UNIVERSIDADE SÃO FRANCISCO

Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação

JAQUELINE APARECIDA FORATTO LIXANDRÃO SANTOS

A PRODUÇÃO DE SIGNIFICAÇÕES SOBRE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NUMA SALA DE AULA DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DE UMA PRÁTICA PROBLEMATIZADORA

ITATIBA
2015
JAQUELINE

APARECIDA FORATTO LIXANDRÃO SANTOS

A PRODUÇÃO DE SIGNIFICAÇÕES SOBRE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NUMA SALA DE AULA DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DE UMA PRÁTICA PROBLEMATIZADORA

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, da Universidade São Francisco, sob orientação da Prof.ª Dra. Adair Mendes Nacarato para obtenção do título de Doutora em Educação, na linha de pesquisa: Matemática, Cultura e Práticas Pedagógicas.

ITATIBA
2015

371.399.51	Santos, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão.
S236p	A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora / Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos – Itatiba, 2015. 191 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco. Orientação de: Adair Mendes Nacarato. 1. Raciocínio combinatório. 2. Pensamento

Ficha catalográfica elaborada pelas bibliotecárias do Setor de

Processamento Técnico da Universidade São Francisco.

UNIVERSIDADE SÃO FRANCISCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*
EM EDUCAÇÃO

Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos defendeu a tese **"A PRODUÇÃO DE SIGNIFICAÇÕES SOBRE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NUMA SALA DE AULA DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DE UMA PRÁTICA PROBLEMATIZADORA"** aprovada no Programa de Pós Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco em 23 de junho de 2015 pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Adair Mendes Nacarato

Profa. Dra. Adair Mendes Nacarato
Orientadora e Presidente

Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza
Examinador

Daniela Dias dos Anjos

Profa. Dra. Daniela Dias dos Anjos
Examinadora

Prof. Dr. Leandro de Oliveira Souza
Examinador

Milena Moretto

Profa. Dra. Milena Moretto
Examinadora

Dedico esse trabalho àqueles que (re)significam minha vida, meus filhos − Igor e Yasmin − e minhas sobrinhas − Maynah e Maria Eduarda. Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a meu marido Carlos por me apoiar nessa caminhada e cuidar de nossos filhos nos momentos em que estive ausente;

A meu irmão Théo e minha cunhada Patrícia pelo apoio e pelo incentivo;

À Profª D.ra Regina Célia Grando e à Profª D.ra Adair Mendes Nacarato, que com carinho, alegria e dedicação me mostraram os melhores caminhos, contribuindo não só para minha formação acadêmica, mas também para a minha formação profissional e pessoal;

Ao Prof. D.r Antonio Carlos de Souza, à Profª D.ra Daniela Dias dos Anjos, ao Prof. D.r Leandro de Oliveira Souza e à Profª D.ra Milena Moretto pelas valiosas contribuições e sugestões no Exame de Qualificação;

Aos professores do mestrado, do doutorado e a todos os docentes que passaram pela minha vida por compartilhar seus conhecimentos;

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste doutorado;

Aos funcionários da USF-Itatiba que (in)diretamente me auxiliaram durante meu percurso na Universidade;

Aos colegas e amigos do mestrado e do doutorado, do Grucomat e do grupo de Orientandos pelo apoio e pelas sugestões à pesquisa;

Aos alunos do 6º ano B, turma de 2010, às Gestoras e aos professores da escola “Dionysia Gerbi Beira”, da cidade de Amparo, que contribuíram para que esta pesquisa se realizasse;

Aos meus familiares e aos demais amigos por compreenderem minha ausência física em momentos importantes;

A Deus por permitir que eu concluísse mais essa caminhada.

Tocando em Frente

Ando devagar por que já tive pressa
E levo esse sorriso por que já chorei demais
Hoje me sinto mais forte, mais feliz quem sabe,
Só levo a certeza de que muito pouco eu sei
Nada sei.

Conhecer as manhas e as manhãs,
O sabor das massas e das maçãs,
É preciso amor pra poder pulsar,
É preciso paz pra poder sorrir,
É preciso a chuva para florir

Penso que cumprir a vida seja simplesmente
Compreender a marcha e ir tocando em frente
Como um velho boiadeiro levando a boiada
Eu vou tocando dias pela longa estrada eu vou
Estrada eu sou.

Conhecer as manhas e as manhãs,
O sabor das massas e das maçãs,
É preciso amor pra poder pulsar,
É preciso paz pra poder sorrir,
É preciso a chuva para florir.

Todo mundo ama um dia todo mundo chora,
Um dia a gente chega, no outro vai embora
Cada um de nós compõe a sua história
Cada ser em si carrega o dom de ser capaz
E ser feliz.

Conhecer as manhas e as manhãs
O sabor das massas e das maçãs
É preciso amor pra poder pulsar,
É preciso paz pra poder sorrir,
É preciso a chuva para florir. (SATER; TEIXEIRA, 2013).

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora.** 2015. 191 p. Tese (Doutorado em Educação)− Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

RESUMO

Este estudo, que possui cunho qualitativo, procura compreender o que se revela em um trabalho pedagógico com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, feito a partir da perspectiva da problematização, que busca desenvolver o pensamento probabilístico e o raciocínio combinatório por meio de uma articulação entre eles. Baseia-se na perspectiva histórico-cultural, que considera a sala de aula – um ambiente de aprendizagem de alunos e, neste caso, professora-pesquisadora – como contexto de pesquisa, tal como propõe Freitas (2009, 2010). As contribuições da perspectiva histórico-cultural na formação de conceitos científicos, na produção de significações são pautadas em Fontana (2005, 1993), Friedrich (2012), Núñez (2009), Oliveira (2004), Smolka (2010) e Vygotsky (1991, 2001), autores que orientaram o desenvolvimento desta pesquisa. Têm-se como objetivos: reconhecer as ideias que surgem na comunicação oral e escrita em um contexto de problematização em sala de aula, compreender quais tarefas são propícias para o raciocínio combinatório e procurar sinais da contribuição de um estudo da combinatória vinculado ao desenvolvimento do pensamento probabilístico. A pesquisa foi realizada com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino do interior do estado de São Paulo, que realizaram uma sequência de 18 tarefas com foco na linguagem relacionada à combinatória e à probabilidade, bem como no raciocínio combinatório e no probabilístico. Ao final dessas tarefas, os alunos realizaram individualmente outras 5 sobre probabilidade para investigar os indícios do trabalho realizado, de acordo com Hiebert et al (1997). As tarefas propostas foram desenvolvidas a partir dos estudos de Antonio Lopes (2000), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994); Celi Lopes (2003); Godino, Batanero e Cañizares (1996); Macedo; Petty; Passos (1997); São Paulo (1998); e Skovsmose (2008). A dinâmica de desenvolvimento das aulas segue as orientações de Christiansen e Walther (1986), que propõem três fases − apresentação, atividade independente e reflexão conclusiva. A análise centra-se em dois eixos. No primeiro deles, episódios, estudam-se as ideias de combinatória que emergem em um processo de comunicação oral e escrita, em um contexto de problematização. No segundo eixo, são analisadas as contribuições do estudo da combinatória ao pensamento probabilístico. A partir da análise, é possível observar que os alunos possuem conceitos sobre combinatória e probabilidade e − ao se verem diante de uma proposta de ensino problematizadora, relacionada à linguagem e a uma cultura de aula de Matemática apropriada − podem se envolver em um processo de elaboração conceitual, (re)significando conceitos, atingindo outros mais complexos. Ademais, a articulação da combinatória e da probabilidade com elementos mediadores – linguagem, tarefas e ambiente de aprendizagem – leva à imbricação do raciocínio combinatório e do pensamento probabilístico por meio de significações, permitindo a aprendizagem com compreensão.

Palavras-chave: Raciocínio combinatório. Pensamento probabilístico. Educação Estatística. Ensino e aprendizagem.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **The production of combinatory and probability meanings in an Elementary School 6th year's classroom through a problematizing practice.** 2015. 190p. Thesis (Doctorate's degree in Education) – *Stricto Sensu* Post-graduation Program in Education, University São Francisco, Itatiba, 2015.

ABSTRACT

This qualitative study aims at understanding the insights gathered in pedagogic work through the perspective of problematisation with students in the 6th year of Elementary School. The main goal is to develop the students' probabilistic thinking and combinatory reasoning by articulating these two. Our theoretical basis is the historic-cultural perspective, which considers the classroom – a learning environment to the students and in this case to the teacher-researcher as well – a context for the research, as proposed by Freitas (2009, 2010). The contributions of this perspective in the formation of scientific concepts and in producing meanings are based on the works of Fontana (2005, 1993), Friedrich (2012), Núñez (2009), Oliveira (2004), Smolka (2010) and Vygotsky (1991, 2001), also taken as the research's main guiders. Our goals include: recognizing ideas that emerge from oral and written communication in a context of problematization in classroom; understanding which tasks enable combinatory reasoning; and looking for the contribution of a combinatory study linked to the development of probabilistic thinking. The research was carried out with students in the 6th year of Elementary School in a state school located in the countryside of São Paulo. The students have performed a sequence of 18 tasks focused on language related to combinatory and probability. At the end of those tasks, they have engaged individually into other 5 activities regarding those topics in order to investigate clues resulting of the work performed, according to the definition of Hiebert et al (1997). The suggested tasks were developed with the support of Antonio Lopes (2000), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994); Celi Lopes (2003); Godino, Batanero and Cañizares (1996); Macedo; Petty; Passos (1997); São Paulo (1998); and Skovsmose (2008). The dynamics of class development followed the guidelines of Christiansen and Walther (1986), who suggest three distinct phases – presentation, independent activity and conclusive reflection. There are two axes for the analysis. In the first one, episodes, the ideas of combinatory emerging in oral and written communication processes are analyzed in a problematization context. In the second ax, the study turns to the contributions of the combinatory study and probabilistic thinking. One can observe that students possess concepts regarding combinatory and probability and when confronted to a problematizing learning proposal – related to language and a culture of class of appropriated mathematics – can involve themselves in a process of conceptual elaboration, (re)signifying concepts and therefore reaching newer and more complex ones. Furthermore, the articulation of combinatory and probability with mediating elements – language, tasks and learning environment – leads to the intermingling of combinatory reasoning and probabilistic thinking through significations, allowing a process of comprehensive learning.

Keywords: Combinatory reasoning. Probabilistic thinking. Statistical education. Teaching and learning.

FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ESQUEMAS

LISTA DE DIAGRAMAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
DC	Diário de Campo
D.r	Doutor
D.ra	Doutora
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
ETEC	Escola Técnica Estadual
GPEE	Grupo de Pesquisa em Educação Estatística
Grucomat	Grupo Colaborativo de Matemática
IESI	Instituto de Ensino Superior
MEC	Ministério de Educação e Cultura
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
Prof.	Professor
Prof.ª	Professora
PUC/SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SP	São Paulo
UFCG	Universidade Federal de Campina Grande
Unesp	Universidade Estadual de São Paulo
Unifia	Faculdades Integradas de Amparo
USF	Universidade São Francisco

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa se insere no campo da Prática Pedagógica em Educação Matemática, com foco nas significações produzidas pelos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental a partir da articulação entre a combinatória e a probabilidade. Considero[1] a sala de aula em que atuei como professora-pesquisadora[2] como espaço de investigação.

Este estudo desencadeou-se a partir da pesquisa de mestrado que realizei no programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, na Universidade São Francisco, intitulada *O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino fundamental* e defendida em março de 2010. A pesquisa de doutorado iniciou-se após a de mestrado, ou seja, no segundo semestre de 2010.

Na pesquisa de mestrado, algumas observações relacionadas à probabilidade e à combinatória me deixaram inquieta, bem como a provocação da banca de defesa para o aprofundamento da questão em novos estudos. Constatei que diversos alunos não estimavam a probabilidade da maneira esperada devido a equívocos de interpretação de espaço amostral. Por exemplo, em uma tarefa que envolvia o lançamento de duas moedas, os alunos consideravam apenas três possibilidades, cara-cara, coroa-coroa e cara-coroa, sendo que o inverso, coroa-cara, não era calculado e até mesmo aceito como mais uma possibilidade, pois alegavam ser a mesma possibilidade que cara-coroa.

Outro apontamento foi a indicação, por parte dos alunos, dos termos *possibilidade* e *probabilidade*, os quais eram colocados como sinônimos. Tal constatação também me preocupou, pois definir as possibilidades no lançamento de um dado não é mesmo que determinar as probabilidades.

Além do exposto, observei que, quando solicitei que um aluno que estimava a probabilidade de maneira formal escrevesse todas as possibilidades de determinada situação, ele as organizou de forma alfabética − por exemplo, AB, AC, BA, BC, CA e CB −, não aleatória − BA, CB, AB, BC, AC, CA. Isso pode ser um indicativo da importância de organização dos dados ao definir o espaço amostral.

[1] Optei por utilizar a primeira pessoa do singular, entendendo que minha voz traz múltiplas vozes, dos autores, dos alunos e dos parceiros desta pesquisa. Além disso, compartilho das considerações de Coracini (1991), que considera que o uso da primeira pessoa em discurso (texto) científico não rompe com a objetividade, uma vez que é garantida pela forma dêitica.

[2] Em alguns momentos utilizo o termo *professora-pesquisadora* porque a pesquisa foi realizada na sala de aula em que atuava como professora de Matemática dos sujeitos investigados. Assim, professora e pesquisadora eram a mesma pessoa.

Na revisão bibliográfica que realizei no banco de dissertações e teses postadas no "Portal Domínio Público"[3] e no "Banco de Teses da Capes"[4], verifiquei que há poucos trabalhos envolvendo o ensino da combinatória, sendo que na maioria deles o foco é o Ensino Médio. Quanto ao ensino da probabilidade, o número de pesquisas é um pouco maior; no entanto, poucas relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem no Ensino Fundamental. Conforme se observa nos quadros a seguir.

Quadro 1 – Dissertações postadas no Portal Domínio Público

Área de conhecimento: Educação e Ens. de Ciências/Matemática Palavra-chave: combinatória		Área de conhecimento: Educação e Ens. de Ciências/Matemática Palavra-chave: probabilidade		Área de conhecimento: Educação e Ens. de Ciências/Matemática Palavra-chave: Estatística	
Mestrado	Doutorado	Mestrado	Doutorado	Mestrado	Doutorado
2	0	7	0	20	3

Fonte: Organizado pela pesquisadora

Quadro 2 – Dissertações postadas no Banco de Teses da Capes

Área de conhecimento: Educação e Ens. de Ciências/Matemática/ Educação Matemática Palavra-chave: combinatória		Área de conhecimento: Educação e Ens. de Ciências/Matemática/ Educação Matemática Palavra-chave: probabilidade		Área de conhecimento: Educação e Ens. de Ciências/Matemática/ Educação Matemática Palavra-chave: Estatística	
Mestrado	Doutorado	Mestrado	Doutorado	Mestrado	Doutorado
9	0	6	2	15	1

Fonte: Organizado pela pesquisadora

As dissertações e teses postadas no "Portal Domínio Público" não são as mesmas que as do "Banco de Teses da Capes". O número de pesquisas relacionadas à Estatística é maior e

[3] O "Portal Domínio Público", biblioteca virtual do Ministério de Educação e Cultura (MEC), lançado em 2004, propõe o compartilhamento de conhecimentos, dentre eles de dissertações e teses produzidas em diferentes áreas. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaPeriodicoForm.jsp>. Acesso em: 4 fev. 2015.

[4] http://bancodeteses.capes.gov.br/. Acesso em: 3 jun. 2015.

a diversificação também, pois observei trabalhos relacionados ao ensino e à aprendizagem desde a Educação Infantil até o Ensino Superior; estudos sobre as concepções de professores, análise de currículo e livros didáticos quanto à temática; entre outros. Acredito que essa ênfase se dê devido à obrigatoriedade da disciplina nos diversos campos de formação acadêmica e a sua influência explícita em ações cotidianas.

Na área de conhecimento da Matemática do "Portal Domínio Público", não apresentada no quadro acima, foram encontrados 18 trabalhos, sendo que apenas 3 deles trazem questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Educação Básica e da Formação de Professores. No "Banco de Teses da Capes", 7 trabalhos da área da Matemática não estavam relacionados às questões de ensino e/ou aprendizagem da Educação Básica, do Ensino Superior ou da Formação de Professores.

Dentre os grupos colaborativos, o grupo "Geração" da Universidade Federal de Pernambuco tem se dedicado a estudos em raciocínio combinatório. Ele é formado por duas pesquisadoras, Prof.ª D.ra Rute Elizabete de Souza Rosa Borba e Prof.ª D.ra Cristiane de Arimatéa Rocha, e por estudantes de graduação e pós-graduação. Desde seu registro em 2009, o grupo vem estimulando a pesquisa neste campo. Até o momento, quatro de seus integrantes realizaram pesquisa de mestrado e um de doutorado. Esses trabalhos não são compartilhados no "Portal Domínio Público", mas sim no *blog* do grupo.[5]

O Grupo de Pesquisa em Educação Estatística (GPEE)[6] − organizado pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e pelo Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação da Unesp, Rio Claro/SP − tem desenvolvido estudos relativos ao Ensino e à Aprendizagem da Estatística desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Os principais trabalhos do grupo envolvem Modelagem Matemática, Tecnologia e Educação à Distância, Educação Ambiental, Formação de Professores, Educação Matemática e Crítica e História do Ensino de Estatística. O grupo é composto pela Prof.ª D.ra Maria Lúcia Lorenzetti Wodewotzki e por seus orientandos e ex-orientandos.

Pesquisas no campo da Educação Estatística também são desenvolvidas pelos estudantes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro de Sul[7], em São Paulo, orientados pela Prof.ª D.ra Celi Espasandin

[5] Disponível em: <http://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/tcc.html>. Acesso em: 5 fev. 2015.
[6] Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpee/>. Acesso em: 03 jun. 2015.
[7] Os trabalhos da Universidade Cruzeiro do Sul não são publicados no "Portal Domínio Público" nem no *site* da Instituição.

Lopes. Além disso, há estudos sendo feitos no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)[8], por um grupo coordenado pela Prof.ª D.ra Cileda Coutinho.

O trabalho de Antonio Carlos de Souza, *O desenvolvimento profissional de educadoras da infância: uma aproximação à Educação Estatística*, assim o como da Prof.ª Adriana Luziê de Almeida, da Universidade Federal de Ouro Preto, intitulado *Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio*, auxiliaram-me em minha pesquisa. Ambos se desenvolveram em um ambiente que estimulava a argumentação e a discussão de situações-problema relacionadas à combinatória e à probabilidade, mas com sujeitos distintos: professoras da Educação Infantil e do 1º ano do Ensino Fundamental (SOUZA, 2013) e alunos do 2º ano do Ensino Médio (ALMEIDA, 2010).

Assim como no mestrado, encontrei dificuldades para localizar trabalhos de pesquisa sobre a combinatória. Mesmo porque nem todos são divulgados em *sites* oficiais de pesquisa, mas sim em eventos; e Anais nem sempre estão disponíveis, dificultando que um levantamento bibliográfico seja desenvolvido de maneira ampla. Há instituições que não disponibilizam os próprios trabalhos. Busquei pesquisas disponibilizadas no “Portal Domínio Público” e no *site* da Capes relacionadas à combinatória e à probabilidade e não encontrei nenhuma investigando a articulação desses conceitos. A não localização de trabalhos nessa perspectiva sinaliza a importância da presente pesquisa, realizada em uma sala de aula regular de Ensino Fundamental de uma escola pública, na qual a pesquisadora atua como professora, tendo como foco a articulação entre combinatória e probabilidade.

Assim, busco, a partir das ideias apresentadas pelos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, articular os conhecimentos sobre probabilidade e pensamento combinatório e encontrar respostas para a seguinte questão de investigação: “Quais indícios de articulação entre conceitos probabilísticos e combinatórios podem ser identificados em uma prática problematizadora, pautada nas interações e na produção de significações com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental?”. Tal questão remete a alguns objetivos específicos:

---

[8] Disponível em: <http://www4.pucsp.br/~cileda/>. Acesso em: 06 ago. 2015.

