.

REFLEXÕES SOBRE A PESQUISA

Esta pesquisa propôs-se a investigar as ideias sobre linguagem e pensamento probabilísticos que os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental apresentam em um contexto de resolução de problema. Ela foi norteadada pela questão: “Quais as ideias sobre linguagem e pensamento probabilístico que os alunos apresentam em um contexto de resolução de problemas, mediados pelo processo de comunicação?”.

Tínhamos como hipótese inicial que as “técnicas” utilizadas no cotidiano escolar não vêm promovendo o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos alunos e que uma metodologia diferenciada, com uma prática voltada aos cenários de investigação (SKOVSMOSE, 2008), poderia mobilizar tal pensamento, pois os alunos atuariam no seu processo de aprendizagem, em um contexto de resolução de problemas organizado de forma que a comunicação de ideias fosse estabelecida.

Com a análise das tarefas envolvendo a linguagem probabilística apresentada pelos alunos, observamos que eles se apropriaram das palavras e expressões probabilísticas nas observações e nas vivências de situações do seu cotidiano, por meio das reflexões e da realização de tarefas propostas em nossa pesquisa, principalmente as que favoreceram o processo de leitura e escrita, como a produção de cartas, por exemplo; e também pelas discussões promovidas por meio dessas tarefas, nas quais os alunos justificavam e argumentavam sobre suas conclusões e as dos colegas.

Identificamos que os alunos possuem a ideia de que os termos probabilísticos expressam as chances dos acontecimentos a eles relacionados e que alguns desses termos exprimem valores quantitativos exatos da probabilidade envolvida, como, por exemplo, os termos *impossível*, *certo*, *sem dúvida e seguro*; e expressam também outros valores mais flexíveis, como o *pode ser*, *se espera que*, *há alguma probabilidade*, etc. As relações estabelecidas com os termos com *frequência* e *quase sempre* não foram compartilhadas comumente pelos alunos. Ainda persistiram dúvidas e divergências quanto ao uso desses termos.

A princípio, observamos que, nos registros escritos das tarefas, os alunos expressavam suas ideias de forma sucinta, mas, à medida que novas tarefas eram realizadas, passaram a expressar suas ideias, nos registros escritos, com mais clareza e também a demonstrar mais segurança ao expor e defender suas ideias perante os colegas e a professora-pesquisadora.

Durante a entrevista, um diálogo estabelecido somente entre professora-pesquisadora e aluno sobre a tarefa por ele realizada, notamos que os entrevistados também se mostravam confiantes ao expressar ideias probabilísticas e revelavam refletir e superar alguns equívocos apresentados. A linguagem probabilística foi bastante utilizada por eles, em problemas abertos, como forma de estimar o cálculo das probabilidades ou de prever possibilidades. Diante do exposto, consideramos que promover tarefas relacionadas à linguagem estocástica, seja no início ou no decorrer de uma sequência didática, faz com que o aluno se sinta confiante em expressar suas ideias e motivado a realizar outras tarefas, uma vez que as compreende; possibilita que ele reflita e reveja espontaneamente seus conceitos, quando lhe apresentam argumentos convincentes, e crie um repertório linguístico apropriado à expressão do pensamento probabilístico.

Shaughnessy (1992) e Azcárate (1996) analisam um amplo conjunto de dados apresentados pelos sujeitos para, de acordo com as ideias por eles apresentadas, classificá-los em uma única “concepção probabilística”, atribuindo as ideias um caráter progressivo. Propomos, em nossa pesquisa, utilizar os critérios estabelecidos por esses autores para analisar as diferentes ideias que os alunos apresentam diante das tarefas propostas, com o objetivo de evidenciar como essas ideias percorrem as diferentes concepções probabilísticas. Ou seja: um mesmo aluno pode ter uma concepção diante de uma determinada tarefa e outra, em outra tarefa?

Não foi observada uma regularidade nas concepções probabilísticas apresentadas nas diferentes tarefas, mas uma habilidade de adequação de suas ideias a diferentes contextos. Observamos, também, que o movimento das ideias probabilísticas apresentadas pelos alunos foi favorecido tanto pelas tarefas, quanto pela intervenção da professora-pesquisadora e dos colegas de classe. E as atitudes e a atmosfera criada pela professora-pesquisadora, assim como o dinamismo proporcionado nas aulas de Matemática por meio da metodologia de resolução de problemas, foram fundamentais para a apresentação das ideias probabilísticas dos alunos. Dessa forma, consideramos que as situações relacionadas à incerteza podem ser interpretadas de diferentes maneiras, por diferentes concepções probabilísticas, conduzindo ou não as pessoas às respostas adequadas.