- Identificar as ideias sobre combinatória que emergem do processo de comunicação oral e escrita, tendo como contexto a problematização em sala de aula;
- identificar quais tarefas são potencializadoras para o raciocínio combinatório;
- buscar indícios da contribuição de um estudo da combinatória articulado ao desenvolvimento do pensamento probabilístico.

A tese está centrada no pressuposto de que um estudo articulado entre combinatória e probabilidade possibilita o desenvolvimento do pensamento probabilístico *com significação* aos alunos do Ensino Fundamental. Compreendo que evidências poderão ser obtidas em um contexto de sala de aula que inclua tarefas em uma prática problematizadora. Na literatura, há autores que defendem a importância de tal articulação, como Lopes e Coutinho (2009); entretanto, raras são as evidências apresentadas em dados concretos de sala de aula, em suas reais condições de trabalho. Esse fato é observado por Fernandes, Correia e Roa (2010), que destacam a reduzida exploração de investigações didáticas sobre combinatória e probabilidade.

Diante do exposto, optei por fazer uma pesquisa de cunho qualitativo, baseada na perspectiva histórico-cultural, que considera a sala de aula um ambiente de aprendizagem de alunos e professores, tratando-a como contexto de pesquisa, como espaço de formação, tal como propõe Freitas (2009; 2010). Essa perspectiva leva em conta os pressupostos de Vygotsky[9], que considera a linguagem como uma função básica para o desenvolvimento do ser humano a partir do intercâmbio social e do desenvolvimento do pensamento generalizante. As contribuições da perspectiva histórico-cultural na formação de conceitos científicos, na produção de significações, são apontadas por autores como: Fontana (1993; 2005), Friedrich (2012), Núñez (2009), Oliveira (2004), Smolka (2010) e Vygotsky (1991; 2001), os quais me orientaram na realização desta pesquisa.

Os sujeitos envolvidos são alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, com idade entre 11 e 13 anos, de uma escola da rede pública estadual da cidade de Amparo, interior de São

[9] Diferentes grafias são utilizadas para o nome “Vygotsky”. Nesse texto ela será adotada da forma como se apresenta nas diferentes obras referenciadas. No entanto, em momentos em que me refiro ao autor, por suas concepções apresentadas em várias obras, utilizarei a forma “Vygotsky”. Nesse caso também não utilizarei data da obra, por não estar me referindo a uma obra específica e sim a seus conceitos.

Paulo, em que fui professora de Matemática durante 11 anos. A pesquisa foi desenvolvida no decorrer das aulas de Matemática sendo eu a pesquisadora e a professora (professora-pesquisadora). A sala de aula possuía 28 alunos.

Os dados da pesquisa foram produzidos no primeiro semestre do doutorado, uma vez que as classes do 6º ano nas quais eu ministrava aulas eram propícias à investigação. Esses dados foram produzidos a partir de: registos dos alunos diante das tarefas propostas, Diário de Campo da professora-pesquisadora, transcrições de áudio do diálogo entre professora-pesquisadora e alunos no desenvolvimento das tarefas de investigação em grupos e gravações em vídeo dos momentos de socialização coletiva das tarefas realizadas.

Foram desenvolvidas inicialmente 18 tarefas com os alunos, que proporcionaram a eles o contato com a linguagem ligada à combinatória e à probabilidade, bem como o raciocínio combinatório e probabilístico. Tais tarefas tinham como objetivo principal promover a reflexão sobre a análise combinatória e pensamento probabilístico nas aulas de Matemática. Ao final dessas tarefas, os alunos realizaram individualmente outras cinco tarefas sobre probabilidade, as quais eu já havia proposto, em minha pesquisa de mestrado, aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, visando evidenciar quais as concepções sobre probabilidade emergiram nas respostas desses estudantes.

As tarefas propostas sobre raciocínio combinatório e pensamento probabilístico foram desenvolvidas a partir de estudos feitos por Batanero, Godino, e Navarro-Pelayo (1994). Outros autores também foram referências para este trabalho: Antonio Lopes (2000), Celi Lopes (2003), Godino, Batanero e Cañizares (1996), Macedo, Petty e Passos (1997), São Paulo (1998) e Skovsmose (2008).

Para o desenvolvimento das tarefas desta pesquisa de doutorado, os alunos foram organizados em duplas, mas alguns trios foram formados quando a quantidade de alunos da sala de aula era ímpar. Em minha dissertação de mestrado (SANTOS, 2010), optei por realizar todas as tarefas em grupos de quatro pessoas. Entretanto, essa experiência evidenciou que nem sempre essa disposição se tornava produtiva, observei que em algumas ocasiões dois alunos produziam enquanto outros dois pouco se envolviam com a tarefa. Dessa forma, para a pesquisa de doutorado, optei por desenvolver a maioria das tarefas em duplas. Além disso, selecionei algumas duplas para os momentos de socialização, aquelas que evidenciaram estratégias diferenciadas de resolução. Certamente, enquanto pesquisadora e professora, tinha o cuidado para que as diferentes duplas tivessem a oportunidade de expor seu modo de pensar. A dinâmica de desenvolvimento foi elaborada a partir da proposta de Christiansen e Walther (1986), sugerindo três fases[10]: (1) apresentação; (2) atividade independente; e (3) reflexão conclusiva.

A fase de apresentação é aquela em que o professor apresenta a tarefa que será desenvolvida pelos alunos. A de atividade independente é aquela em que os alunos realizam as tarefas propostas, discutem no grupo, ou na dupla, suas considerações. A fase da reflexão conclusiva é o momento em que os grupos discutem coletivamente suas considerações, tentando chegar a uma conclusão coletiva.

Em todas as fases, o professor tem um papel fundamental, o de mediador de conhecimentos. As tarefas, organizadas por ele, têm como propósito desenvolver determinados conceitos matemáticos, mas é por meio de problematizações provocadas pelas tarefas e da mediação do professor no momento de sua elaboração e de sua socialização que ideias serão apresentadas e desenvolvidas pelos alunos.

Acredito que o processo de produção, interpretação e análise na pesquisa qualitativa é permeado por opções as quais realizei no decorrer de minha trajetória. De acordo com Smolka (2010), a dinâmica da personalidade é drama que invade/permeia o gesto de ensinar. Nesse sentido, apresento um pouco de minha trajetória estudantil e profissional.

1.1 Apresentando a pesquisadora

Nasci em Monte Alegre do Sul, pequena cidade do interior de São Paulo. Foi lá que iniciei minha trajetória estudantil aos 5 anos, quando minha mãe me matriculou na pré-escola da Escola Estadual “Prof. Clodoveu Barbosa”. Morávamos na zona rural da cidade, e todos os dias eu, meu primo e outras crianças do sítio em que residíamos caminhávamos cerca de dois quilômetros até essa escola, que ficava na zona urbana. Ela era a única da zona urbana e oferecia todos os níveis de ensino; as demais escolas do município, as isoladas, tinham uma única professora para todas as turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental e contemplava somente essa modalidade de ensino – eram as classes multisseriadas. Estudei nessa escola até o 3º ano do Ensino Fundamental, e, nesse percurso, era considerada uma boa aluna, tinha boas

[10] A tradução do texto de Christiansen e Walther (1986) apresentada pelo Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa utiliza o termo *estágio* em vez de *fase*. Considero adequado para o texto a última forma, a qual usarei no decorrer no texto.

notas, principalmente na disciplina de Matemática. Além dos estudos, participava de teatros, desfiles, apresentações, tarefas múltiplas, atividades que tenho ainda em minha memória.

Iniciei o 4º ano do Ensino Fundamental em uma escola da cidade de Jaguariúna/SP, porque minha família se mudou para lá. Não tive problemas em me adaptar na nova escola e rapidamente já estava envolvida nas atividades educativas. Era uma criança muito comunicativa, na verdade falante, estava sempre sorrindo. Lembro-me, que a professora da 4ª série[11] toda semana nos dava uma redação para fazer, algumas vezes com um único tema para a classe, outras com temas diferentes para os alunos. Uma vez disse que o meu seria "A cabritinha alegre", toda sorridente fiz a redação, sem perceber porque recebi aquele tema.

Estudei em outra escola dessa cidade até o último ano do Ensino Fundamental, quando eu e minha família retornamos a nossa cidade natal. Quando isso ocorreu já estava em período de iniciar o Ensino Médio e optei pelo Magistério, pois tinha o desejo de ser professora; além disso, essa parecia uma boa opção, porque depois de quatro anos já teria uma profissão. Como só havia magistério no período da manhã, pela necessidade de os alunos estagiarem, ingressei também em um curso técnico, Processamento de Dados, no período noturno. Concluí ambos os cursos em 1993.

Como aluna da Educação Básica sempre tive boas notas, principalmente nas disciplinas da área de ciências exatas. Porém, compreender todas as regras e suas exceções nas aulas de Língua Portuguesa não era, para mim, tarefa fácil. Minha prática de leitura resumia-se aos gibis que meu vizinho me emprestava e a alguns livros que a professora distribuía nas aulas de leitura.

Minhas aulas de Matemática foram marcadas pelas longas listas de exercícios e pelo uso de fórmulas, na maioria das vezes apresentadas por meus professores, de forma que os exercícios só poderiam ser resolvidos por meio delas. Quando havia prova, ao estudar, seguia os passos dados pela professora na sala de aula, refazia todos os exercícios do caderno e geralmente me saía bem.

Aulas práticas não faziam parte da rotina da escola, mas do meu dia a dia sim: desde muito pequena ia à padaria e ao supermercado para minha mãe, prática comum nas cidades do interior, onde a maioria das pessoas se conhece. Comprava o que ela me pedia, calculava o quanto gastaria e qual deveria ser meu troco antes de chegar ao balcão. Os jogos com baralho faziam parte de nossas reuniões familiares e as crianças, para não atrapalharem os adultos,

[11] Atual 5º ano.

recebiam um baralho para também jogar. Aprendi a jogar cedo e demonstrava habilidade, elaborava diversas estratégias para tentar vencer, mas às vezes o azar não permitia que isso acontecesse; e, para tentar livrar-nos dele, criávamos alguns rituais, como não cruzar as pernas na hora de receber as cartas, esfregar as mãos quando se iniciava um novo jogo, trazer alguns amuletos no bolso, etc. As quatro operações, necessárias para a realização do jogo, eram feitas mentalmente por mim, sem grandes dificuldades.

O período do Ensino Médio foi uma época muito difícil, pois minha família passava por sérias dificuldades financeiras. Muitas vezes pensei em desistir de estudar e arrumar emprego, porém a vontade de estudar era maior, e a oportunidade não tardou a aparecer, pois comecei a atuar em uma escola particular de Educação Infantil antes mesmo de me formar, o que possibilitou que eu ingressasse na Faculdade após a conclusão do curso do Magistério.

Dessa forma, em 1994 iniciei a graduação em Ciências com habilitação em Matemática na Faculdade de Ciências e Letras “Plínio Augusto do Amaral”, atual Centro Universitário Amparense, Faculdades Integradas de Amparo (Unifia), na cidade de Amparo/SP. Assim que conclui essa graduação, iniciei o curso de Pedagogia na mesma Universidade.

Sobre minha experiência como docente, como já mencionei, quando estava no último ano do curso de magistério (1993) comecei a atuar como auxiliar de professor em uma escola particular de Educação Infantil, na cidade em que fazia o Magistério e, dois meses depois, fui contratada como professora. Após um ano e meio de trabalho nessa escola, fui aprovada em um concurso público para o cargo de professora de Educação Infantil no município em que morava, o que me despertou interesse em fazer Pós-Graduação em Educação Infantil. Nesse município, trabalhei por 13 anos: além da Educação Infantil, ministrei aulas no Ensino Fundamental I, inclusive em classe de Alfabetização, e desempenhei a função de professora-coordenadora no Ensino Fundamental II. Durante esse tempo, também me efetivei como professora de Matemática na rede estadual de ensino, em que trabalhei por 17 anos. Trabalhei, portanto, em municípios, escolas, funções, segmentos e, principalmente, em realidades muito distintas.

No período em que atuei no município, vivenciei as mudanças que ocorriam a cada troca de Secretário de Educação. Houve aquele que não adotava metodologia alguma: cada professor utilizava o que conhecia ou era conveniente. Houve momentos em que trabalhamos com uma “metodologia holística”, fazíamos relaxamento com as crianças, caminhadas na areia, eventos com pais tocando violões, coleções de pedras, etc. Depois veio o momento do construtivismo, em que desenvolvíamos tarefas individuais para identificar em que fase do conhecimento lógico-matemático os alunos se encontravam. O sistema apostilado também foi adotado, com o discurso de "unificar o ensino nas escolas municipais". A descontinuidade de metodologias e concepções é prática comum a cada nova troca de Secretário, pois, sob o ponto de vista político, as administrações são marcadas pela diferença e, com isso, adotam "ou impõem" modismos, deixando de lado o processo específico de ensino e os agentes (professores), que raramente são ouvidos, atendidos ou bem interpretados pelos novos gestores.

Durante os anos de atuação como professora de Matemática de crianças e adolescentes, observei o que me deixava muito angustiada: os alunos habitualmente apresentavam dificuldades em resolver problemas, insistindo em encontrar números e "fazer uma conta", sem a preocupação de "pensar sobre" o problema encontrado. Muitos estudantes diziam não gostar da disciplina porque não encontravam sentido no que faziam ou nos problemas convencionais propostos pelos materiais didáticos. Procurei colegas da área para refletirmos sobre essas questões e ouvi muitos comentários como: "*Eles não sabem ler e interpretar, e só o professor de Língua Portuguesa pode auxiliá-los nisso*"; "*Falta conhecimento prévio, e não sou professor primário e não sei como resolver isso*"; "*Eles não têm interesse e isso não é culpa minha e sim da família que não os incentiva*", etc. Para minimizar essas angústias e, talvez criar outras, resolvi fazer o mestrado, pois buscava, por meio dos estudos e das pesquisas, redimensionar minhas crenças e meus valores sobre o ensino da Matemática.

Meus anseios e os estudos no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco, sob a orientação da Profª D.ra Regina Célia Grando, na linha de pesquisa *Matemática, Cultura e Práticas Pedagógicas*, conduziram-me a desenvolver pesquisa na escola em que atuava como professora de Matemática em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental. Essa foi minha primeira experiência como professora-pesquisadora, e o foco de estudo foi o Pensamento Probabilístico.

Quando estava no mestrado fui convidada por minha orientadora para integrar o Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat[12]), o qual ela coordenava com a professora Adair

[12] O Grupo Colaborativo de Matemática (*Grucomat*) é um grupo institucional, vinculado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco (USF), *campus* de Itatiba/SP. O Grupo tem se constituído como um espaço de estudos e pesquisas sobre a Matemática na escola básica. É composto

Nacarato. Fazer parte de um grupo colaborativo de pesquisa foi muito importante, tanto para a minha pesquisa − porque o tema seria passível de análise e discussão no Grupo, uma vez que esse era o conteúdo de estudo do grupo naquele momento − quanto para minha formação enquanto pesquisadora, pois as investigações eram desenvolvidas pelo grupo em uma perspectiva dialógica, todos os integrantes tinham "voz", eram ouvidos. Os estudos eram planejados coletivamente. Esse contexto, essa experiência, para um ingressante na pesquisa acadêmica é significativo.

Como mencionado, assim que concluí o mestrado ingressei no programa de doutorado da mesma instituição. Também como supracitado, buscava investigar os conceitos produzidos a partir de um trabalho articulado entre a combinatória e a probabilidade em uma perspectiva problematizadora.

No período em que estava cursando o doutorado fui aprovada no concurso para a vaga de Professor de Matemática para atuar em classes do Ensino Médio das escolas: ETEC "João Belarmino", em Amparo/SP, e ETEC "José Maria Stevanatto", em Itapira/SP. Essa oportunidade veio a acrescer para minha experiência docente, pois já havia atuado em todos os níveis de ensino, a maior parte na escola pública. No entanto, mesmo as ETECs sendo escolas públicas, são administradas pela Secretaria de Tecnologia do Estado de São Paulo. Dessa forma, diversos fatores as diferenciam das escolas de Ensino Médio Estadual, como a quantidade de aulas por disciplina − no caso da Matemática, são três aulas semanais apenas −, os investimentos nos laboratórios de ensino e a forma como o processo de ensino e aprendizagem são avaliados.

Tal avaliação ocorre uma vez ao ano, quando profissionais da Administração Central compareciam à escola para fazer o "observatório", que consiste em uma análise completa de todo o trabalho desenvolvido por meio de documentos e discursos de funcionários e alunos escolhidos aleatoriamente com o intuito de verificar a veracidade dos documentos e, a partir daí, emitir uma nota e estabelecer metas para o próximo ano. Não considero essa avaliação, formas de controle, como positivas ao processo de ensino e aprendizagem, mas o fato de a escola ter um trabalho organizado, com objetivos definidos, contribui para uma boa prática educativa.

---

pelas professoras que atuam na Universidade, por professores da escola básica e do ensino superior, bem como por alunos da pós-graduação (mestrado e doutorado em Educação), que também são professores da escola básica. Há mais informações disponíveis em: <http://grucomat.blogspot.com.br/>. Acesso em: 30 ago. 2014.

Concomitante a esse período, iniciei a experiência com o Ensino Superior, quando fui contratada pelo Instituto de Ensino Superior (IESI), na cidade de Itapira/SP, como professora de Matemática do curso de Ciências da Computação para ministrar aulas de Cálculo e Álgebra Linear. A minha contratação no IESI foi possível devido ao mestrado, pois o instituto procura contratar professores com tal formação. Atuar no Ensino Superior tem sido uma experiência relevante em minha carreira profissional, já que atuei em outros níveis. No início de 2012, fui convidada pela coordenadora do curso de Pedagogia da instituição para ministrar a disciplina de Alfabetização e Letramento, oportunidade que abracei de imediato, pois desejava ministrar aulas para esse curso, já que sempre estive envolvida com os processos de ensino e aprendizagem da Educação Básica. À convite da então coordenadora, assumi não somente as aulas, como me tornei a coordenadora do curso de Pedagogia. A experiência se ampliou e contribuiu para que minhas atuações enquanto formadora passassem do ambiente de sala de aula, com os alunos da Educação Básica, para um espaço de formação de professores para nela atuar.

A princípio, assumir a coordenação foi assustador, pois a realidade das escolas em que atuei se difere muito da encontrada na universidade, tanto na parte administrativa e burocrática como na parte pedagógica. Percebi, neste ambiente, que o conhecimento e as experiências que vivenciei na atuação em Educação Básica eram relevantes para o desempenho da função de professora e de coordenadora, mas que outros saberes eram fundamentais, pois o público envolvido precisa de conhecimento prático e científico para se convencer e se formar. A relação teoria e prática necessita ser o eixo articulador da formação docente, tendo a pesquisa como uma possibilidade dessa relação.

Nesse período já era aluna do doutorado, e os estudos realizados em disciplinas como “Trabalho Docente” e a troca com profissionais que atuavam no ensino superior foram fundamentais para que eu cumprisse essa jornada. Além disso, a minha participação no Grucomat colaborou para o desenvolvimento dessa função, uma vez que estava envolvida em pesquisas relacionadas à Educação Matemática e também encontrava espaço para discutir as problemáticas relacionadas ao ensino e à aprendizagem das(os) futuras(os) pedagogas(os).

Atuando há três anos no Ensino Superior, percebo que novas habilidades foram incorporadas em minha prática pedagógica. Considero que todas as experiências vividas foram relevantes para minha formação profissional, mas que o “espírito investigativo” desenvolvido, ou aflorado, com o ingresso no mestrado foi o ponto-chave.

A partir da “postura investigativa”, participei de muitos eventos relacionados à pesquisa em Educação Matemática no Brasil e em países da América Latina, como Uruguai e Colômbia. Também fui à Universidade de Granada, na Espanha, para conversar com a professora e pesquisadora Carmen Batanero, que desenvolve pesquisas na área de Educação Estatística e foi uma das produtoras do material em que me orientei para desenvolver a presente pesquisa. Conversei também com o professor Rafael Roa, que foi orientando da professora Carmen Batanero e desenvolveu uma pesquisa sobre o conhecimento da combinatória dos alunos que faziam licenciatura em Matemática; nossas conversas foram enriquecedoras para minha pesquisa.

Nesses encontros na Universidade de Granada, apresentei minhas pesquisas − a de mestrado, que estava concluída, e a de doutorado, em andamento e os dados do doutorado que já estavam coletados. Discutimos um pouco sobre conceitos, mas focamos nas tarefas realizadas pelos alunos e nas possibilidades de categorias de análise. O fato de desenvolver pesquisa em sala de aula e ser professora-pesquisadora foi muito apreciado por Batanero.

Depois da visita à Universidade de Granada, participei do “Encuentro Colombiano de Educación Estocástica”, que aconteceu em Bogotá, Colômbia, em 2014. Considero que essa participação foi relevante para a solidificação de ideias a respeito da combinatória e da probabilística, uma vez que o foco das apresentações do evento foi a estocástica[13]. Como o encontro não envolveu muitos participantes, houve a possibilidade de conversas com os pesquisadores para além das apresentações. Trocamos referências, sugestões de leitura, discutimos pontos de algumas apresentações, entre outras coisas.

De forma semelhante ao observado na revisão bibliográfica realizada, a maioria dos trabalhos apresentados abordava a Estatística, e alguns, a probabilidade. Dos 50 trabalhos apresentados, apenas um tinha como foco a combinatória. Todos discutiam a relação de ensino e aprendizagem da estocástica a partir de livros didáticos, organização do currículo, nas concepções dos professores sobre o tema, etc. Percebi, nesse evento, a preocupação dos latino-americanos a respeito do ensino e da aprendizagem da Estocástica voltados para os alunos.

---

[13] Entende-se “estocástica” como um termo europeu utilizado para incluir combinatória, probabilidade e estatística. Como afirma Shaughnessy (1992, p. 465): “*Stochastics the common European term to include ‘probability and statistics’*”.

Recentemente, uma oportunidade foi acrescentada a minha trajetória profissional: fui aprovada no concurso de Professor de Ensino Superior da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), para o campus de Cuité/PB, área de Educação Matemática do curso de Licenciatura em Matemática. Assumi o cargo em fevereiro e estou ministrando aulas nas disciplinas de Metodologia e Prática de Ensino II − cujo foco é o ensino da Matemática no quarto ciclo do Ensino Fundamental, 8º e 9º anos − e Estágio Supervisionado II, na qual oriento o estágio nos anos finais do Ensino Fundamental.

Desde o início de minha trajetória sempre atuei em mais de uma instituição e em diferentes níveis. Muitas vezes, não conseguia realizar o trabalho da forma como desejava, por falta de tempo para o planejamento e até mesmo por cansaço; nos últimos anos lecionava em três períodos: manhã, tarde e noite. Com isso, muitas vezes me senti frustrada. O fato de atualmente trabalhar exclusivamente em uma instituição tem me deixado muito satisfeita, pois tenho conseguido estudar, planejar e ministrar minhas aulas e também participar de reuniões na instituição. Essas ações fazem parte do trabalho do professor; portanto, penso que devem estar incorporadas a sua jornada de trabalho. Pretendo desenvolver projetos de pesquisa no próximo semestre, pois neste estou concluindo a tese de doutorado.

Essa nova experiência tem sido um grande desafio, pois, ao me mudar para lá, não conhecia nenhuma pessoa nem mesmo o local no qual trabalho; a cultura é bem diferente da que eu vivi no interior de São Paulo, mas estou me adaptando bem. Em alguns momentos da aula, em que estou dialogando com os alunos, não compreendo alguns termos que utilizam em seu vocabulário, assim como eles também não compreendem todos que emprego. Assim, a partir de suas colocações busco alguns de seus termos para utilizá-los em minha fala para que me compreendam melhor. Dessa forma, comunicamo-nos muito. Essa experiência tem sido muito interessante para mim e para os alunos, pois percebo que a vivência que tive, atuando por 21 anos como professora de Educação Básica, tem me ajudado como formadora de futuros professores de Matemática. Além disso, percebo que os alunos olham minha trajetória e observam que a prática docente aliada aos estudos pode conduzi-los a uma melhor atuação e também a possibilidades de progressão.

Concluir a pesquisa de doutorado neste momento, depois de uma longa trajetória profissional e estudantil, em que estou diante de uma nova e experiência, tem me deixado muito feliz, pois confesso que diante de minha realidade isso parecia um sonho quase impossível. Os estudos do Doutorado me ajudaram a perceber que minha trajetória não foi desenvolvida de forma linear, como parece, mas espiralada, de modo que os saberes adquiridos nas diferentes experiências se movimentam, até se distanciam em alguns momentos, mas não se separam, pois são (re)significados. O constante e dinâmico envolvimento nas vivências de contexto escolar, quando aluna, participando em eventos, e como professora, atuando em sala de aula, conduziu-me a desenvolver pesquisas em contexto de sala de aula, universo que é muito significativo para mim.

Quando apresento esta pesquisa, esclareço que sou professora-pesquisadora, ou seja, desenvolvo duplo papel diante dessa investigação: o de pesquisadora, enquanto aluna do doutorado que desenvolve sua tese, e o de professora, enquanto profissional que desenvolve as tarefas com seus alunos em suas aulas de Matemática. Ao analisar o episódio 1, busquei, enquanto pesquisadora, olhar para minha atuação enquanto professora, confesso que não foi fácil, pois percebo, no decorrer da transcrição, que minha atuação não é diferente das de outras aulas, em que não estou desenvolvendo a pesquisa. Dessa forma, tudo me parece muito natural. Não consigo olhar inicialmente e perceber algo que "me salta aos olhos".

Precisei refletir um pouco mais para perceber que o duplo papel assumido nessa pesquisa é adotado por mim, desde meu ingresso como aluna do mestrado, pois desde então desenvolvi o papel de professora e pesquisadora. Os estudos e as reflexões desenvolvidos no ambiente acadêmico, como estudiosa na área da pesquisa, foram incorporados à minha prática como professora, dificultando, assim, a dissociação dos papéis.

Porém, entendo que em alguns momentos, os saberes específicos de cada papel sobressaem-se, como os da pesquisadora diante do processo de pesquisa e os da professora no desenvolvimento das aulas. Percebo agora, ao olhar para o episódio 1, a presença de uma professora mediadora, que busca, por meio de uma dinâmica de comunicação e interação com seus alunos, articular conceitos espontâneos a problematizações, objetivando a formação de conceitos científicos, incorporada a uma pesquisadora que tem a intencionalidade de desenvolver a produção de significados sobre combinatória e probabilidade dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Finalizando esta apresentação, inicio a dos pressupostos teóricos que estruturam esta pesquisa. Discuto três aspectos considerados fundamentais, na perspectiva histórico-cultural, para o ensino da Matemática: a linguagem simbólica, o sistema conceitual e a problematização.

2 RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E PENSAMENTO PROBABILÍSTICO: LINGUAGEM, CONCEITOS E PROBLEMATIZAÇÕES NA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL

Pretendo, neste capítulo, explicitar algumas ideias relacionadas ao referencial teórico em que me baseei para a análise dos dados produzidos, das quais compartilho. Para tal, procurei discutir os três aspectos considerados fundamentais para o ensino da Matemática − a linguagem simbólica, o sistema conceitual e a problematização − na perspectiva histórico-cultural, que considera que o processo de conceitualização emerge da linguagem, do outro e do aprendizado em sua gênese e em seu desenvolvimento (FONTANA, 2005).

Entendo que as ideias de Lev Vygotsky e de seus colaboradores sobre as implicações das relações sociais na produção, a apropriação e a transformação de conceitos em circulação na sociedade em que o sujeito está inserido, estão imbricadas e devem ser consideradas na organização do ensino da Matemática. Dessa forma, considero pertinente expor também aspectos específicos da linguagem probabilística, dos conceitos de combinatória e probabilidade, além da cultura social de aula de Matemática na perspectiva de problematização.

2.1 A formação de conceitos na perspectiva histórico-cultural: possibilidades em contexto escolar

De acordo com Vygotsky (2001), a linguagem constitui duas funções básicas para o desenvolvimento do ser humano: o intercâmbio social e o desenvolvimento do pensamento generalizante. Para o autor, “é para se comunicar com seus semelhantes que o homem cria e utiliza os sistemas de linguagem” (OLIVEIRA, 2004, p. 42). Dessa forma, a linguagem é muito mais do que palavras, inclui formas de comunicações verbais e extraverbais, como gestos, sons, olhares, etc. É por meio dessa linguagem, gerada e desenvolvida no diálogo, que o ser humano cria seu mundo interior, apropria-se da sociedade em quem que vive e a transforma.

Na concepção de Vigotsky, o pensamento verbal e a linguagem racional surgem quando os processos de pensamento e linguagem se unem. Dessa forma, o sujeito tem a possibilidade de um desenvolvimento psicológico mais elevado, o pensamento generalizante.

> É essa função de pensamento generalizante que torna a linguagem um instrumento de pensamento: a linguagem fornece os conceitos e as formas de organização do real que constituem a mediação entre o sujeito e o objeto de conhecimento. A compreensão das relações entre pensamento e linguagem é, pois, essencial para a compreensão do funcionamento do psicológico do ser humano. (OLIVEIRA, 2004, p. 43).

O processo de construção de si, de desenvolvimento, que acontece pela reconstrução interna de operações externas é denominado por Vygotsky como internalização. Para o pesquisador, a internalização se dá por meio de práticas e conceitos desenvolvidos em determinados contextos, por meio das funções básicas − linguagem e pensamento generalizante−, que são apropriadas, (re)significadas e transformadas pelo sujeito. Assim, pelas relações sociais (atividade interpessoal), o sujeito desenvolve modos de ação/elaboração particulares (atividade intrapessoal) que o constituem. Esse processo, de acordo com Vygotsky, é uma reconstrução que

> [...] tem como base a mediação semiótica (particularmente a linguagem), e envolve as ações do sujeito, as estratégias e conhecimentos por ele já dominados, as ações, estratégias e conhecimentos do (s) outro (s) e as condições sociais reais de produção da (s) interação (ões). (FONTANA, 2005, p. 12).

À medida que o sujeito internaliza os modos de ação, os papéis e as funções sociais na interação com o outro, isso passa a dirigir seu próprio comportamento. No entanto, a possibilidade de autorregulação, considerada essencial ao desenvolvimento, permite que a atividade mental seja desenvolvida e transformada em funções mediadas, conscientes e deliberadas.

De acordo com Smolka (2000, p. 26), a internalização é um construto teórico central na perspectiva histórico-cultural. Isso porque “se refere ao processo de desenvolvimento e aprendizagem humana como *incorporação* da cultura, como *domínio* dos modos culturais de agir, pensar, de se relacionar com outros, consigo mesmo”.

Dentre as formas superiores de ação consciente, Vygotsky destaca a elaboração conceitual, “modo culturalmente desenvolvido dos indivíduos refletirem cognitivamente suas experiências” (FONTANA, 2005, p. 12). A elaboração conceitual decorre de um processo de abstração e generalização de dados sensoriais, que é mediado e materializado pela linguagem.

Os conceitos, segundo Fontana (2005, p. 13),

> [...] não são analisados como categorias intrínsecas da mente, nem como reflexo da experiência individual, mas sim como produtos históricos e significantes da atividade mental mobilizada a serviço da comunicação, do conhecimento e da resolução de problemas.

Segundo Vygotsky, a evolução do pensamento verbal nas crianças é fator determinante para a formação de conceitos, cuja evolução é marcada por duas linhas de desenvolvimentos. Uma delas se desenvolve espontaneamente na vida cotidiana, constituindo os conceitos espontâneos. A outra se desenvolve no contexto escolar, estabelecendo os conceitos científicos.

De acordo com suas pesquisas, Vygotsky concluiu que a formação dos conceitos científicos na criança passa por três fases básicas. Estas são compreendidas como estágios que se encontram nos períodos de desenvolvimento do pensamento e não de maturação biológica. São elas: pensamento sincrético, pensamento por complexo e pensamento conceitual (NÜÑEZ, 2009).

O pensamento sincrético é produzido na internalização de significados de uma determinada palavra pela criança, formado pelo conjunto de elementos dispersos, agrupados com base em conexões vagas e subjetivas. É um pensamento sensitivo, intuitivo, apresentado por meio de relações difusas e não relacionadas entre si. Qualquer estímulo externo pode desarticular esse tipo de pensamento. Os critérios utilizados para constituí-lo são imprecisos e podem ser alterados com muita facilidade durante a atividade. Ele se expressa no pensamento cotidiano. O avanço dessa fase, a princípio, é estabelecido por tentativas de ensaio e erro, por circunstâncias no tempo e no espaço e, depois, por agrupamentos elaborados.

O pensamento por complexos é marcado por nexos e relações de impressões desordenadas, que são unificadas e organizam dados de experiências. Nesta fase, a criança agrupa objetos e fenômenos por suas semelhanças, por seus contrastes e por suas proximidades no espaço. As associações apresentadas nesse estágio fazem com que as palavras em funções disjuntas deixem de ter sentido isolado e passem a ter sentido na generalização. Como consequência de várias conexões desenvolvidas por diferentes tipos e níveis de complexos, Vygotsky observou nessa fase cinco “sub-estágios”, classificados por ele como: tipo associativo, coleção, cadeia, complexos difusos e pseudoconceitos.

Para o referido autor, os pseudoconceitos e os conceitos possuem uma característica semelhante de formação: ambos agrupam objetos a partir de suas características particulares, mas se diferenciam psicologicamente, em virtude das especificidades das abstrações geradas em seu processo de elaboração. Nos pseudoconceitos, a criança isola atributos essenciais dos conceitos, porém não os separa da experiência. Eles não se fundamentam em um sistema lógico abstrato como os conceitos, que desenvolvem sínteses por meio da diferenciação de elementos e a partir da abstração de outros elementos, rompendo com conjunto de atributos concretos. O domínio da abstração e do pensamento por complexo possibilita na criança a formação de conceitos verdadeiros, o pensamento conceitual.

O pensamento conceitual é a fase caracterizada pela formação de conceitos potenciais. Esta é resultante de um ato real e complexo do pensamento, o qual inclui operações mentais e sínteses em formas mais elaboradas. A criança, nesta fase, desenvolve generalização abstrata de propriedades essenciais dos conceitos, abstraindo as demais. A generalização abstrata se torna a forma principal do pensamento, o qual se concebe e se torna consciência no contexto. Esses conceitos, concebidos como funções psicológicas superiores que representam generalizações em nível abstrato, concretizam-se na função simbólica da linguagem, como aponta Nüñez (2009, p. 37):

> A estratégia assumida pelos sujeitos mostra que suas operações são realizadas totalmente no plano lógico-verbal e que a palavra recebe um novo significado abstrato estável. Nessa etapa, os traços ou atributos do conceito se separam da situação concreta e são percebidos em suas características gerais e as palavras alcançam significados "no sentido restrito".

As três fases do processo de formação do conceito não representam um percurso linear, limitado por idade cronológica ou maturação biológica; e a terceira fase não aparece quando a segunda se completa com o pensamento por complexo. Essas últimas coexistem e em determinados momentos se unem e admitem o surgimento de conceitos científicos. Elas não desaparecem no processo evolutivo da formação de conceitos. As diferentes pessoas, até mesmo as mais letradas, não apresentam sempre pensamentos genuínos, em contextos cotidianos também usam pseudoconceitos (VYGOTSKY, 1991).

Para Vygotsky, a divisão entre conceitos espontâneos e conceitos científicos não se dá pelos conteúdos dos conceitos, mas pelo caráter específico de sua formação. Conceitos espontâneos são os desenvolvidos no cotidiano, enquanto os científicos são desenvolvidos no contexto escolar.

Considera-se que a criança, ao ingressar na escola, já possui certo nível de maturidade de funções mentais superiores, como percepção, atenção e memória; são funções consideradas fundamentais para o desenvolvimento de conceitos científicos, mas não determinantes. O processo de construção conceitual no espaço escolar possui característica sistematizadora, estabelecida em um processo social mediado e culturalmente contextualizado.

Os conceitos escolarizados emergem do desenvolvimento social e histórico da educação formal em instituições escolares, baseados em conceitos científicos. O desenvolvimento desse tipo de conceito na escola

> [...] começa pelo trabalho do próprio conceito em si, por sua definição discursiva, seguido de atividades que pressupõem o uso consciente dos atributos que compõem a definição do conceito na solução de diversas tarefas, tais como identificar, comparar, classificar, que são procedimentos relacionados à definição de conceito. (NÚÑEZ, 2009, p. 42)

Na concepção de Vygotsky, a formação dos conceitos científicos se inicia pela definição verbal, pela apresentação e esclarecimento de atributos essenciais e sua aplicação incide sobre a variedade de objetos do contexto, possibilitando ao aluno adquirir consciência do conceito mediante sua aplicação. Dessa forma, os conceitos científicos se iniciam por procedimentos analíticos, e não apenas por experiência concreta.

De acordo com Núñez (2009), as condições nas quais os conceitos espontâneos e científicos se desenvolvem são diversas, pois dependem de como o processo de formação é organizado e sistematizado. A diferença na organização e no desenvolvimento do processo de aprendizagem pode conduzir os alunos a sentidos diversos na construção do pensamento conceitual.

Como já mencionado, a linguagem tem papel fundamental no desenvolvimento do pensamento generalizante. No contexto escolar seu papel é preponderante, uma vez que possibilita a elaboração de processos psicológicos como a abstração, a generalização, a conscientização e a regulação de conceitos das diferentes disciplinas escolares.

> A relação entre o homem e o mundo passa pela mediação do discurso, pela formação de ideias e pensamentos através dos quais o homem apreende o mundo e atua sobre ele, recebe a palavra do mundo sobre si mesmo e sobre ele-homem, e funda sua própria palavra sobre esse mundo. (VIGOTSKY, 2001, p. XII)

O desenvolvimento de conceitos no contexto escolar transcorre da linguagem e do outro. No entanto, a forma como são mediados os contextos de aprendizagens históricos e culturais influencia na formação de conceitos científicos.

A mediação, de acordo com a perspectiva vygotskyana, é compreendida como "toda intervenção de um terceiro 'elemento' que possibilite a interação entre os 'termos' de uma relação" (SIRGADO, 2000, p. 38) e está entrelaçada a dois tipos de mediadores externos: os instrumentos e os signos, que regulam as ações dos sujeitos sobre os objetos e seu psiquismo. Nesse contexto, a mediação semiótica, que considera as raízes sociais e históricas como conceito mediador que pode explicar as características específicas das sociedades históricas, torna-se importante, uma vez que é considerada "um bom instrumento para se pensar o psiquismo humano como um processo permanente de produção que envolve o indivíduo e seu meio sociocultural numa interação constante" (SIRGADO, 2000, p. 48).

Smolka (2010) leva em conta que a atividade de ensino é enigmática, pois em alguns momentos é surpreendente, em outros inusitada e até mesmo desconcertante. Para a autora, na perspectiva histórico-cultural o ensinar está relacionado ao significar, uma vez que o processo de ensinar e significar implica em "formas de (inter) ação, (oper) ação mental e trabalho com signos" (SMOLKA, 2010, p. 108).

O movimento de significação não é unívoco nem imediato. É (re)configurado, estabelecido e convencionalizado na relação entre as pessoas. A possibilidade e a necessidade de construção de sentidos leva o sujeito a problematizar as condições e as dimensões da produção e da construção de conhecimentos nas relações de sentidos.