Diante do exposto, e apoiados nas pesquisas de Fischbein (1975, apud FERNANDES, 1999), que interpreta o desenvolvimento da probabilidade como um processo contínuo em que os conceitos probabilísticos subjetivos se tornam mais elaborados e substituídos por conceitos probabilísticos baseados em argumentos lógico-matemáticos, ressaltamos a necessidade de um

trabalho contínuo, desde as séries iniciais, que promova o movimento do pensamento probabilístico dos alunos.

Foram também evidenciados equívocos relacionados à interpretação do espaço amostral em situações nas quais as possibilidades envolviam situações combinatórias, como na tarefa 18⁶¹, por exemplo, em que os alunos analisavam dois tabuleiros do jogo “A travessia do rio”, que envolvia a soma obtida com dois dados, e faziam uma avaliação da disposição das fichas no tabuleiro com os possíveis resultados e suas probabilidades: os alunos consideravam como equiprováveis, na soma dos resultados de dois dados, os números de 2 a 12. E, na tarefa 16⁶² - jogo do lobo mau e da Chapeuzinho -, em que uma parte dos alunos considerava que as chances do lobo e da Chapeuzinho eram as mesmas, ou que as chances do lobo mau eram de $\frac{2}{3}$, quando na verdade eram de $\frac{3}{4}$, eles desconsideravam a permuta das faces cara e coroa. Esses resultados apontam, de forma significativa, a necessidade de um trabalho concomitante com análise de possibilidades (combinatória), probabilidade e estatística. Em relação à análise combinatória, consideramos que as tarefas que envolviam análise de possibilidades em conjunto com a estimativa de probabilidade foram mais significativas aos alunos, como a tarefa do jogo do lobo mau e da Chapeuzinho, pois elas possibilitavam que os alunos percebessem a relação que existe entre analisar as possibilidades e estimar as probabilidades.

O equívoco — observado mesmo em alguns livros didáticos — quanto aos significados das palavras “possibilidade” e “probabilidade”, as quais muitos alunos compreendem como sinônimas, assinala para uma questão um tanto quanto delicada, pois há uma relação entre os seus significados, porém eles envolvem raciocínios diferentes, combinatório e probabilístico. Tal equívoco, por parte tanto do aluno como do professor, pode relacionar-se ao ensino-aprendizagem da probabilidade.

Assim, presumimos, com as evidências constatadas, em relação aos equívocos apresentados, a importância do trabalho concomitante e contínuo com a análise de possibilidades (combinatória), probabilidade e estatística; além disso, cabe uma atenção especial às significações que os alunos dão aos termos probabilísticos.

⁶¹ Nesta tarefa, ao assumirem que quem apostar em números diferentes tem mais chances de ganhar, ou mesmo, ao afirmarem que o jogo é justo, porque as duas equipes têm chances iguais, pois não têm fichas no número 1, os alunos indicam que sabem quais são os resultados possíveis e impossíveis, que possuem o raciocínio combinatório; porém admitem que todos os sucessos possíveis são equiprováveis, possuem as mesmas chances.

⁶² Ao analisar as possibilidades do jogo, alguns grupos elegeram como espaço amostral; cara/cara, coroa/coroa e cara/coroa e, partindo desses dados, avaliaram que o jogo não era justo, porque o lobo mau tinha duas chances de ganhar, e a Chapeuzinho, apenas uma.

A análise dos registros escritos dos alunos possibilitou-nos perceber equívocos de linguagem promovidos pelos enunciados das tarefas, porém, sua constatação só foi possível por meio da comunicação oral e escrita (cartas) estabelecida entre professora-pesquisadora e alunos, no desenvolvimento das tarefas e no momento da entrevista. Algumas dessas tarefas foram elaboradas com o Grucomat; assim, as situações equivocadas apresentadas neste trecho indicam o quanto a produção de enunciados de tarefa é complexa, pois, mesmo com um trabalho coletivo, nem sempre damos conta de trabalhar com a linguagem adequada aos alunos. No cotidiano de sala de aula, tais fatos também podem ocasionar avaliações equivocadas a respeito do real conhecimento do aluno.

Um das principais dificuldades encontradas no decorrer da pesquisa foi a carência de referenciais teóricos e de pesquisas, tanto nacionais quanto internacionais, sobre probabilidade e pensamento probabilístico. Há poucas publicações brasileiras que trazem o assunto, mesmo assim, de forma não abrangente. As principais publicações de língua estrangeira fazem referência a pesquisas em larga escala com a utilização de testes com alunos. Uma pesquisa como esta, que considera o próprio movimento dos alunos produzindo o pensamento estocástico em sala de aula e que aponta a resolução de problemas como uma metodologia adequada à mobilização e à produção de conhecimentos pelos alunos, é, sem dúvida, de extrema relevância ao conjunto de pesquisas, tanto nacionais como internacionais.

Diante dessas reflexões e considerações, julgamos ter atingido nossos objetivos de pesquisa, que visavam identificar as ideias probabilísticas que emergem do processo de comunicação (oral/escrito), tendo como contexto a resolução de problemas, e analisar as ideias que emergem em um contexto de interação e negociação entre alunos e professora-pesquisadora. Acrescentamos que as disciplinas cursadas pela professora-pesquisadora no mestrado foram fundamentais para a realização da pesquisa, na construção do referencial teórico, com a disciplina “O conhecimento matemático escolar”; na escolha da metodologia adotada, com “Seminários de pesquisa”; na compreensão e na reflexão sobre as tendências sobre Educação Matemática e dos sentidos produzidos pelos discursos dos alunos nas demais disciplinas – “Tendências em educação matemática”, “Tópicos especiais II”, “Políticas de educação e discurso” e “Discurso, sujeitos e práticas educativas”. A realização desta pesquisa e seus resultados possibilitaram reflexões enriquecedoras em nossa formação como pesquisadora e como profissional que atua

como professora de Matemática. No entanto, acrescento⁶³, particularmente, que essa vivência possibilitou que o “olhar” e o “espírito” de pesquisadora fosse acrescentado ao de professora. Dessa forma, a preocupação e a atenção com as situações que favoreceram o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, assim como a reflexão constante sobre o processo de ensino-aprendizagem e a busca de novas possibilidades de fazer “matemática”, passam a estar cada vez mais presentes em meu cotidiano.

Consideramos, também, que a presente pesquisa contribui com os professores que atuam em sala de aula e que desejam dinamizar as aulas de Matemática, para que tenham como perspectiva o desenvolvimento do pensamento não só probabilístico, mas também matemático e crítico dos seus alunos. Acrescentamos, ainda, que os dados apontados contribuem para a realização de outras pesquisas relacionadas ao desenvolvimento do pensamento probabilístico dos alunos e de metodologias que favoreçam tal desenvolvimento, e de novas questões de pesquisa como: quais as ideias que os alunos apresentariam em uma proposta de trabalho concomitante e contínuo, entre análise de possibilidades (combinatória), probabilidade e estatística? Quais as ideias que os alunos da Educação Infantil apresentam acerca das probabilidades?

⁶³ Professora-pesquisadora.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, Guida de. El papel Del contexto em la resolución de problemas matemáticos. In: N. Gregório, J. Deulofeu, A. Bishop (Org.). **Matemáticas y educación: retos y câmbios desde uma perspectiva internacional**. Barcelona: Editorial Grão, 2000, p. 137-147.

APM, **Associação dos Professores de Matemática**. Disponível no site: <<http://www.apm.pt/portal/index.php?id=32582>>. Último acesso em: 06/02/2010.

AZCARÁTE, Pilar G. **Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria em torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad**. Granada: Editorial Comares, 1996.

BATANERO, M. Carmen; GODINO, Juan D.; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Editorial Síntesis, 1994.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2004.

BORBA, Marcelo C.; SKOVSMOSE, Ole. A ideologia da certeza em educação matemática. In: SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica**. Campinas: Papirus Editora, 2008. Cap.5, PP. 127-148.

BOGDAN, Robert C. & BIKLEN, Sári K. **Investigação qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARVALHO, Dione L.; OLIVEIRA, Paulo O. Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática: clássica, frequentista, subjetiva e formal. In: **25ª reunião anual da Anped**. Caxambu: Anais da 25ª reunião anual da Anped, 2002, p. 1-12. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/reunioes/25/excedentes25/dionelucchesicarvalhot19.rtf>>. Último acesso: 04/08/2009.

CIRINO, Marcelo Maia. **A intermediação da noção de probabilidade na construção de conceitos relacionados à cinética química no ensino médio**. Dissertação (Mestrado). Bauru, SP: Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências de Bauru, 2007.

CONTRERAS, Luis C.; CARRILO, J. El amplio campo de la resolución de problemas. In CARRILO, J. Y.; CONTRERAS, L. C. **Resolución de problemas em los albores Del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos**. Huelva/España: Hergué, Editora Andaluza, 2000, p. 13-38.