Segundo Smolka (2010), vale a pena explorar, nas relações de ensino, a compreensão da produção de sentidos, porque o trabalho simbólico das interações nos possibilita pensar na dinâmica interdiscursiva em diferentes dimensões: individual, social e ideológica. A autora afirma que, de acordo com Vygotsky, é por meio da mediação do outro e dos signos que o conhecimento se constrói, mas ressalta que as raízes históricas também estão envolvidas nas implicações e nos sentidos daquilo que assumimos ou defendemos. Ensinar, portanto, significa "um trabalho com signos, um trabalho de significação por excelência, que implica incansáveis gestos indicativos nas orientações de olhares, nas configurações dos gestos, nas formas de referir, de conceituar" (SMOLKA, 2010, p. 128).

A criança, desde o início de sua vida, está inserida em um contexto cultural historicamente constituído, no qual o adulto procura inseri-la no conjunto de ações e significações elaboradas e acumuladas pela sociedade. É na mediação do/pelo outro − revestida de gestos, atos e palavras (signos) − que a criança vai se integrando às formas de atividades consolidadas em sua cultura, em um processo dinâmico de articulação entre o pensamento e a linguagem.

Diante do exposto, a mediação é considerada como uma potencialidade no desenvolvimento da pessoa. No entanto, é importante ressaltar que isso não significa que seu desenvolvimento será sempre positivo, pois pode acontecer de maneira equivocada.

De acordo com Fontana (1993), há diferença na relação da criança com o adulto no contexto cotidiano e no escolar. No cotidiano, a influência do adulto não reprime a criança na formação de generalizações, mas a oculta. Nas interações escolarizadas, o processo é diferente, há uma orientação deliberada e explícita do adulto para a formação de conhecimentos científicos pela criança. Nesse contexto, a criança é envolvida em um processo para compreender os conceitos científicos, nos quais as atividades "são organizadas de maneira discursiva e lógico-verbal" e "a relação da criança com o conceito é sempre mediada por algum outro conceito" (FONTANA, 1993, p. 124). Assim, a mediação do adulto é consciente, deliberada e planejada.

No contexto escolar, a ação mediadora do adulto é percebida pelo estudante. Ou seja, ele tem a imagem de seu papel e o do papel do professor na instituição, os quais geralmente o conduzem a realizar as tarefas que lhe são propostas. De acordo com Vygotsky (2001), o aprendizado escolar desempenha papel fundamental na construção e no desenvolvimento das funções psicológicas básicas para que o sujeito tome consciência de seus próprios processos de constituição de pensamentos e de elaboração conceitual.

As diferenças existentes entre os conceitos espontâneos e os científicos não os configuram como conceitos contraditórios, mas articulados. No processo de elaboração de um conceito desconhecido, o estudante busca em signos conhecidos, em experiências concretas, uma aproximação para significá-lo. Dessa forma, os conceitos espontâneos possibilitam que conceitos sistematizados sejam confrontados com situações concretas, criando relações de generalizações. Por outro lado, os conceitos científicos criam estruturas para o desenvolvimento de novos conceitos espontâneos a partir das relações de sistematizações, do uso deliberado da consciência e do desenvolvimento de novas percepções da atividade intelectual. De acordo com Friedrich (2012, p. 101), "é nesse jogo de dependência e independência entre o escrito e o oral, entre as generalizações de primeira e segunda ordem, entre os conceitos cotidianos e científicos adquiridos na escola, que a aprendizagem escolar deve se fundar".

Diante do exposto, conclui-se que o processo de elaboração conceitual é dinâmico e articulado, não se esgota quando uma generalização é elaborada ou quando um conceito científico é desenvolvido. Isso porque, ao se deparar com uma nova problemática, conceitos científicos fazem com que conceitos espontâneos sejam desenvolvidos e utilizados para que outros conceitos científicos sejam desenvolvidos e/ou (re)significados.

Considero que as informações apresentadas sobre o processo de formação de conceitos são de extrema importância para os estudos no campo da Educação, seja no processo de ensino e de aprendizagem de maneira generalizada, seja em campos específicos, como o da Matemática, por exemplo; pois a forma como a criança desenvolve conceitos das diferentes disciplinas de estudo, em sua gênese, não se difere. Os conceitos são permeados por produtos históricos e culturais, têm a linguagem como fator preponderante em sua formação, consideram o outro como agente ativo em seu processo de desenvolvimento individual e coletivo. Sua formação consiste em um processo dinâmico de (re)significação.

No entanto, conforme mencionado, as diferenças na organização e na elaboração do processo de aprendizagem podem conduzir os alunos a sentidos diversos no desenvolvimento do pensamento conceitual, a diferentes níveis de generalização. Desse modo, a interlocução entre a formação de conceitos na perspectiva Vygotskyana, a formação de conceitos específicos do campo de estudo e a dinâmica no processo de ensino e de aprendizagem possibilita um trabalho significativo em contexto escolar.

Diante do exposto, considero que essa discussão esteja contemplada no processo de ensino e de aprendizagem da combinatória e da probabilidade, tal como proponho nesta pesquisa. Assim, apresento os conceitos específicos desse campo de estudo para melhor compreensão da pesquisa desenvolvida.

2.2 Conceitos sobre combinatória e probabilidade: articulações entre linguagem e contextos

Acredito que a compreensão da linguagem matemática não é algo simples, pois consiste na relação da língua materna com a matemática, com símbolos e significados construídos no cotidiano e no contexto escolar, carregados de concepções históricas e culturais. Considero que esse aspecto deve ser levado em conta nas aulas de Matemática, uma vez que o uso de linguagem possibilita o desenvolvimento de conceitos diversos; a linguagem matemática, portanto, propicia a compreensão e o desenvolvimento de conceitos matemáticos, estabelecendo formas específicas da comunicação matemática com as situações do cotidiano. No caso específico da combinatória e da probabilidade há certo repertório de palavras relacionadas à linguagem probabilística − como impossível, possível, pode ser, certo, seguro, se espera que, provável, bastante provável − que são utilizadas pelos alunos para expressar as medidas de chances de determinados eventos, mas que não são compartilhadas por todos, conforme apontei em minha pesquisa de mestrado (SANTOS, 2010).

É comum observarmos que as pessoas usam esses termos relacionadas à combinatória e à probabilidade em seu cotidiano, por exemplo: “Eu vou ao dentista com frequência”, “É provável que eu vá ao cinema no final de semana” ou ainda “Pode ser que eu tire uma boa nota na prova”. No entanto questiono-me: se esses termos fazem parte do vocabulário das pessoas, inclusive dos alunos da Educação Básica, ou, em outras palavras, se os alunos possuem conceitos espontâneos, por que ainda encontram dificuldades em interpretá-los, no contexto escolar, nos problemas relacionados à combinatória e à probabilidade? Seria a ausência de um trabalho que possibilite a articulação entre os conceitos espontâneos e científicos?

Pesquisas sobre probabilidade desenvolvidas em alguns países apresentam resultados contributivos para pensarmos sobre a linguagem probabilística, como a de Green (1982), realizada com estudantes da Grã Bretanha com idade entre 11 e 16 anos. O pesquisador observou que os alunos possuem limitações linguísticas para expressar conceitos sobre probabilidade, o que contribui para respostas inadequadas. Além disso, o pesquisador notouque eles atribuem significados comuns a termos que indicam diferentes graus de probabilidade, como *improvável* e *não pode acontecer*.

As pesquisas desenvolvidas com estudantes na Espanha conduziram Godino, Batanero e Cañizares (1996) a constatarem dificuldades na estimação probabilística e na interpretação dos termos apresentados. Isso ocorreu, pois diferentes medidas foram atribuídas a um mesmo fenômeno probabilístico.

De maneira semelhante, em minha pesquisa de mestrado (SANTOS, 2010), investiguei o movimento do pensamento probabilístico dos alunos do 7º ano de uma escola pública do interior de São Paulo e observei que as ideias que os alunos possuem dos termos do vocabulário probabilísticos não são compartilhadas comumente por todos, mas que há certa regularidade em categorias de palavras. Para os termos que expressam valores quantitativos “exatos” da probabilidade − por exemplo, *seguro*, *certo*, *impossível* e *sem dúvida* −, as concepções foram compartilhadas por todos os alunos pesquisados. Nos termos que envolvem valores “flexíveis” − como *pode ser*, *há alguma probabilidade*, *é possível* e *se espera que* −, em alguns momentos os alunos partilhavam das ideias dos colegas, em outros não, porém validavam as justificativas apresentadas por eles, ou seja, mesmo não utilizando o termo adotado pelo colega, consideravam que seu uso era adequado. A maior discordância surgiu nas relações estabelecidas com os termos *frequência* e *quase sempre*, pois, apesar de estarem diante de exemplos consistentes de situações que podem envolver esses termos, os alunos não mudavam sua opinião, nem validavam as ideias e os argumentos apresentados pelos colegas.

De acordo com Watson (2006), a discussão sobre a linguagem probabilística em diferentes contextos é importante, pois as respostas dos alunos podem apresentar conceitos dos contextos pessoais, do ambiente escolar imediato ou do mundo externo, ou seja, referem-se aos conceitos espontâneos. Segundo a autora, apresentar situações que abordem os diferentes contextos em sala de aula, estabelecendo relações entre a linguagem coloquial e a formal é importante para o desenvolvimento de conceitos científicos sobre probabilidade. Compreendo que esse seria o movimento entre os conceitos espontâneos e os científicos.

Gal (2005) aponta que não tem sido dada muita atenção à linguagem probabilística, mas que ela é muito importante, pois apresenta aspectos relevantes nas relações abstratas que se estabelecem entre as situações apresentadas e os termos utilizados para expressar a medida de chance e também para apresentar suas reais interpretações probabilísticas. Segundo Nacarato e Grando (2013), a linguagem probabilística tem um papel fundamental na elaboração de conceitos sobre probabilidade dos estudantes, uma vez que o produto de um trabalho de negociação de significados das palavras do vocabulário probabilístico é a conceitualização.

Minha pesquisa anterior também apontou o quanto é importante a discussão sobre termos da linguagem probabilística no início dos estudos sobre probabilidades. Com ela, equívocos sobre a interpretação de enunciados e conceitos são minimizados, uma vez que fica evidente, para os alunos e para o professor, quais são suas considerações sobre os termos. A pesquisa constatou também que os alunos passam a utilizar a linguagem probabilística na apresentação de suas considerações sobre as tarefas[14] desenvolvidas e até mesmo no cotidiano da sala de aula.

Reforço minha colocação anterior (SANTOS, 2010) de que é significativa a discussão da linguagem probabilística nos processo de ensino e de aprendizagem de probabilidade. Compreendo que conceitos sobre as probabilidades são desenvolvidos a partir de tarefas potencializadoras. Tal entendimento decorre de a linguagem desempenhar papel essencial na formação intelectual do indivíduo, pois há coesão entre comunicação e generalização (VIGOTSKY, 2001). Dessa forma, considero que os diferentes sentidos atribuídos pelos alunos às palavras do vocabulário probabilístico são produtos de conceitos espontâneos e científicos desenvolvidos em contextos escolares e não escolares por meio da linguagem, de experiências vivenciadas e de mediação consciente do professor, deliberada e planejada por ele.

Dentre as diversas informações apontadas em meu trabalho anterior (SANTOS, 2010), destacam-se as interpretações dadas pelos alunos aos termos *possibilidades* e *probabilidades*. Para apresentar minha análise, elaborei um quadro com as ideias que os alunos, organizados em grupos, apresentaram sobre os termos "pouca possibilidade" e "muita probabilidade". A partir dele, constatei que metade dos grupos entende os termos *possibilidade* e *probabilidade* como sinônimos. Para esses alunos, tais palavras expressam a medida de chance. Significado este, que se refere ao termo "probabilidade" e não "possibilidade". Esse apontamento é um indicativo de que mesmo conceitos equivocados podem ser compartilhados, uma vez que são elaborados a partir de vivências sociais e culturais.

Percebe-se no que foi exposto até o momento que apenas mencionou-se o termo "linguagem probabilística" e não combinatória. Isso acontece porque a maioria das palavras do vocabulário relacionadas à combinatória e à probabilidade é comum. Além disso, parece ser usual a opção pelo uso do termo linguagem probabilística, pois se entende que a combinatória está inserida na probabilidade, porém o contrário, não necessariamente.

Na pesquisa atual, tais apontamentos são importantes, pois os sentidos atribuídos pelos alunos às tarefas propostas, assim como a compreensão de como eles são atribuídos e/ou desenvolvidos, é fundamental. Isso porque tenho como objetivo analisar as articulações entre

[14]Compreendo, de acordo com Christiansen e Walter (1986), tarefa como um conjunto de ações – exercícios, problemas, situações-problemáticas, estratégias de ensino – organizadas pelo professor, visando que conceitos da Matemática sejam compreendidos e desenvolvidos pelos alunos.

o raciocínio combinatório e o probabilístico, bem como a compreensão das concepções sobre o pensamento combinatório.

Pesquisas como as de Gal (2005), Celi Lopes (2008), Roa (2000) e Watson (2006), sobre a formação de conceitos de combinatória e probabilidade, normalmente analisam-na a partir da habilidade (ou não) de resolução de problemas. Desse modo, apontam que os alunos apresentam dificuldades com a temática e atribuem tal fato ao processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Roa (2000), as dificuldades dos estudantes em resolver os problemas de combinatória se dão devido a dois motivos. Um deles é a estrutura complexa de resolução. O outro se refere às deficiências do processo de ensino, que enfatiza o uso de fórmulas e procedimentos em detrimento de componentes mais primários do raciocínio combinatório.

De acordo com as investigações de Gal (2005), a probabilidade não é uma característica palpável dos acontecimentos, mas uma percepção ampla, que pode ser expressa por meio de uma notação formal da Matemática quanto à probabilidade de ocorrência de um evento. Para o autor, muitas das situações cotidianas exigem que as pessoas sejam "letradas probabilisticamente"[15]; e, para que o letramento[16] aconteça, não basta que haja no processo de ensino uma simples instrução, é preciso que diferentes elementos de conhecimento estejam envolvidos no processo, havendo uma interação entre diferentes conceitos de probabilidade, maneiras de descobrir a probabilidade de um evento, linguagem, contexto e questões críticas.

Sobre a temática, Watson (2006) afirma que muitos elementos estão ligados ao conceito de probabilidade; no entanto, os principais são as ideias associadas à linguagem, às maneiras de mensurar as probabilidades e às questões relacionadas ao contexto. Segundo a autora, para que o pensamento probabilístico dos alunos seja desenvolvido é preciso que três conceitos sobre probabilidade estejam inseridos no currículo escolar: o subjetivo, o frequentista e o formal. Esses conceitos são apresentados pelas pessoas em situações cotidianas e estão presentes em circunstâncias diversas, assim como outros conceitos sobre probabilidade, como o clássico e o lógico.

É possível observar que as pessoas apresentam diferentes pensamentos a respeito da probabilidade. Por exemplo, se perguntar àquelas que jogam na megassena o que levam em

[15] *Probability literacy*.

[16] Compreendo letramento probabilístico como um conjunto de habilidades como: ler, compreender, interpretar, analisar, avaliar e expressar situações de incerteza por meio de conceitos, vocabulário e terminologia e/ou símbolos adequados aos diferentes contextos.

conta na hora de escolher os números para colocar em seu cartão, veremos que cada uma busca uma justificativa coerente para fazer sua escolha: colocar a data de nascimento de pessoas da família, fazer uma análise dos números que saíram nas últimas rodadas e colocar números diferentes, escolher um número de cada dezena, jogar sempre os mesmos números, etc. Dessa forma, em uma mesma situação os sujeitos buscam alternativas para escolher números que, segundo critérios pessoais, dar-lhes-ão chances de ganhar.

Esse fato é observado por Fernandes (1999), que acredita que as diferentes características das concepções sobre probabilidade podem induzir a diferentes perspectivas. De acordo com Shaughnessy (1992), a tradição dualista da probabilidade – como grau de crença e como cálculo de frequência – conduz diversos debates de pesquisas.

Características sobre as diferentes concepções probabilísticas são indicadas por autores como Fernandes (1999), Godino, Batanero e Cañizares (1996) e Hawkins e Kapadia (1984). As diferentes concepções probabilísticas apresentadas pelos autores coincidem em alguns termos e características. Na sequência expomos cinco conceitos de probabilidade, segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996) e Fernandes (1999), quais sejam: o clássico ou laplaciano, o frequentista ou empírico, o subjetivista, o lógico e o axiomático ou formal.

- **O conceito clássico ou laplaciano**

O conceito clássico da probabilidade foi definido por Laplace em sua obra *Théorie analytique des probabilités*, publicada em 1812. Essa definição é atribuída às situações em que o espaço amostral é equiprovável. Nesse contexto, a probabilidade é estabelecida pela razão entre o número de casos favoráveis em relação ao número de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam igualmente prováveis. De acordo com Fernandes (1999, p. 59), nessa definição "[...] assume-se implicitamente a equiprobabilidade de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral", constituindo "uma abordagem a priori da probabilidade, pois calculam-se probabilidades antes da realização de qualquer experiência física". Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), a característica de equiprobabilidade também é garantida pela estratégia de utilização de simetria física.

É possível observar tal perspectiva teórica em jogos de azar relacionados a moedas e dados (não viciados) e em extração de bolas em urnas. De acordo com Godino, Batanero e Cañizares (1996), isso é possível por se tratar de fenômenos cujas variáveis são discretas, e supõe-se que seja plausível selecionar, como espaço amostral, um conjunto de sucessos elementares que garantam a equiprobabilidade. No lançamento de uma moeda, a simetria que permite aceitar a probabilidade de ½ para cada uma das faces pode ser tomada como argumento.

Há muitas concepções equivocadas nos jogos de azar, mesmo que os resultados apresentem simetria, como no caso da megassena. As pessoas acreditam que a probabilidade de um cartão com seis números alternados ser sorteado é maior do que a de um cartão com seis números consecutivos. Dificilmente a semelhança entre essas probabilidades será aceita pelas pessoas; a observação da frequência dos resultados obtidos as conduzem a equívocos, pois é difícil observar o resultado da megassena com seis números consecutivos, sendo que se observa mais números aleatórios alternados. A frequência, não dessa forma equivocada, também é utilizada para determinar a probabilidade.

- **O conceito frequentista ou empírico**

No conceito frequentista, a probabilidade é determinada a partir de um processo de experimentação. De acordo com Godino, Batanero e Cañizaes (1996), a probabilidade frequentista é calculada a partir de frequência relativa observada em resultados de provas repetidas.

> Suponhamos que um acontecimento particular A nos interessa; observamos repetidamente e anotamos a quantidade que A ocorre em certo experimento; então, a razão entre o número de vezes que se ocorre A, nA, e o número total de repetições n (razão frequencial ou frequência relativa de que A ocorra, nA/n) parece tender a um limite quando n tende a infinito. (GODINO; BATANERO; CAÑIZAES, 1996, p. 24, tradução minha[17]).

Neste conceito, as probabilidades são determinadas *a posteriori*, pois é calculada após os experimentos terem sidos realizados. Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), a teoria frequentista foi defendida por Richard Von Mises na obra *Probability, statistics and truth*; no entanto, John Venn já havia recomendado o cálculo de probabilidade por meio de frequências relativas presentes em sua obra *The logic of chance*. Godino, Batanero e Cañizares (1996) exploraram tal teoria, ao simular o experimento aleatório de lançamento de moedas com o auxílio de um computador. Em uma sequência de 14 mil repetições,

[17] Supongamos un sucesso particular A que nos interessa; tomamos observaciones repetidas anotando las ocasiones en que ocurre A; entonces la razón entre el número de veces que sucede A, nA, y el número total de repeticones n (razón frecuencial o frecuencia relativa de que A ocurra nA/n) parece tender a un límite cuando n tende a infinito.

observaram que a frequência de caras era muito próxima da probabilidade teórica, ½. Esse experimento exemplifica que, quanto maior o número de acontecimentos, maior a proximidade entre a probabilidade *a posteriori* e a probabilidade *a priori*, calculada sem manipulação experimental, baseada em dados teóricos e no conceito clássico.

Em nosso cotidiano, uma situação de probabilidade frequentista, tida como referência, com a qual nos deparamos é o valor monetário atribuído ao seguro contra furtos de veículos. Observa-se que o valor a ser pago varia de acordo com o índice de roubo da região em que o proprietário reside e também com a marca e/ou o modelo do veículo. Segundo Santos (2011, p. 3),

> Para fazer o cálculo do valor do seguro dos veículos as seguradoras realizam uma pesquisa estatística sobre o índice de furto dos mesmos, e por meio desses dados calculam a probabilidade de o proprietário do automóvel “x” ter seu carro furtado, ou seja, a razão entre o número de possibilidades favoráveis, automóveis “x” furtados, e o número total de possibilidades, automóveis “x” em circulação.

Considerações obtidas a partir de experimentos simples como este, que envolvem a aleatoriedade, podem levar os alunos a interpretações equivocadas, pois é possível obter eventos pouco prováveis. Tal fato pode conduzir os estudantes a conclusões ingênuas de que eventos desse tipo têm maior chance de ocorrer. Esse tipo de situação foi observado por Fernandes (1999) que o chama de equívoco em relação à compreensão dos conceitos de aleatoriedade e semelhança.

- **O conceito subjetivista**

No conceito subjetivista o sujeito faz uso de suas experiências e conhecimento sobre o assunto para determinar a probabilidade de um sucesso. De acordo com esta perspectiva, as probabilidades exprimem grau de crença e percepção pessoal, o que ocasiona a geração de diferentes medidas para um mesmo evento. Fernandes (1999) a nomeia como “personalista”, pois, segundo ele, os conceitos clássico e frequentista são propriedades do mundo real, enquanto na percepção subjetivista as probabilidades são avaliações pessoais de situações aleatórias, próprias da mente do indivíduo. Assim, a probabilidade passa de uma avaliação externa ao sujeito para uma avaliação centrada no sujeito. Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), este conceito não se baseia na repetitividade de um sucesso, pois é possível avaliar a probabilidade de um sucesso que ocorreu apenas uma vez.

Nas situações que envolvem jogos de azar esse conceito de probabilidade é bastante utilizado, uma vez que estando em situação de risco (excitação emocional) o grau de confiança individual é muito forte. Acredita-se que no conceito subjetivista os jogadores seguem regras básicas ao apostar (confiar) em determinado acontecimento. Os subjetivistas consideram que coerência e consistência são categorias de informação que, combinadas, geram a probabilidade do evento em questão. Dessa forma, as informações prévias e as experiências cotidianas compõem a probabilidade de determinado acontecimento (FERNANDES, 1999).

De acordo com Godino, Batanero e Cañizares (1996), o critério de coerência é bastante notado no conceito subjetivista, e este pode ser o precursor para o ensino da probabilidade na universidade, uma vez que concepções como a clássica, por exemplo, requerem a destreza ao determinar a probabilidade por meio de uma razão; a subjetiva depende das probabilidades percebidas. Além disso, os autores consideram que o enfoque subjetivista tem aproximações ao conceito de probabilidade lógica.

- **O conceito lógico**

O conceito lógico da probabilidade é empregado em situações distintas das que aplicam os conceitos clássico ou frequencial. Está presente em situações que tentam explicar uma indução, defendendo uma relação lógica entre o enunciado evidente e as hipóteses que este possibilita, uma generalização das relações implícitas e contraditórias.

Neste conceito, o grau de confiança é medido de duas maneiras extremas – certo ou impossível –, "... uma proposição *p* é dada pela informação de outra proposição *q*, [...] se *p* é uma consequência de *q*, a proposição *q* dá a *p* a probabilidade 1 e a contradição, o caso de que *p* e *q* sejam contraditórios, a probabilidade dada por *q* à *p* é 0". (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996, p. 23, tradução minha[18]).

Destaco um exemplo que apresenta propriedades da probabilidade lógica: foram colocadas em uma caixa 10 bolinhas coloridas, sendo cinco verdes, duas vermelhas e três amarelas. Foram extraídas oito bolinhas dessa caixa, sendo duas vermelhas, três amarelas e três verdes. Qual a cor das bolinhas que estão na caixa?

[18]"... una proposición *p* a luz de la información aportada por otra proposición *q*, ..., si *p* es consecuencia de *q*, la proposición *q* da a la *p* a probabilidad 1, y a contradicción, em el caso de que *p* e *q* seam contradictorios, a probabilidade dada por *q* a *p* es 0". (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996, p. 23)

Este conceito, de maneira geral, parece fácil, mas na prática não é. Isso porque observações subjetivistas e frequentista fazem parte do ideário das pessoas ao analisar as proposições.

- **Conceito axiomático ou formal**

De acordo com Godino, Batanero e Cañizares (1996), o conceito formal ou axiomático da probabilidade originou-se dos trabalhos de Kolmogorov como uma oposição ao conceito clássico, que impõe a equiprobabilidade dos sucessos. Também é conhecido como probabilidade objetiva ou normativa.

No conceito axiomático ou formal, a probabilidade de determinada situação (S) é medida quando se elege *E* como espaço amostral e *A* como um subconjunto de *E.* A partir dessas informações a probabilidade P(S) é definida pelo quociente entre a medida de A e a medida de E (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996). A probabilidade é compreendida como um valor entre 0 e 1, $0 < P(S) < 1$, sendo que um sucesso impossível é dado por $P(E) = 0$ e um sucesso certo por $P(E) = 1$.

Para Fernandes (1999, p. 54), "a probabilidade formal é um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles axiomas". O autor ainda afirma que "a abordagem estrutural não esclarece a própria natureza da probabilidade, apesar de os teoremas deduzidos constituírem um indicador de possíveis interpretações" (FERNANDES, 1999, p. 54).

Segundo Fernandes (1999), a concepção estrutural pode ser vista como um conceito que estabelece estrutura teórica para as duas principais concepções de probabilidade: a posição objetivista, apresentada acima como o conceito formal ou axiomático, e a subjetivista. Fernandes (1999), baseando-se em Hawkins e Kapadia, esclarece tal perspectiva:

> No primeiro caso, os axiomas de Kolmogorov são usualmente vistos como justificação da posição objetivista. No segundo caso, os axiomas sobre o comportamento racional no ato de apostar, como coerência e consistência, fornecem regras para as probabilidades, as quais devem obedecer aos axiomas de Kolmogorov e suas consequências. (HAWKINS; KAPADIA, 1984 apud FERNANDES, 1999, p. 54).

Entende-se, de acordo com o exposto, que é possível que uma pessoa possa fazer uso do conceito formal ao apresentar um conceito subjetivista. Com suas vivências e suas observações, o sujeito define o espaço amostral *E* e a medida dos sucessos de *A*, subconjunto de *E*, e, a partir dessa medidas, extrai o quociente, ou seja, a probabilidade de determinado evento.

Na pesquisa de mestrado observei que esses conceitos estão presentes no discurso e no ideário dos alunos da Educação Básica, “principalmente daqueles que ainda não tiveram a oportunidade de vivenciar teoricamente conceitos relacionados à probabilidade como medida, à ideia de aleatoriedade, à probabilidade condicional, etc.” (SANTOS, 2010, p.18). Reitero, assim, que “as situações relacionadas à incerteza podem ser interpretadas de diferentes maneiras, por diferentes conceitos probabilísticos, conduzindo ou não as pessoas às respostas adequadas” (SANTOS, 2010, p. 175).

Percebe-se pelo exposto que as diferentes interpretações e significações sobre probabilidade se fundamentam nos distintos conceitos sobre os quais estão imbricados. Conceitos esses que se desenvolvem em variados contextos. Esse fato é relevante para se pensar no processo de ensino e de aprendizagem da probabilidade, pois, mesmo estando presente em algumas situações didáticas no contexto escolar, será que eles são percebidos pelos professores? Até que ponto é possível um professor desenvolver o raciocínio combinatório e o pensamento probabilístico dos alunos já que a combinatória e a probabilidade se apresentam de formas diferentes de acordo com as situações?

Segundo Celi Lopes (2008), para desenvolver o pensamento probabilístico dos alunos é preciso possibilitar a eles a realização de atividades de ensino com sentidos e que permitam o entendimento de chance e de eventos aleatórios. A essas considerações acrescento que na proposta de ensino os diferentes conceitos precisam estar envolvidos e que a dinâmica de trabalho deve ter como objetivo articulá-los e/ou confrontá-los para que sentidos e conceitos sobre as situações de incerteza sejam desenvolvidos pelos alunos.

Algumas pesquisas específicas sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório foram desenvolvidas, como as de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), Navarro-Pelayo (1994) e Roa (2000). Essas pesquisas, assim como outras, foram realizadas a partir da teoria do conhecimento elaborada por Jean Piaget, mais especificamente a partir da publicação *A origem da ideia do acaso*[19], de Piaget e Inhelder (1951).

Diante desse fato, considero importante expor alguns apontamentos sobre as pesquisas desses autores e também esclarecer que isso − mesmo tendo me orientado em Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), pesquisadores que se orientam nos estudos de Piaget − não

---

[19] Título original: *La genese de l`idée de hasard chez l`enfant*. Tradução: Ana Maria Coelho.

significa que estou compartilhando das matrizes teóricas e metodológicas nas quais se baseiam. Mesmo porque a perspectiva adotada para a escolha e para o desenvolvimento das tarefas é que vai delinear minhas concepções teóricas e metodológicas.

Especificamente, quanto à combinatória e à probabilidade, Piaget e Inhelder (1951) afirmam que os sujeitos que não possuem a capacidade de análise combinatória desenvolvem apenas conceitos probabilísticos em situações restritas, como as laplacianas, em que se podem enumerar diretamente as possibilidades do espaço amostral. Eles consideram que as operações que ocorrem na análise combinatória não se refletem apenas na forma de interpretar os fatos, mas nas hipóteses que são enunciadas verbalmente e podem ser aplicadas a dados físicos e experimentais, o que possibilita que falsas hipóteses combinatórias sejam desconsideradas.

Para os referidos autores, os aspectos relacionados à combinação de fatores também estão ligados à dissociação destes e à indução das leis, característica apresentada no período lógico-formal[20], associada à formação de um espírito experimental. Segundo os autores, esses aspectos eram negligenciados pela escola, mesmo sendo pontuada a relevância técnica e científica na sociedade moderna. Eles consideravam que se métodos relacionados às operações proposicionais fossem "treinados" nas escolas, as estruturas lógicas específicas seriam desenvolvidas.

As pesquisas realizadas por Piaget e Inhelder (1951) provocaram muitos estudos na área de Educação, como as de Vergnaud sobre os campos conceituais. A teoria desenvolvida por Vergnaud (1990) é classificada como uma teoria psicológica do conhecimento que permite identificar e analisar as ligações tanto dos conhecimentos conceituais como dos saberes expressados. A teoria tem sido utilizada em pesquisas relacionadas aos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, da lógica e da álgebra.

Várias pesquisas desenvolvidas no Brasil, envolvendo a combinatória, são organizadas a partir da teoria dos campos conceituais de Vergnaud, uma vez que os problemas de combinatória, como apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), fazem parte das estruturas multiplicativas. As investigações desenvolvidas pelo grupo de estudos sobre raciocínio combinatório "Geração"[21], formado por pesquisadores e alunos da

[20]Fase compreendida entre a pré-adolescência e a adolescência, faixa etária de 10 a 15 anos.

[21]O Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório, o grupo "Geração" foi registrado em 2009 no Diretório de Grupos de Pesquisa do CNPq pela Prof.ª D.ra Rute Elizabete de Souza Rosa Borba, no Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Surgiu com o objetivo de desenvolver e divulgar estudos relativos ao conhecimento de Combinatória. Mais informações estão disponíveis em: <http://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/historico.html>. Acesso em: 23 set. 2014.

Universidade Federal de Recife, orientam-se nos campos conceituais apresentados por Vergnaud.

Dentre os resultados apresentados pelo grupo destaca-se o avanço sobre a compreensão dos problemas de combinatória e as representações simbólicas apresentadas por professores e alunos de diferentes níveis de ensino, inclusive da Educação de Jovens e Adultos, quando colocados em situações que possuam ensino adequado e intervenção de um docente no decorrer do processo.

Fischbein (1975), considerando a combinatória importante para o ensino da probabilidade, buscou em suas pesquisas analisar as reflexões de Piaget e Inhelder (1951) sobre o desenvolvimento de conceitos sobre combinatória e probabilidade, talvez na tentativa de validá-las ou não. O pesquisador investigou os efeitos produzidos pela instrução, experimentos de ensino, no desenvolvimento e na capacidade de combinar de crianças com idade entre 10 e 15 anos.

Os resultados de suas pesquisas conduziram Fischbein (1975) a discordar de Piaget e Inhelder (1951) em alguns apontamentos, por exemplo, quanto ao tempo atribuído por esses pesquisadores para a aquisição da aprendizagem da combinatória pelas crianças e para sua aquisição por completo ao atingir o estágio do pensamento formal. Em suas pesquisas, Fischbein (1975) constatou que a criança adquire gradativamente habilidades de análise combinatória e que essa habilidade passa por etapas: combinações, arranjos e permutações.

De acordo com Fischbein (1975), a análise das possibilidades (ou a investigação de possíveis casos) não pode ser reduzida a uma simples enumeração de elementos, mas deve ser ampliada a uma investigação que "pressupõe um processo racional, construtivo, que, com base na informação existente, cria o espaço amostral de todos os resultados possíveis" (FISCHBEIN, 1975, p. 99, tradução minha)[22]. Para o autor, tal análise, normalmente é elaborada por meio de análise combinatória. Isso significa que, "[...] se o sujeito não possui capacidade combinatória, o conceito de probabilidade só pode ser usado em caso muito restrito, em que os possíveis resultados podem ser diretamente enumerados" (FISCHBEIN, 1975, p. 99, tradução minha)[23].

[22] "[…] presupposes a rational, constructive process which, on the basis of existing information, sets up a sample space of all possible outcomes".

[23] "[...] if the subject does not possess combinatory ability, the concept of probability can only be used in the very restricted case where the possible outcomes can be directly enumerated".

Segundo o autor, a partir da análise dos possíveis resultados, pode-se estabelecer a probabilidade de determinados eventos com maior precisão. Além disso, Fischbein (1975) ressalta a importância das intuições primárias nos processos cognitivos, uma vez que essas intervêm diretamente nas atividades práticas e mentais dos sujeitos, e também a relevância da instrução para a realização de generalizações interativas e construtivas das estruturas combinatórias.

Minha pesquisa anterior (SANTOS, 2010) se aproxima das considerações de Fischbein ao constatar que as escolhas didáticas são fundamentais para a apresentação e para o desenvolvimento de conceitos probabilísticos. Também considero que há implicações do raciocínio combinatório no pensamento probabilístico. No entanto, o modo como esse raciocínio pode contribuir ao pensamento probabilístico é nosso objeto de investigação nesta pesquisa.

Compreendo que o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos não seja tarefa fácil para o professor, porque, conforme apontado por Fischbein (1975), ele se desenvolve gradativamente. Dessa forma, entendo que obter um resultado satisfatório em determinada tarefa não é garantia de que o raciocínio combinatório do aluno foi desenvolvido, mas um indício de que o trabalho realizado está promovendo tal desenvolvimento. Além disso, o professor não está alheio a esse processo de formação de conceitos. O fato de ter desenvolvido estudos sobre combinatória em sua formação, não significa que seus conceitos estejam em alto nível de generalização e/ou que se mantenham diante de diferentes contextos, como as situações vivenciadas no processo de ensino e aprendizagem de seus alunos. Conforme mencionado anteriormente, segundo Vygotsky (2001), o processo de formação de conceitos não representa um percurso linear, limitado por idade cronológica ou maturação biológica.

Diante do exposto, acredito que tanto professor como alunos, no contexto escolar, estão envolvidos em um processo de desenvolvimento pessoal e coletivo, seja de maneira ampla, enquanto sujeitos, seja em questões específicas do processo de ensino e de aprendizagem escolar, como a construção de conceitos sobre combinatória e probabilidade. Assim, não podemos pensar no processo de ensino e de aprendizagem da análise combinatória e da probabilidade dissociado da forma como os conceitos são desenvolvidos na concepção de Vygotsky.

As reflexões aqui produzidas sinalizam as escolhas realizadas nesta pesquisa. O fato de esta ter sido desenvolvida em uma sala de aula regular, com toda sua complexidade e a constante produção e negociação de significados, evidencia a adequação da perspectiva histórico-cultural. Nessa perspectiva não há neutralidade do pesquisador, que também aprende e se transforma no processo.

Conhecer o que já foi produzido na área, em uma vertente piagetiana, possibilitou pensar na natureza das tarefas a partir dos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994). No entanto, os modos de desenvolvimento e sistematização dos conceitos de combinatória e de probabilidade, pautados na negociação de significados, nas mediações e nas interações, na intencionalidade pedagógica, são coerentes com a perspectiva histórico-cultural. Nesse sentido, a presente pesquisa poderá trazer contribuições para o debate sobre o ensino de probabilidade e combinatória ao se aproximar de outras perspectivas teóricas do campo educacional e ser realizada em um contexto de sala de aula da escola pública, em que os papéis de pesquisadora e professora coexistem.

Assim, a formação de conceitos sobre probabilidade é permeada por significações diversas, de acordo com o contexto. Ações visando ao ensino e à aprendizagem se fazem necessárias, como a articulação entre a combinatória e a probabilidade. Entendo que tal articulação seja possível com um trabalho pautado em práticas problematizadoras em sala de aula.

2.3 Articulações entre a combinatória e a probabilidade a partir de uma prática problematizadora

Problemas relacionados à combinatória têm provocado o interesse dos homens de diferentes culturas desde a Antiguidade. No entanto, a trajetória histórica dos métodos de resolução de tais problemas apresenta certa lentidão, indicada pela dificuldade da temática. De acordo com alguns estudos, o interesse pelos diferentes tipos de problemas combinatórios foi se diversificando, ao longo do tempo, de modo a constituir outros aspectos e campos de atividade mais definidos, ou seja, áreas destinadas à resolução de problemas de cunho prático ou teórico (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1994).

A combinatória, como um instrumento de modelização da Matemática, tem ampla aplicação tanto na própria disciplina de Matemática quanto em outras disciplinas escolares como a Física, a Química, a Biologia e a Economia. Tais aplicações são desenvolvidas em situações práticas e problematizadoras, nas quais as pessoas, por meio de procedimentos combinatórios, desenvolvem estratégias para sua resolução. Esse fato justifica a presença da combinatória no currículo da Matemática.

No entanto, o que se observa no processo de ensino da Combinatória é o ensino de regras e técnicas de contagem. Isso reflete a pouca articulação com contextos com os quais os alunos possam estar inseridos.

Em conversas informais, obtive relatos de professores do ensino público do Estado de São Paulo que indicam que o ensino de combinatória acontece de maneira um pouco tímida nos anos iniciais do Ensino Fundamental por meio de situações-problema denominadas problemas de contagem, relacionadas à forma de combinar roupas ou tipos de sorvete. Essa informação aponta que o trabalho dos professores segue as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (BRASIL, 1997), que apresentam, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a combinatória no bloco de números e operações, uma vez que é abordada como um princípio multiplicativo. Outras situações-problema, nomeadas de contagem indireta, são inseridas nos anos finais do Ensino Fundamental, como as sugeridas nos PCN de Matemática para essa etapa de ensino (BRASIL, 1998).

No Ensino Médio, um estudo mais sistematizado, previsto a partir da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008), é introduzido no segundo ano. Situações-problema envolvendo a análise combinatória − como permutações, arranjos e combinações − são desenvolvidas, na maioria das vezes, por meio de fórmulas, visando a auxiliar o ensino de probabilidade que acontece na sequência.

O exposto sugere que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) propõem um ensino fragmentado da combinatória. Não há a sistematização em seu ensino ao longo dos anos de estudo na Educação Básica nem mesmo a articulação com outras disciplinas escolares.