COSTA, Adriana. **A educação Estatística na Formação do professor de matemática**. Dissertação (Mestrado). Itatiba, SP: Universidade São Francisco, 2007.

COUTINHO, Cileda Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista: estudo epistemológico e didático.** Dissertação (Mestrado em Matemática). São Paulo: PUC-SP, 1994.

COUTINHO, Cileda Q. S. **Introduction aux situations aléatoires dès Collège: de la modélisations à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètreII.** Tese de Doutorado. Grenoble (França): Université Joseph Fourier, 2001.

DUARTE, Tereza O. C. **A estatística no 1º ciclo: uma abordagem no 3º ano de escolaridade.** (Dissertação de Mestrado em Educação), Lisboa (Portugal): Faculdade de Ciências/Universidade de Lisboa, 2004.

FADEL, Flávia T. B. A. Uma dinâmica diferente de sala de aula: rumo à educação matemática crítica. In: ARAÚJO, Jussara L (Org.). **Educação Matemática Crítica: reflexões e diálogos.** Belo Horizonte: Argumentum Editora, 2007.

FERNANDES, J. A. S. **Intuições e aprendizagem de probabilidades: Uma proposta de ensino de probabilidades no 9.o ano de escolaridade.** Tese (doutorado em Educação), Universidade do Minho, Braga (Portugal), 1999.

FERNANDES, José A.; Barros, Paula M. Dificuldades em estocástica de uma futura professora do 1º e 2º ciclos do Ensino Básico. In: **Revista Portuguesa de Educação**, 2005, 18(1), pp. 117-150.

FISCHEBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children.** Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company, 1975.

FONSECA, Maria C. F. R. **Letramento no Brasil: habilidades matemáticas.** São Paulo: Global Editora, 2004.

FONSECA, Maria C. F. R.; CARDOSO, Cleusa A. Educação Matemática e letramento: textos para ensinar Matemática, Matemática para ler o texto. In: Lopes, C. A. E.; Nacarato, A. M. **Escritas e leituras na educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005, p. 63-76.

FRANCO, Maria Laura P. B. **Análise do Conteúdo.** Brasília, 3ª edição: Líber Livro Editora, 2008.

GODINO, J. D.; BATANERO, M. C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad:** fundamentos didácticos y propuesta curriculares. España: Editorial Síntesis, 1996.

GOLDENBERG, Miriam. **A arte de pesquisar. Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** Rio de Janeiro: Ed. Record, 1997.

GOMES, Adriana A. M. Aulas investigativas na educação de jovens e adultos (EJA): o movimento de mobilizar-se e apropriar-se de saber(es) matemático(s) e profissional(is). Dissertação (Mestrado). Itatiba, SP: Universidade São Francisco, 2007.

GONÇALVES, Mauro S. **Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC-SP, 2004.

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: Teberosky, Ana; Tolchinsky, Liliana (orgs.). **Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática**. São Paulo: Ática, 2002, p. 257-295.

GRANDO, Regina Célia; MARCO, Fabiana F. O movimento da resolução de problemas em situações com jogo na produção do conhecimento matemático. In: MENDES, J. R.; GRANDO, R. C. (Org.). **Múltiplos Olhares: matemática e produção de conhecimento**. Musa educação matemática; v. 3, São Paulo: Musa Editora, 2007.

JAPIASSÚ, Hilton; MARCONDES, Danilo. **Dicionário básico de filosofia**. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Ed., 2006.

LESTER, Frank K. O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de matemática? A situação dos Estados Unidos. In: FERNANDES *et al.* **Resolução de problemas: processos cognitivos concepções de professores e desenvolvimento curricular**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1994, p.13-31.

LOPES, A. J. (Bigode). **Matemática agora é feita assim. 7ª séries**. São Paulo: FDT, 2000.

LOPES, Celi A. E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática). Campinas, SP: FE/UNICAMP. 1998.

LOPES, CELI A. E. **Atividades de estocástica para 3º e 4º ciclos do ensino fundamental**. Campinas: Faculdade de Educação, 1999. (mimeo)

LOPES, Celi E. **O Conhecimento Profissional dos Professores e suas Relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil**. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: FE/UNICAMP, 2003.

LOPES, Celi A. E. . Literacia Estatística e INAF 2002. In: FONSECA, M. C. F. R. (Org.). **LETRAMENTO NO BRASIL: Habilidades Matemáticas**. São Paulo: Global Editora, 2004, p. 187-195.

LOPES, Celi E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. In **Caderno Cedes 74 - Ensino de Matemática em Debate: sobre práticas escolares e seus fundamentos**. Campinas, vol. 28, n. 74, p.57-73, jan/abr.2008.