Quanto ao ensino e à aprendizagem de análise combinatória, Lopes e Coutinho (2009, p. 62) afirmam que precisa ser “superada a aplicação de fórmulas para permutações, arranjos e combinações”. As autoras destacam que, para que haja tal superação, é necessário um trabalho com processos de resolução de problemas que envolvam o raciocínio combinatório. O desenvolvimento de diversos tipos de registros e a explicitação de estratégias de resolução também se fazem relevantes no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Segundo as autoras, a combinatória deve possibilitar a aquisição de conhecimentos, de forma a permitir a construção de relações entre pensamento estatístico, combinatório e probabilístico. Dessa forma, os problemas de combinatória são importantes porque possibilitam modelar situações, uma vez que por meio deles “[...] há várias possibilidades de construção de agrupamentos, de caminhos, fornecendo um tipo específico de interpretação quando se devem levar em conta os resultados possíveis para cada um desses agrupamentos ou caminhos” (LOPES; COUTINHO, 2009, p. 62).

O trabalho em sala de aula com problemas de combinatória é apontado por Lopes e Coutinho (2009) como um fator importante para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Isso porque possibilita diferentes agrupamentos e caminhos para sua resolução.

Considero relevante esse trabalho para o processo de ensino da combinatória. No entanto, ressalto que o não conhecimento dos diferentes problemas de combinatória, atribuído às características dos problemas e às possibilidades de resolução, pode produzir problemas no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos da Educação Básica, uma vez que o desenvolvimento de determinado tipo de problema de combinatória, não garante que outro tipo de problema seja desenvolvido com êxito pelos alunos.

Os diversos problemas em que a combinatória está inserida abordam características peculiares que conduzem as pessoas a diferentes interpretações e resoluções, como os apresentados por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), que, visando a um caráter organizacional para as unidades didáticas que envolvem o ensino da combinatória, elaboraram sequências de tarefas a partir de critérios de classificação dos problemas de combinatória. Mesmo com a estrutura dirigida e normativa, os autores afirmam que elas não foram apresentadas com o objetivo de serem seguidas “ao pé da letra” e também não garantem que tal situação apresente melhores resultados.

As características dos problemas que envolvem a análise de combinatória são organizadas em cinco tópicos, sendo que esses apresentam diferentes atributos presentes em problemas de combinatória que podem envolver variadas soluções e conceitos. Inicialmente, apresento tais tópicos e, em seguida, uma descrição detalhada de cada um. São eles:

- **Tipo de problemas/solução:**

  - Existência;
  - enumeração;

- contagem;
- classificação;
- otimização;
- propriedade dos números combinatórios e manipulação algébrica.

- **Operações combinatórias:**

  - Simples;
  - composta.

- **Modelo combinatório implícito no enunciado:**

  - Seleção;
  - colocação;
  - partição;
  - ordenação;

- **Tipos de objetos que se combinam:**

  - Pessoas;
  - números;
  - letras;
  - objetos ...

- **Tamanho e variabilidade dos parâmetros:**

  - Pequenos;
  - grandes;
  - não variáveis;
  - variáveis.

Considero relevante o levantamento apresentado por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), uma vez que diferentes características estão presentes nas diversas situações relacionadas à combinatória e podem conduzir os alunos, e mesmo professores, a ideias equivocadas. Além disso, é importante que o professor explore esses variados traços nas tarefas que propõe a seus alunos. Tais características também estão presentes na sequência de tarefas que organizei e foram desenvolvidas com os alunos nesta pesquisa.

De acordo com os referidos autores, para a apresentação dos conteúdos de combinatória é importante expor classificação e descrições dos principais tipos de problemas. Eles destacam que diferentes classificações são indicadas por distintos autores (PREPARATA; YEH, 1973; RÍBNIKOV,1988; KAUFMANN, 1971 apud BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1994), as que se diferenciam são os problemas de existência, enumeração, reconto, classificação e otimização.

Os *problemas de existência* são aqueles que tentam provar ou não a existência de um determinado tipo de estrutura discreta. De certo modo, esse tipo de problema busca verificar as possibilidades de agrupamentos a partir de determinados conjuntos de elementos, podendo ser ordenados ou não e possuir ou não repetição.

Alguns exemplos deste tipo de problemas são:

> O problema dos matrimônios
> - Adela conhece Andrés, Benito e Carlos.
> - Beatriz conhece Benito e Carlos.
> - Carmen conhece Carlos, Estevan e German.
> - Daniela conhece Andrés e Benito.
> - Elisa conhece Andrés, Benito e Carlos.
> - Felisa conhece David, Estevan e Francisco.
> • Represente essa situação por meio de um diagrama.
> • É possível buscar um marido para cada garota entre os garotos que conhecem? (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1994, p. 135, tradução minha[24]).
>
> Com as letras A, B, C, D, E, F e G quantos anagramas de quatro letras distintas podem ser formados? Desses, quantos terminam por vogal? (JULIANELLI; DASSIE; LIMA, 2009, p. 35).

Os *problemas de enumeração* são aqueles cujo objetivo é enumerar ou fazer uma lista de elementos que possuem determinada propriedade. Para resolver problemas desse tipo,

[24]El problema de los matrimonios
- Adela conoce Andrés, Benito y Carlos.
- Beatriz conoce a Benito y a Carlos.
- Carmen conoce a Carlos, Estevan y German.
- Daniela conoce a Andrés y Benito.
- Elisa conoce a Andrés, Benito y Carlos.
- Felisa conoce a David, Estevan y Francisco.
• Represente mediante un diagrama esta situación.
• ¿Es posible buscar un marido para cada chica entre los chicos que conocen?

algumas vezes é necessário apresentar todas as possibilidades, outras não, podendo utilizar algoritmos para determinar o número de elementos.

São exemplos destes tipo de problemas:

> Uma escola quer organizar um torneio esportivo com 10 equipes de forma que cada equipe jogue exatamente uma vez com cada uma das outras. Quantos jogos terá o torneio? (JULIANELLI; DASSIE; LIMA, 2009, p. 51)
>
> Escreva todas as somas de números naturais que resultam em 7. (BIGODE, 2012, p. 40).

Segundo Batanero, Godino, Navarro-Pelayo (1994), os *problemas de contagem* são aqueles que determinam o número de elementos de um conjunto finito que possui uma propriedade ou uma coleção. Todos os exemplos anteriores se caracterizam como problemas de contagem e o seguinte também : "O que é mais fácil ao lançar dois dados, obter dois números iguais ou dois números diferentes?" (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1994, p. 137; tradução minha[25]).

De acordo com os referidos autores, os *problemas de classificação* se traduzem na busca de um número contido em tais subconjuntos que definem a classificação. Por exemplo:

> Na garagem de Alicia há cinco vagas. Como a casa é nova, até agora só tem dois carros, o de Alícia e o de Benito, que podem colocar toda noite, cada carro no lugar que preferirem, se não estiver ocupado. Este é um esquema da garagem:

1	2	3	4	5

> Você seria capaz de fazer uma tabela ou um diagrama para representar todas as formas diferentes em que Alícia e Benito podem estacionar seu carro? (Os dois estacionam seu carro na garagem todas as noites) (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1994, p. 143, tradução minha[26]).

Problemas como o último são apresentados nos livros didáticos. Normalmente podem ser resolvidos utilizando o princípio multiplicativo e são separados em dois grupos, aqueles

[25] ¿Qué es más fácil al lanzar dos dados, obtener dos números iguales o dos números distintos?

[26] El garaje de Alicia tiene 5 plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay 2 coches, el de Alicia y el de Benito, que pueden colocar cada noche el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es un esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Como puedes ver, las plazas están numeradas.
¿Serías capaz de hacer una tabla o diagrama para representar todas las formas diferentes en que Alicia y Benito pueden aparcar su coche? (Los dos aparcan su coche en la cochera todas las noches)

que se alteram quando mudam a ordem de seus elementos e aqueles que não se alteram quando a ordem dos elementos é modificada.

Os *problemas de otimização* se apresentam em ocasiões em que se pode atribuir valor total ao conjunto de soluções e determinar um conjunto de ordem de todos os elementos. De acordo com o resultado dessas ações, é possível estabelecer um grupo de valores de máximo e mínimo. O problema da garagem de Alícia e Benito é um exemplo deste tipo de problema.

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), há problemas cujas características envolvem *propriedade dos números combinatórios* e *manipulação algébrica*, uma vez que estabelecem conceitos básicos da teoria dos conjuntos, das relações de ordem, de equivalência, de estruturas algébricas elementares, etc. Um exemplo deste tipo de problema seria: De quantas formas diferentes posso colocar três bolas iguais em três caixas iguais?

O número de operações também conduz os problemas de combinatória a serem classificados em *simples* e *compostos.* Os *problemas simples* são aqueles que envolvem diretamente um método de contagem e propõem quatro modelizações diferentes entre si:

- S*eleção,* que consiste na seleção de uma amostra a partir de um conjunto de objetos;
- C*olocação,* na qual objetos são inseridos em caixinhas (caixa, células, urnas);
- *Partição,* situação em que são criados subconjuntos a partir de um conjunto de objetos;
- *Decomposição,* contexto em que um número natural é decomposto visando a uma soma.

Problemas com tais características são desenvolvidos no cotidiano escolar; no entanto, outros aspectos lhes são acrescentados se os elementos ou subconjuntos estão ordenados ou não, se são distintos ou não, etc. Para alguns desses problemas, os algoritmos básicos para a resolução são soma, produto e quociente.

Os problemas que envolvem uma complexidade de situações combinatórias são classificados como *compostos*. As técnicas para sua resolução são diversificadas e podem envolver funções geradoras, procedimentos lógicos, grafos, diagrama de árvore, matrizes, probabilidades etc.

Problemas deste tipo são desenvolvidos com mais ênfase no Ensino Médio. Todavia, alguns problemas desenvolvidos no Ensino Fundamental possuem complexidade em sua resolução, mas podem ser resolvidos por técnicas não tão complexas, como tabelas.

Um exemplo desse tipo de situação seria: “Escreva todas as possibilidades de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas. Cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos”. Ao trabalhar com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, observei que esse problema “mostrou-se como um rico contexto para a mobilização e o desenvolvimento do pensamento probabilístico, pois a interação entre os alunos, os grupos e a professora foi fundamental para a avaliação dos raciocínios e para a obtenção do resultado” (SANTOS, 2010, p. 68).

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) acrescentam que os problemas de combinatória também podem ser classificados pelo tipo de objetos que combinam − pessoas, números, letras, objetos, etc − e pelo tamanho dos parâmetros e das características − pequenos e grandes, variáveis e não variáveis.

Ressalto que os autores não classificam os problemas em Arranjo, Permutação ou Combinação. Mas seus conceitos estão presentes nos diferentes tipos de problemas apresentados.

Diante de tantas características pergunto: quais as implicações desses conhecimentos da resolução de problemas combinatórios para esta pesquisa? Considero a apresentação das diferentes características presentes nos problemas de combinatória importantes para o trabalho do professor na organização de tarefas com o objetivo de desenvolver o raciocínio combinatório e o pensamento probabilístico. Isso porque, como mencionado anteriormente, eles se apresentam de diferentes formas em diferentes contextos e possuem determinadas particularidades, podendo conduzir professor e alunos a distintos conceitos. Concordo com esses autores quando afirmam que a apresentação de certa organização não é garantia de resultados satisfatórios, mesmo porque acredito que há vários fatores que influenciam o desenvolvimento do raciocínio combinatório, como a motivação do aluno, o papel do professor no desenvolvimento das tarefas, a dinâmica de desenvolvimento das tarefas, a intencionalidade do professor, entre outras coisas.

O início do trabalho com a combinatória é indicado por Celi Lopes (2003) desde a Educação Infantil por meio de problematizações. Tal apontamento foi evidenciado por Souza (2014), que afirma que há possibilidades de trabalho com ideias matemáticas na Educação Infantil, inclusive com a combinatória.

Embora ainda existam dúvidas por parte dos professores sobre o trabalho com a resolução de problemas, tanto no desenvolvimento de conceitos sobre combinatória e probabilidade quanto em outros conceitos matemáticos, compreendo-a como um processo desencadeado a partir de

> [...] uma situação desafiadora que não apresenta uma solução imediata e única; uma situação de hesitação e impasse que necessita de conhecimentos diversos – matemáticos ou não – e o estabelecimento, por parte do aluno, de relações entre eles, além de reflexões e investigações, constituindo-se em um movimento de criação de processos próprios de resolução, podendo o aluno, nesse movimento, ampliar seus conhecimentos e criar novos conceitos. (GRANDO; MARCO, 2007, p. 100).

Christiansen e Walther (1986) apresentam algumas considerações sobre problemas e exercícios observadas no contexto escolar. Segundo os autores, as situações em que já há uma solução prevista são chamadas de exercícios e aquelas cujos procedimentos são desconhecidos, de problemas.

Segundo os autores, as tarefas rotineiras podem ser classificadas como exercícios de reconhecimento, de algoritmos e de aplicação. Já tarefas não rotineiras são as que envolvem problemas de processo, pesquisa aberta e situações-problema.

De maneira geral, Christiansen e Walther (1986) consideram as tarefas rotineiras como as que estão presentes no cotidiano escolar, que normalmente fazem parte da cultura das aulas de Matemática, que precedem uma situação que será apresentada, que envolvem treino de determinadas técnicas algorítmicas; além de serem aquelas em que os alunos já identificam ideias de resolução. Eles apresentam as tarefas não rotineiras como aquelas que contribuem para o desenvolvimento de conhecimento genuíno, que diferem do treino e das práticas isoladas e que promovem motivos pessoais para o seu desenvolvimento.

Tais autores colocam que o papel pedagógico das tarefas, seja um exercício ou um problema, deve estar em função do processo de ensino e aprendizagem na perspectiva dos alunos − levando em conta suas necessidades, seu interesse e seu desempenho − e também na perspectiva de interação entre tarefa, professor e alunos. Consideram também que o papel do professor no trabalho pedagógico é extremamente complexo, uma vez que envolve conceitos e interpretações sobre os componentes e suas relações: professor - alunos - objetivos matemáticos -conteúdos/currículo - tarefas.

Christiansen e Walther (1986) colocam que as potencialidades das tarefas não rotineiras propiciam condições favoráveis para o desenvolvimento cognitivo, pois novos conhecimentos são construídos pelos alunos, e outros já adquiridos são consolidados e alargados. No entanto, defendem que um conjunto de tarefas não rotineiras não é uma garantia para o desenvolvimento de potencialidades educacionais, alguns fatores, como as fases de interação entre professor e alunos, devem estar presentes na realização das tarefas organizadas e/ou desenvolvidas pelo docente.

As características dos problemas e exercícios apresentadas por Christiansen e Walther (1986) são importantes para pensar no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. Acredito que, para o desenvolvimento de conceitos científicos dos alunos, os problemas não rotineiros são potenciais porque possibilitam que novos conhecimentos sejam construídos e outros sejam (re)significados.

Creio que as considerações de Christiansen e Walther (1986), quanto aos problemas não rotineiros, estejam imbricadas com as 18 tarefas organizadas para esta pesquisa, assim como as fases de interação proposta pelos autores. Estas são indicadas pelos autores como um novo padrão de trabalho em sala de aula. Ele envolve três fases: apresentação, atividade independente e reflexão conclusiva.

A fase de *apresentação* tem como objetivo expor como a tarefa é constituída, qual a dinâmica em que será desenvolvida. Este momento é visto por Christiansen e Walther (1986) como uma atividade do professor que deve almejar a constituição da tarefa para cada aluno. O uso tradicional de exemplos introdutórios sobre o trabalho do aluno deve ser evitado, o foco deve estar no despertar do desejo do aluno em desenvolver a tarefa, na motivação. O motivo do professor precisa também ser o do aluno.

A fase de *atividade independente* não significa necessariamente que a tarefa será desenvolvida individualmente, pois diferentes agrupamentos podem ser realizados. Neste estágio o trabalho será realizado em uma esfera menor com o objetivo de manter um fluxo apropriado para a aprendizagem individual.

A fase de *reflexão conclusiva* é o momento de sintetizar os conceitos, de promover uma reflexão coletiva. É indispensável para verificar o uso comum de linguagem e símbolos, a negociação de significados, o grau de aprendizagem partilhada e a negociação de papéis e potencialidades da tarefa desenvolvida (CHRISTIANSEN; WALTHER, 1986). Esta fase possibilita observar as dimensões pessoais e sociais da aprendizagem.

Entendo que, ao adotar essa dinâmica no trabalho em sala de aula, professor e alunos estão inseridos em um processo de aprendizagem que visa não apenas à aquisição de conhecimento, mas à mudança, à reorganização e ao enriquecimento dos envolvidos. Nessa perspectiva, a mediação do processo de ensino e de aprendizagem envolve uma prática problematizadora que se apoia no desenvolvimento e no uso de estratégias cognitivas, constituída em um jogo de confronto entre sentidos produzidos na enunciação.

Conforme mencionado, neste contexto, a ação pedagógica do professor é fundamental, pois é por meio de sua intencionalidade que o trabalho em sala de aula é orientado. Esse trabalho, de acordo com Fontana (2005), envolve: conhecimento do conceito, problematização, elaboração, sistematização do conceito e problematização da sistematização. Segundo a autora, mais que um passo a passo, ao assumir essa dinâmica de interação em sala de aula, o professor deve pensar nesta como um lugar de viabilizar o espaço do outro e a circulação dos dizeres, dos questionamentos, das sistematizações e dos redimensionamentos.

Fontana (1993) defende que o professor, no ato de ensinar, também aprende, pois está exposto aos efeitos dos sentidos emergentes, dos dizeres em circulação. Porém, ressalta que "essa tecitura só é possível se o professor *conhecer*, se ele elaborar conceitos, explicitando a multiplicidade de vozes e sentidos configurados" (FONTANA, 1993, p. 149).

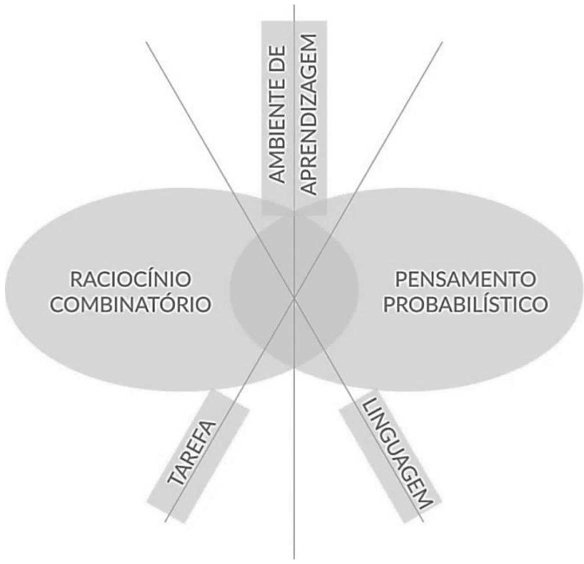
De forma semelhante, Smolka (2010) coloca que o gesto de ensinar é algo complexo, que condensa muitos gestos, como o de apontar a pergunta "o que, por que e para onde?". Segundo Gómez-Granell (2002), ao propor situações que permitam o levantamento de questões, a pesquisa, a discussão, a exploração e a especulação, a problematização pode ser considerada como um instrumento de contextualização.

Avalio a proposta de trabalho em sala de aula envolvendo diferentes momentos − apresentação da tarefa, atividade independente e reflexão conclusiva −, em uma prática problematizadora, na qual a tarefa não é compreendida apenas como uma situação a resolver, mas como desencadeadora de conceitos articulados em diferentes contextos. Desse modo, constitui-se uma prática adequada para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do pensamento probabilístico, uma vez que esse ambiente de aprendizagem favorece uma cultura de aula de Matemática baseada na negociação e na construção de ideias compartilhadas.

É fato que há intersecção entre o raciocínio combinatório e o pensamento probabilístico; contudo, diante do apresentado neste capítulo, acredito que, para que haja a construção de sentindo nessa intersecção, é preciso que esses raciocínios sejam articulados.

Penso que essa articulação é estabelecida a partir de um trabalho que promova a mediação entre conceitos cotidianos e conceitos científicos. Para que essa mediação aconteça, a linguagem, a sequência de tarefas e o ambiente de aprendizagem também precisam estar imbricados com essa articulação, conforme apresentado no esquema abaixo.

Esquema 1 − Articulação entre raciocínio combinatório e pensamento probabilístico



Fonte: Elaboração da pesquisadora.

Esse esquema apresenta os componentes mediadores necessários para a articulação do raciocínio combinatório e do pensamento probabilístico: tarefas envolvendo diferentes problemas de combinatória e probabilidade, linguagem como mediadora do processo de abstração e generalização e ambiente de aprendizagem desenvolvido na interação dialógica entre professor e alunos.

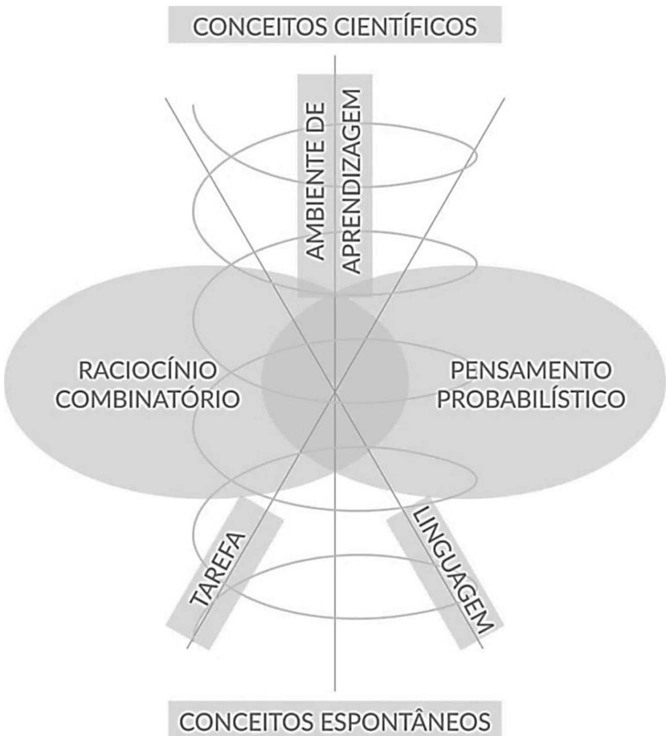
Porém, para que haja a produção de significações sobre a combinatória e a probabilidade, é preciso que exista movimento entre os conceitos espontâneos e os científicos, presentes no ideário dos envolvidos no processo. Compreendo que, de acordo com a perspectiva vygotskyana, há uma interdependência entre os conceitos espontâneos e os científicos. É papel da escola a formação dos conceitos científicos, visto que os cotidianos são adquiridos “em situações informais de aprendizagem. O fato de que esses conceitos se formam na experiência, logo, no contato direto com o mundo, explica que eles têm um nível de abstração pouco elevado” (FRIEDRICH, 2012, p. 99). Isso pode ser identificado em relação ao conceito de probabilidade. O uso de termos do vocabulário probabilístico nas experiências cotidianas dos alunos faz com que eles tenham ideias pouco formalizadas de conceitos de aleatoriedade; assim, cabe à escola promover esse desenvolvimento conceitual.

Se, por um lado, os conceitos científicos são desenvolvidos na escola; por outro, os conceitos espontâneos vão produzir sentidos iniciais aos científicos. Estes vão se desenvolvendo em relação com outros conceitos.

> Vigotski mostra que um conceito científico tem uma relação tanto com os objetos do mundo, quanto com os outros conceitos. Isso significa duas coisas: 1) os conceitos científicos sempre se apoiam nos conceitos cotidianos, não podendo existir sem eles e 2) um conceito científico existe sempre no interior de um sistema de conceitos. (FRIEDRICH, 2012, p. 100).

Em alguns casos, há que se promover rupturas com os conceitos espontâneos de probabilidade e combinatória para que o estudante se aproprie dos conceitos científicos. Estes, por sua vez, ressignificam os conceitos espontâneos e consequentemente vão se elevando de acordo com os níveis de generalização. Essa conjectura sugere o seguinte esquema:

Esquema 2 – Movimento entre raciocínio combinatório e pensamento probabilístico



Fonte: Elaboração da pesquisadora.

Assim, considero, conforme o esquema apresentado, que a construção de conceitos sobre combinatória e probabilidade pressupõe um sistema que parte do conhecimento das relações entre a combinatória e a probabilidade, da mobilização e do desenvolvimento de conceitos espontâneos e científicos, articulados por componentes mediadores – linguagem, tarefa e ambiente de aprendizagem – em um trabalho pedagógico com uma perspectiva problematizadora. Dessa forma, em um movimento espiral, os conceitos sobre combinatória e probabilidade vão adquirindo novos níveis de generalizações.

Nesse contexto, o professor tem um papel estratégico e, por consequência, duplo : o de articulador de conceitos com os alunos e o de organizador de todo o esquema. Dessa forma, o conjunto de suas ações precisa estar pautado em sua intencionalidade. Ou seja, o professor, ao organizar todo o trabalho, precisa ter ideia de "onde" e "como" vai atingir seus objetivos e também dos indicadores de desenvolvimento do processo de ensino e de aprendizagem, como a fase de reflexão conclusiva, proposta por Christiansen e Walter (1986).

Nesse esquema, conforme mencionado, o professor também tem seus conceitos sobre o processo de ensino de combinatória e probabilidade. Se mobilizados, eles possibilitam que novos níveis de generalização sejam construídos nesse movimento.

No próximo capítulo, apresento a descrição dos procedimentos metodológicos desta pesquisa. Esses desencadearam minhas conclusões para o desenvolvimento do esquema de movimento entre raciocínio combinatório e pensamento probabilístico.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: DESCREVENDO O OBJETO DE INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo apresento o percurso metodológico da pesquisa. Para tal, descrevo os procedimentos utilizados, o contexto e as ações desenvolvidas, visando a responder à questão de investigação − “O que se evidencia sobre o desenvolvimento do pensamento probabilístico com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental quando ele se articula ao desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de um trabalho pedagógico na perspectiva da problematização?”. Busco, ainda, atingir os objetivos propostos:

- Identificar as ideias sobre combinatória que emergem do processo de comunicação oral e escrita, tendo como contexto a problematização em sala de aula;
- identificar quais tarefas são potencializadoras para o raciocínio combinatório;
- buscar indícios da contribuição de um estudo da combinatória articulado ao desenvolvimento do pensamento probabilístico.

3.1 O foco de investigação

Este estudo teve como foco central a interação entre o raciocínio combinatório e o pensamento probabilístico de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Insere-se no campo da prática pedagógica em Educação Matemática, que considera a sala de aula do professor pesquisador como um espaço de investigação. Ele foi desenvolvido a partir da pesquisa de mestrado realizada no programa de Pós Graduação *Stricto Sensu* em Educação, na Universidade São Francisco, concluída em 2010 e intitulada *O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental*.

Na pesquisa de mestrado, algumas observações relacionadas à probabilidade e à combinatória me deixaram inquieta, como os equívocos de interpretação de espaço amostral apresentados por diversos alunos ao estimarem a probabilidade em diferentes situações, o modo organizado de um aluno escrever as possibilidades e a frequência com a qual ele determinava a probabilidade dos eventos apresentados de maneira formal. Considerei que esse fator poderia ser um indicativo sobre a importância da organização dos dados na definição do espaço amostral. Essa necessidade foi reforçada quando constatei que boa parte dos alunos indicava os termos possibilidade e probabilidade como sinônimos, o que me preocupa, pois determinar as possibilidades em certa situação não é o mesmo que determinar as Probabilidades.

Conforme mencionado, a pesquisa de doutorado se iniciou na sequência do mestrado, no segundo semestre de 2010. Durante o primeiro semestre do doutorado, todos os dados da pesquisa foram produzidos, pois as classes do 6º ano em que ministrava aulas eram propícias à investigação; eu acreditava que esses alunos haviam vivenciado poucas experiências sobre combinatória e Probabilidade em contexto escolar. Tal situação era favorável à pesquisa relacionada à probabilidade, pois, como apontado por Shaughnessy (1992), as concepções equivocadas sobre estocástica são difíceis de serem mudadas ou superadas pelos estudantes.

Visando responder ao problema e aos objetivos de pesquisa, parti das considerações dos três aspectos, ou dimensões, considerados por Batanero, Godino, e Navarro-Pelayo (1994) fundamentais para o ensino da Matemática: a linguagem simbólica, o sistema conceitual e a atividade de resolução de problemas, conforme discutido no capítulo anterior. Para tanto, desenvolvi um ambiente de aprendizagem composto por mim, professora-pesquisadora, e uma turma de 28 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, constituída por sujeitos únicos, com conceitos diferenciados e expectativas particulares, envolvidos em um contexto ora como autores/atores principais, ora como secundários. Os dados relacionados aos sujeitos serão descritos no decorrer do capítulo.

Diante de tais considerações e a partir das situações didáticas apresentadas por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), organizei uma sequência de tarefas que possibilitavam a discussão da linguagem probabilística, o desenvolvimento de conceitos de combinatória e probabilidade e o contato com jogos e problemas envolvendo a combinatória e a probabilidade. Para o desenvolvimento das tarefas e da pesquisa, procedimentos metodológicos permearam a investigação.

3.2 As opções metodológicas

As características da pesquisa qualitativa são abordadas na Educação por diversos autores, como: Bogdan e Biklen (1994), Goldenberg (1997) e Lüdke e André (1986). Dentre essas abordagens, destaco a apresentada por Lüdke e André (1986, p.13): “A pesquisa qualitativa ou naturalista envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes”.

Goldenberg (1997, p.19) esclarece que na pesquisa qualitativa os pesquisadores “buscam compreender os valores, crenças, motivações e sentimentos humanos, compreensão que só pode ocorrer se a ação é colocada dentro de um contexto de significado”. Além disso, a autora complementa que o seu resultado não pode ser “fruto da observação pura e simples, mas de um diálogo e de uma negociação de pontos de vista, do pesquisador e pesquisados” (GOLDENBERG, 1997, p. 24).

De forma semelhante, D’Ambrósio e D’Ambrósio (2006, p. 78), pesquisadores na área da Educação Matemática, destacam que nas últimas décadas a pesquisa qualitativa tem sido considerada a mais adequada para a Educação, uma vez que “tem como foco entender e interpretar dados e discursos mesmo quando envolve grupos de participantes” e depende da relação observador-observado. O desenvolvimento da investigação em que o professor também assume o papel de pesquisador é visto pelos referidos autores como uma ação que resulta em aprendizagem, pois esse tipo de pesquisa pode “gerar nova compreensão sobre a matemática de seus alunos, sobre a realidade de sua sala de aula, sobre sua prática pedagógica, sobre a qualidade de seu currículo, sobre a matemática em si, ou sobre a aprendizagem matemática” (D’AMBRÓSIO; D’AMBRÓSIO, 2006, p. 83).

Tais características são compartilhadas e explicitadas na perspectiva histórico-cultural. Os autores que assumem esse ponto de vista defendem que as interações sociais e a linguagem são determinantes para a aprendizagem, para o desenvolvimento humano. Segundo Vygotsky (1991), a tarefa de pesquisa deve estudar o fenômeno em um processo vivo, em sua historicidade. A partir dessa concepção, professor e alunos se envolvem em um sistema dialógico de significações sociais, uma vez que “pela mediação do outro, revestida de gestos, atos e palavras, a criança vai se apropriando (das) e elaborando as formas de atividade prática e mental consolidadas (e emergentes) de sua cultura, num processo em que pensamento e linguagem articulam-se dinamicamente” (FONTANA, 1993, p. 122). Para Freitas (2010, p. 13), “fazer pesquisa qualitativa na perspectiva histórico-cultural consiste não apenas em descrever a realidade mas também em explicá-la realizando um movimento de intervenção nessa mesma realidade”.

De acordo com essa compreensão, professores e alunos se constituem como sujeitos em interação que participam e se desenvolvem com a pesquisa. Dessa forma, a mediação do pesquisador e as ações dos pesquisados provocam significações para ambos.

A análise de tais significações, parte dos dados produzidos na investigação. Lüdke e André (1986) recomendam o uso de estratégias adequadas de produção de dados para a pesquisa qualitativa, como: 1) a delimitação progressiva do foco de estudo; 2) a formulação de questões analíticas; 3) o aprofundamento da revisão de literatura; 4) a testagem de ideias com os sujeitos; e 5) o uso de comentários, observações e especulações ao longo da coleta.

Os dados desta pesquisa foram coletados na sala de aula, no ambiente em que eu e meus alunos, pesquisadora e sujeitos de pesquisa, compartilhamos de modo regular durante o ano letivo. No entanto, para a pesquisa, houve um recorte espaço-temporal de aproximadamente um mês, sem que acontecimentos vivenciados em nossa rotina escolar fossem anulados, uma vez que esses fatos são preponderantes para a investigação.

A pesquisa foi realizada especificamente no mês de novembro, final de semestre, porque, como ingressei no doutorado no segundo semestre, precisei de certo tempo de estudo e pesquisa para a elaboração da sequência de tarefas. Além disso, Estatística era o tema de estudo do 4º bimestre do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011); dessa forma, o trabalho com a combinatória e a probabilidade estaria em concordância com a Proposta Curricular.

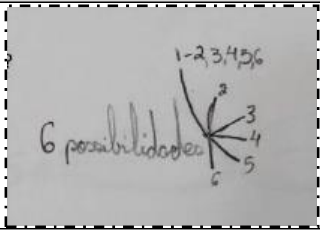
A equipe gestora da instituição de ensino em que a pesquisa foi realizada tinha ciência da pesquisa e de seus procedimentos de coleta de dados e, desde o início, não colocou empecilhos para sua realização nas aulas de Matemática. Pelo contrário, apoiou-a, uma vez que eu já havia desenvolvido trabalho semelhante na pesquisa de mestrado e observaram que os alunos não foram prejudicados, mas beneficiados por estar envolvidos em uma dinâmica de ensino em que a comunicação e o desenvolvimento de ideias matemáticas eram privilegiados.

Parto do pressuposto de que um estudo articulado entre a combinatória e a probabilidade promove o desenvolvimento do pensamento probabilístico com significação aos alunos do Ensino Fundamental. Compreendo que essa proposição possa ser adquirida em contexto de sala de aula com tarefas envolvendo a problematização e as estratégias adequadas de produção de dados. Assim, os dados desta pesquisa foram produzidos a partir dos seguintes instrumentos:

- Registros escritos dos grupos de alunos em folha impressa fornecida pela professora, realizados durante as atividades;
- registros em áudio e vídeo de alguns grupos durante o desenvolvimento das tarefas pelas duplas;
- registros em vídeo da classe durante a socialização das tarefas;
- registros escritos pela professora-pesquisadora no Diário de Campo.

Para facilitar a compreensão dos dados produzidos e dos instrumentos de produção utilizados, usei alguns recursos visuais para representá-los, os quais apresento no Quadro 3:

Quadro 3 – Instrumentos de produção dos dados

INSTRUMENTOS	MODOS DE REPRESENTAÇÃO
Registro escrito	
Diário de campo	*Depois da tarefa anterior[9], os alunos olharam para essa de forma mais "tranquila". Alguns alunos não sabiam o significado da palavra "itinerários", mas de imediato os colegas disseram: "caminho; percurso; trajeto". Eles compreenderam o enunciado na tarefa. A figura que representava os itinerários também foi compreendida por eles. (DC, 29/11/2010)*
Fragmentos de registro em vídeo	
Fragmentos de registro em áudio	

Fonte: Elaboração da pesquisadora.

Os dados foram coletados em uma instituição de ensino que possui características peculiares, determinadas pela comunidade em que está inserida e pela comunidade escolar, as quais considero importante apresentar.

3.3 A escola, a comunidade e a comunidade escolar

A escola, instituição de ensino, na qual a pesquisa foi realizada é de ensino regular e é constituída por 8 classes de Ensino Médio no período noturno e 18 classes de Ensino Fundamental II no período diurno, sendo as turmas do 8º e 9º anos no período da manhã e as de 5º e 6º anos no da tarde. É a única que atende esses níveis de ensino no bairro, que possui aproximadamente 20 mil habitantes − o maior bairro da cidade de Amparo/SP, considerado o bairro dos trabalhadores. Possui espaço físico adequado para sua demanda, como salas de aula e quadra esportiva, porém outros ambientes específicos de aprendizagem, como laboratórios, sala de vídeo e biblioteca, são improvisados e possuem uso limitado aos professores para retirada de materiais.

Ela foi marcada nas últimas duas décadas pelas transformações ocorridas na sociedade brasileira, principalmente no que diz respeito ao aumento de renda da população. Dito isso, poderia ser classificada como uma instituição de ensino de periferia que oferta mão de obra pouco qualificada para as empresas do entorno ou para o setor de serviços da cidade. A cidade de Amparo cresce a olhos vistos, principalmente na região onde se localiza a escola – Jardim São Dimas –, e isso tem criado na população um sentimento de progresso; a vida universitária é uma realidade para os alunos que terminam o Ensino Médio, pois quase todos prestam o Enem e entram nas faculdades particulares; todavia, as públicas ainda estão muito distantes.

Cotidianamente tem-se a impressão de que a escola compete com outras instituições educativas ou projetos que se concretizam na vida dos alunos em período contrário ao das aulas regulares, exemplos: Guarda Mirim[27], Senai[28] e Formare[29]. Essas outras “instituições” ou já são parte da vida dos alunos ou estão no horizonte deles e de suas famílias. Nesse aspecto, a escola, muitas vezes fica em segundo plano, já que não garante de imediato renda ou possibilidade concreta do emprego.

Diante disso, a comunidade escolar tem cada vez mais se colocado diante dessas questões e pensado em formas de dialogar com as instituições. Até aqui não tem tido muito sucesso, o motivo talvez seja o fato de que cada uma delas dialoga com um contexto específico da vida do aluno, e a instituição escolar pensa no aluno como futuro cidadão do

---

[27]Instituição pública que capacita e emprega adolescentes, denominados “guardinhas”.

[28]Instituição que oferece cursos técnicos para jovens em diversas áreas tecnológicas do ramo industrial.

[29] Projeto institucional que visa desenvolver a potencialidade de jovens de famílias em situação de vulnerabilidade social, possibilitando sua inserção no mundo do trabalho. Informação disponível em: <http://formare.org.br/formare/o-que-e-o-formare/proposta-pedagogica>. Acesso em: 25 jan. 2015.

mundo, não se prendendo à carteira de trabalho, ao emprego, pois isso não é mais problema para os alunos ou para seus familiares, já que há opções de trabalho na região. Atualmente, a comunidade escolar tem se preocupado em criar estratégias para que os alunos ampliem seus horizontes, sobretudo no que diz respeito à escolha de profissões não convencionais para seu contexto.

Noto que a instituição escolar ainda busca sua identidade ou tem problemas com isso, pois ainda se coloca em comparação com as outras escolas da cidade. O professor vive um conflito com relação a seu papel, porque, de um lado, a comunidade ou a sociedade o delimitam, por outro, a academia, as políticas públicas e a sociedade organizada todos os dias apresentam uma novidade para ele. Quanto à formação docente, esta também se vê às voltas com a quebra de paradigmas e a construção de novos. O professor, em sala, precisa lidar com as dificuldades teóricas e práticas e com suas expectativas de trabalho, que quase sempre se chocam com as dos pais e de todos que "pensam" a educação, como os demais funcionários da escola, os quais muitas vezes agem como juízes dos professores e não se dão conta de seu envolvimento na escolarização, parece que a problemática do ensino não lhes diz respeito.

No entanto, nesse contexto em que diferentes representações se confrontam e se constroem há um ambiente de ensino. Mesmo com diferentes expectativas, professores e alunos se envolvem nele buscando o desenvolvimento individual e social.