LOPES, Celi E.; CURI, E. **Pesquisas em Educação Matemática: Um Encontro entre a teoria e a Prática**. São Carlos/SP: Pedro & João Editores, 2008.

LOPES, Celi E.; COUTINHO, Cileda Q. S. Leitura e escrita em Educação Estatística. In LOPES, C. E.; NACARATO, A. M. **Educação matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidades**. Campinas/SP: Mercado das Letras, 2009, p. 61-78.

LOPES, C. E.; NACARATO, A. M. **Educação matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidades**. Campinas/SP: Mercado das Letras, 2009.

LUDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MASON, John. Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: problemas abertos, fechados e exploratórios. In ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P.; **Investigar para aprender matemática: textos selecionados**. Lisboa: GRAFIS, 1998, p. 73-88

MATALON, B. Epistemologia das probabilidades. In: J. Piaget (ed.), **Lógica e conhecimento científico**. Porto: Livraria Civilização-Editora, 1980.

ONUCHIC, Lourdes. Ensino-aprendizagem de matemática através de resolução de problemas. In BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Orgs.) **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

ONUCHIC, Lourdes R.; ALLEVATO, Norma S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez Editora, 2004, p. 213-231.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. **A escrita e o pensamento matemático: Interações e potencialidades**. Campinas, SP: Papirus, 2006.

POWELL, Arthur; FRANCISCO, John; MAHER, Carolyn. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. Tradução: Junior, Antonio Olímpio. In: **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, SP: UNESP, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Ano 17, nº21, 2004, p. 81-140.

RUBEL, Laurie H. Student's probabilistic thinking revealed: the case of coin tosses. In: **NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. NCTM. Thinking and Reasoning with Data and Chance**. USA: Reston, 2006, p. 49-60.

SADOVSKY, Patrícia. **O ensino matemático hoje – enfoques, sentidos e desafios**. Tradução: Antonio de Paula Danesi. São Paulo: Ática, 2007.

SÁENZ, César C. **Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades: propuesta de um modelo didáctico**. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid, 1999.

SALMAZO, Rodrigo. **Atitudes e procedimentos de alunos frente à leitura e interpretação de textos nas aulas de matemática**. PUC – São Paulo, 2005. (Dissertação de Mestrado). Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao_rodrigo_salmazo.pdf. Acesso em: 08/02/2010.

SANTOS, Sandra A. Explorações da linguagem escrita nas aulas de matemática. In NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Orgs.) **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005, p. 127-141.

SÃO PAULO. **Deliberação CEE Nº 09/97**, 30/07/1997. – Disponível no site: < http://www.ceesp.sp.gov.br/Deliberacoes/de_09_97.htm>. Último acesso em: 05/10/2009.

SCHOENFELD, Alan. Por que toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P.; **Investigar para aprender matemática: textos selecionados**. Lisboa: GRAFIS, 1998, p. 61-71.

SERRADÓ, Ana B.; AZCÁRATE, Pilar G.; CARDEÑOSO, José M. La caracterización escolar de la noción de probabilidad em libros de texto de la ESO. In: **Tarbiya: Revista de Investigación e Innovación Educativa del Instituto Universitario de Ciencias de la Educación Universidad Autónoma de Madrid**. 2006, n.39, p.91-109. Artigo em espanhol disponível em: <http://www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/tarbiya/tarbiya/38/38-08.html> Último acesso em 04/08/2009.

SHAUGHNESSY, J. Michel Research in probability and statistics: reflections and directions. In GROUWS, D. A. (ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. USA: NCTM, 1992.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Campinas/SP: Papirus, 2008.

SMOLE, Kátia C. S.; DINIZ, Maria I. S. V. Ler e aprender matemática. In SMOLE, Kátia C. S.; DINIZ, Maria I. S. V. (Orgs.) **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: ARTMET, 2001. p.69-86.

STANIC, George M. A.; KILPATRICK, Jeremy. Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum. In CHARLES, R. I.; SILVER, E. A.(Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989.

SZYMANSKI, Heloísa; ALMEIDA, Laurinda R.; PRANDINI, Regina, C. A. R. **A entrevista na pesquisa em educação: a prática reflexiva**. Brasília: Plano Editora, 2002.

VAN DE WALLE, John, A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VASQUES, Ricardo S. B. **Mobilização de conceitos estatísticos: um estudo diagnóstico desses conceitos envolvendo variabilidade com alunos do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). São Paulo: PUC-SP, 2007.