3.3.1 A sala de aula e os alunos

Eu, professora-pesquisadora, ministrei aulas de Matemática de 2003 a 2014[30] nessa escola em turmas do Ensino Fundamental e Médio. O grande desafio eram os 6os anos, pois normalmente são formados por 4 ou 5 turmas com cerca de 35 alunos cada, sendo que a maioria deles vem de duas escolas municipais que há no bairro, e alguns de outros estados brasileiros, já que o bairro é próximo de grandes empresas e emprega muitas pessoas. Muitos alunos, e até mesmo pais, chegam à escola assustados, pois a realidade é bastante diferente das escolas municipais, que recebem apenas alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e têm demanda menor. Esses alunos apresentam realidades muito distintas tanto de poder aquisitivo como de aprendizagem escolar.

[30] Deixei de ministrar aulas nessa escola ao ser aprovada em um concurso para professora na Universidade Federal de Campina Grande e assumir o cargo em fevereiro de 2015.

Diante desse contexto, há certa preocupação por parte dos gestores e dos professores com esses alunos e com o modo de acolhê-los e inseri-los em um novo espaço de aprendizagem. A preocupação com o conhecimento matemático dos estudantes é grande, pois a avaliação da aprendizagem em processo[31], realizada em fevereiro e agosto de cada ano, indica índices baixos de acertos nas questões apresentadas. Uma atitude tomada por mim e por outra professora de Matemática que também ministra aulas na escola era acompanhar as mesmas turmas por, no mínimo, dois anos. Assim, era estabelecido em sala de aula, por meio de uma relação de conhecimento e confiança, um ambiente de aprendizado compartilhado entre alunos e professora. Conforme apontado por Hiebert et al (1997, p. 7, tradução minha[32]), "a sala de aula, de qualquer tipo, é um sistema. Ela é composta de muitos elementos individuais que trabalham juntos para criar um ambiente de aprendizagem".

No período da pesquisa, eu ministrava aulas em quatro turmas do 6º ano, mas optei por realizar a pesquisa em apenas uma, já que a quantidade de tarefas seria grande, e a maioria dos agrupamentos seria realizada em duplas. Assim, um número elevado de alunos dificultaria a análise, já que a pesquisa se insere em uma abordagem qualitativa, na perspectiva histórico-cultural, e se deseja observar as implicações do raciocínio combinatório no desenvolvimento do pensamento probabilístico dos alunos em um espaço de negociação de ideias entre estudantes e professora-pesquisadora.

Escolhi o 6º ano D devido ao horário[33] dessa turma. Eram seis aulas na semana, sendo todas duplas, uma na sequência da outra. Assim, havia cerca de 100 minutos de aulas, três vezes na semana, para a pesquisa. Nas demais classes as aulas eram distribuídas nos cinco dias da semana, e quando havia aula dupla, era intercalada por aulas de outra disciplina. A pesquisa foi desenvolvida no período de um mês, tempo considerado adequado para a realização das tarefas, em praticamente todas as aulas foram desenvolvidas as tarefas da pesquisa.

Os sujeitos envolvidos eram 28 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, 14 meninos e 14 meninas, com idade entre 11 e 13 anos, nenhum deles em situação de inclusão[34]. O ano

---

[31] O exame aplicado para diagnosticar o nível de aprendizado dos alunos do 2º ano do Ensino Fundamental, dos anos finais do Ensino Fundamental e de todas as séries do Ensino Médio matriculados na rede estadual de ensino do Estado de São Paulo. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/avaliacao-aprendizagem>. Acesso em:25 jan. 2015.

[32] "Classroom instruction, of any kind, is a system. It is made up of many individual. Elements that work together to create an environment for learning".

[33] A duração de cada aula é de 50 minutos.

[34] Estudante com deficiência física, comprometimento mental ou necessidade de atenção especial.

de pesquisa era também o de ingresso desses alunos na escola, porém esse fato não causou estranhamento, pois, como a pesquisa aconteceu no segundo semestre de 2010, eles já estavam acostumados com a “nova” escola. Minha experiência como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental foi um facilitador na relação harmoniosa que foi estabelecida com os alunos logo no início do ano, uma relação de compreensão da importância do outro no processo de ensino e de aprendizagem. Acredito que esse contexto favoreceu a comunicação de ideias e o desenvolvimento de (re)significações conceituais em diferentes âmbitos, individual e coletivo.

Como mencionado, os alunos vinham de realidades de aprendizagem diferenciadas, porém, mesmo diante desse fato, representações da escola e das aulas de Matemática eram compartilhadas por muitos alunos dessa turma. Muitos falavam sobre suas dificuldades com a aprendizagem da Matemática, e alguns alunos se mostraram bastante tímidos quanto à apresentação de ideias nas aulas. Percebi, como é comum em uma sala heterogênea, que alguns alunos se comunicavam mais e falavam sobre seus conceitos espontaneamente, outros nem tanto.

No período anterior à pesquisa, a dinâmica das aulas não era a mesma adotada, pois, de acordo com as orientações dos gestores das escolas, os professores deveriam desenvolver as situações de aprendizagem indicadas no material impresso que alunos e professores recebem, organizadas a partir do Currículo do Estado de São Paulo. No entanto, mesmo estando limitada às situações de ensino que deveria propor, desde o início do ano procurei criar um ambiente de comunicação de ideias, em que os alunos expunham suas concepções sobre o que estava sendo estudado nas aulas de Matemática, trocavam opiniões, questionavam os colegas e a professora e eram questionados por estes. Tal fato possibilitou que o espaço social da sala de aula fosse favorável à produção de conhecimento, conforme apontada por Sadovsky (2007, p. 57) ao afirmar: “elaborar conhecimento em cooperação com os outros abre espaço, de maneira geral, a um intercâmbio que permite aprofundar as ideias em jogo num determinado momento”.

Acredito que o fato de alguns alunos, no decorrer desta pesquisa, apresentarem mais indícios de (re)significação de conceitos que outros, dando a ideia de que estão em nível diferenciado de aprendizagem, é um indicativo da complexidade das relações de ensino e da emergência da produção de sentidos e da construção de conceitos nas relações de ensino

(SMOLKA, 2010). Para tanto, faz-se necessária uma organização no trabalho a ser desenvolvido em sala de aula que possibilite significações na aprendizagem.

A partir da intencionalidade pedagógica do professor, o trabalho em sala de aula deve ser organizado, visando a (re)significação de procedimentos e conceitos. O fato de ter uma organização não significa que o processo de ensino deva ser estático, mas não deve ser espontâneo. Ele pode e deve ser alterado à medida que problemáticas vão surgindo no processo. Enfim, neste trabalho tanto a ação pedagógica quanto a investigativa pautam-se na perspectiva histórico-cultural.

Na apresentação desta pesquisa, os nomes dos alunos foram substituídos para preservar suas identidades.

3.4 Contextos gerais da pesquisa de campo

A pesquisa de campo se iniciou com a escolha das tarefas e com a ordem de desenvolvimento delas. Dessa forma, antes de começar a pesquisa de campo, elaborei o seguinte roteiro para o desenvolvimento das tarefas:

Quadro 4 − Roteiro das tarefas

TAREFAS
Tarefa 1 – Linguagem probabilística
Tarefa 2 – Criação de Bandeiras
Tarefa 3 – Quadrados
Tarefa 4 – Construção de torres
Tarefa 5 – Padrão de cores
Tarefa 6 – Prisioneiros
Tarefa 7 – Árvore Genealógica
Tarefa 8 – O problema do táxi
Tarefa 9 – Itinerários
Tarefa 10 – Número de Telefones
Tarefa 11 – O problema das cordas
Tarefa 12 – Jogo: senha
Tarefa 13 – Corrida de cavalos
Tarefa 14 – Lançamento de dardos
Tarefa 15 – Jogo do Lobo Mau e da Chapeuzinho
Tarefa 16 – Lançamento de moedas: situação-problema
Tarefa 17 – Lançamento de moedas: experimento
Tarefa 18 – Jogo de par ou ímpar
Tarefas sobre probabilidade: de 1 a 5

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora

A partir do roteiro, o material utilizado em cada tarefa era organizado antes de sua aplicação; ele incluía: folha impressa para a apresentação da tarefa e para o registro dos alunos, tiras de papéis coloridos, dados, moedas, tabuleiro/folhas impressas de jogos, entre outros. Para cada dia de pesquisa, eu planejava o desenvolvimento de três tarefas, mas nem sempre isso acontecia, pois o tempo de realização de cada uma se alterava de acordo com suas características, algumas necessitavam de maior tempo para se concretizarem − uma aula ou um pouco mais −, outras não.

Assim como o material, as duplas também eram planejadas previamente. Em minha experiência em sala de aula, percebi que a organização dos agrupamentos interfere no processo de ensino e de aprendizagem. Ou seja, a quantidade de alunos que realizam cada tarefa é significativa. Por exemplo, agrupar quatro alunos para a fase de desenvolvimento independente em uma tarefa como a “linguagem probabilística” pode dificultar a reflexão dos alunos, pois o fato de muitas ideias serem explicitadas, a princípio, pode gerar obstáculos para o processo de significação deles. No entanto, na fase da reflexão conclusiva a diversidade de ideias é importante para a elaboração conceitual, pois os alunos têm a oportunidade de (re)significar suas ideias.

Em minha experiência também notei que alguns agrupamentos são mais produtivos, que outros. Dessa forma, critérios pedagógicos são relevantes à interação e à produção de conhecimentos, como as facilidades e/ou as dificuldades apresentadas nas aulas de Matemática e outras características pessoais, por exemplo, liderança, flexibilidade e responsabilidade. Diante desses critérios, organizei os agrupamentos para o desenvolvimento das tarefas desta pesquisa. Acredito que esse trabalho é feito com frequência pelo professor que atua em sala de aula, uma vez que as experiências cotidianas possibilitam que esses aspectos sejam observados nos alunos. Em algumas tarefas, as duplas eram modificadas, em outras, elas eram mantidas, pois algumas duplas nem sempre apresentavam afinidade a ponto de que significações fossem produzidas. Esse fato é compreensível porque marcas de subjetividades – sensibilidade e solidariedade – transcendem as interações entre professor e alunos na sala de aula (SMOLKA, 2010).

Tendo em mãos o material necessário, os agrupamentos planejados e os materiais para a coleta de dados – folha para registro dos alunos, Diário de Campo e gravadores de áudio e vídeo –, eu iniciava o trabalho de pesquisa de campo, pois as aulas no 6º ano D eram as primeiras que ministrava no turno da tarde. O planejamento, a organização prévia das tarefas e minha experiência como professora desse nível de ensino possibilitaram que o tempo previsto para a pesquisa fosse potencializado, sendo, assim, suficiente.

Logo no início da aula, eu falava com os alunos sobre as tarefas que realizaríamos e como seriam os agrupamentos. Depois disso, eles se organizavam com os colegas. Na sequência, iniciávamos a dinâmica da aula fazendo a *apresentação* da tarefa. Nessa fase, eu procurava explicar a tarefa de maneira clara e objetiva, questionava os alunos sobre suas ideias quanto às palavras usadas no texto da tarefa e ao tema a ser estudado.

Na fase da *atividade independente* os alunos realizavam as tarefas normalmente em duplas. Nesse momento, eu conversava com algumas duplas procurando saber quais eram suas concepções sobre o que estavam desenvolvendo e quais as ações fariam para chegar ao resultado. Após essa fase, realizávamos a da *reflexão conclusiva.* Nesse momento, as duplas apresentavam para os colegas da classe suas conclusões, e os colegas refutavam ou não os demais. Em diversas situações, os alunos explicavam para os colegas como chegaram à determinada conclusão. O objetivo era que os alunos refletissem sobre as diferentes considerações e chegassem ou não a um consenso.

Meu papel enquanto professora, nesse estágio, era de mediar as ideias dos alunos, visando a elaboração de conceitos sobre a combinatória e a probabilidade. Muitas vezes, para que isso acontecesse, diferentes estratégias eram utilizadas, como: apresentação de registros escritos dos alunos em *slides* para que observassem semelhanças e diferenças, seleção de algumas duplas para exporem suas ideias de maneira detalhada aos colegas e contraexemplos para que ideias equivocadas fossem observadas. Minhas ações enquanto pesquisadora tinham o propósito de envolver os alunos em um movimento de construção de sentidos entre raciocínio combinatório e pensamento probabilístico por meio da linguagem, das tarefas propostas e do ambiente de aprendizagem, os quais classifico como componentes mediadores de conhecimento.

No decorrer dessa dinâmica, os alunos realizaram registros escritos sobre as tarefas. Eu fiz de gravações de áudio e vídeo de algumas duplas e gravação de vídeo da fase de reflexão conclusiva. Os alunos não se sentiam intimidados diante desses recursos.

As tarefas que fizeram parte da sequência tinham características e objetivos específicos. Indicá-los-ei na seção seguinte.

3.5 As tarefas

Conforme mencionado anteriormente, foram desenvolvidas inicialmente 18 tarefas, que proporcionavam aos alunos o contato com a linguagem ligada à combinatória e à probabilidade, o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do pensamento probabilístico e o contato com problemas relacionados a essas duas áreas que envolviam diferentes características e possibilidades de resolução. Tais tarefas tinham como objetivo principal promover a reflexão sobre a combinatória e a probabilidade nas aulas de Matemática.

No segundo momento, foram desenvolvidas cinco tarefas focadas na probabilidade que, no entanto, possibilitavam que conceitos sobre combinatória fossem explicitados nas respostas apresentadas pelos alunos. Essas tarefas foram realizadas individualmente. De acordo com Hiebert et al (1997), em um ambiente de aprendizagem, tarefas que possibilitam a interação social em sala de aula são essenciais para a compreensão conceitual, mas esse contexto precisa deixar resíduos. Ou seja , os conceitos desenvolvidos precisam ser incorporados à prática dos alunos na resolução de outros problemas em contextos diferentes.

A maioria das tarefas foi organizada a partir das sugestões de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994). Contudo, outros autores também embasaram o trabalho: Antônio Lopes (2000); Godino, Batanero e Cañizares (1996); Lopes (2003); Macedo, Petty e Passos (1997); São Paulo (1998); e Skovsmose (2008). Os diferentes tipos de problemas relacionados à análise de combinatória apresentados por Batanero, Godino, e Navarro-Pelayo (1994), descritos no capítulo anterior, foram contemplados na sequência de tarefas, conforme o quadro apresentado a seguir.

Quadro 5 − Organização das tarefas: características dos problemas

Tarefa	**Solução pedida**	**Número de operações combinatórias**	**Modelo combinatório explícito no enunciado**	**Tipo de objetos que se combinam**	**Tamanho dos parâmetros/variabilidade**
Linguagem probabilística	Contagem, classificação e otimização.	Composto	Probabilidade	Dedos	Pequenos / variáveis
Criação de Bandeiras	Enumeração, contagem e classificação.	Simples	Seleção e participação	Cores	Pequenos / variáveis

Quadrados	Enumeração, contagem e classificação.	Simples	Seleção e participação	Quadrados	Pequenos / variáveis
Construção de torres	Enumeração e contagem.	Simples e composto	Seleção e colocação	Cores	Pequenos / variáveis
Padrão de cores	Enumeração e contagem.	Simples e composto	Seleção e colocação	Padrões de cores	Pequenos / variáveis
Prisioneiros	Enumeração e contagem.	Simples e composto	Seleção e colocação	Pessoas	Pequenos / variáveis
Árvore Genealógica	Enumeração e contagem.	Simples e composto	Seleção e colocação	Pessoas	Pequenos / variáveis
Problema do táxi	Existência, enumeração, contagem e otimização.	Simples	Seleção	Percursos	Pequenos / variáveis
Itinerários	Existência, enumeração, contagem e otimização.	Simples e composto	Seleção	Itinerários	Pequenos / variáveis
Número de telefones	Enumeração e contagem	Simples	Seleção	Números	Pequenos / variáveis
Problema das cordas	Existência e enumeração.	Composto	Procedimentos lógicos	Cordas	Pequenos / variáveis
Jogo: senha	Existência, enumeração, contagem, classificação e otimização.	Simples	Seleção e partição	Letras e números	Pequenos / variáveis
Corrida de cavalos	Existência, enumeração, contagem, classificação e otimização.	Composto	Probabilidade	Dados	Pequenos / variáveis
Lançamento de dardos	Enumeração e contagem.	Composto	Probabilidade	Dardos	Pequenos / variáveis
Jogo do Lobo Mau e da Chapeuzinho	Existência, enumeração, contagem e classificação.	Simples e composto	Participação	Moedas	Pequenos / variáveis
Lançamento de moedas: situação-problema	Contagem	Composto	Probabilidade	Moedas	Pequenos / variáveis
Lançamento de moedas: experimento	Enumeração e contagem	Simples	Seleção	Moedas	Grande / variáveis
Jogo de par ou ímpar	Existência, enumeração, contagem e classificação.	Simples	Partição	Dados	Pequenos / variáveis

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

Acredito que tais ações venham ao encontro das considerações de Hiebert et al (1997)quando defendem que, ao iniciar um trabalho a partir de problemas que estimulem os alunos a desenvolver soluções, procedimentos e entendimentos estarão fortemente relacionados, possibilitando a construção de conceitos matemáticos significativos.

De acordo com Christiansen e Walther (1986), a linguagem tem papel indispensável e central nos processos de significação para o aluno. Desse modo, a dinâmica de aprendizagem e a sequência de tarefas devem possibilitar a comunicação de ideias e a formação de conceitos.

Conforme mencionado, ao organizar a sequência de tarefas procurei selecionar situações-problema de acordo com a classificação dos problemas que envolvem a análise combinatória proposta por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), apresentada no segundo capítulo. Dessa forma, os cinco tópicos apresentados – tipo de solução, operações combinatórias, modelo combinatório implícito no enunciado, tipos de objetos que se combinam e tamanho dos parâmetros – foram contemplados na sequência de tarefas. Ao revisar essa e outras literaturas, observei certa variedade de características no enunciado de problemas de combinatória; tal fato conduz a diferentes formas de pensar e resolver esses problemas.

Acredito que, assim como o exposto, outras questões precisavam ser contempladas nas tarefas para que o raciocínio combinatório e o pensamento probabilístico fossem desenvolvidos, como a linguagem probabilística. Dessa forma, a primeira tarefa[35], "linguagem probabilística", visava promover a discussão sobre a interpretação e os valores atribuídos a termos do vocabulário probabilístico, pois, conforme observado em pesquisa anterior, tarefas deste tipo possibilitam "que o aluno se sinta confiante em expressar suas ideias e motivado a realizar outras tarefas, uma vez que as compreende" (SANTOS, 2010, p. 174).

Na sequência da tarefa "linguagem probabilística", organizei dez tarefas[36] visando possibilitar que procedimentos específicos sobre combinatória fossem desenvolvidos. Dentre esses procedimentos se destacam:

- Experimentação de procedimentos de enumeração;
- busca de procedimentos sistemáticos de enumeração;
- contagem de elementos de produtos cartesianos e de conjuntos;

[35]Tarefa 1: anexo A.
[36]Tarefas 2 a 11: anexo B.

- classificação de objetos por propriedade comum;
- representação simbólica de configurações combinatórias;
- cálculo do número de configurações mediante enumeração;
- interpretação de diagrama de árvore previamente construída;
- cálculo de número de configurações por meio de cálculo de produto;
- interpretação e construção de grafos;
- contagens de caminhos em um grafo;
- construção de diagrama de árvore para representar elementos de produtos cartesianos.

Considero que o desenvolvimento de situações-problema que contemplem tais procedimentos possa conduzir os alunos ao desenvolvimento de conceitos a partir de problemas combinatórios e minimizar a dificuldade de resolver problemas sobre combinatória, apontada por Roa (2000). Isso se deve ao processo de ensino e às situações apresentadas favorecerem a mobilização do raciocínio combinatório.

Acredito que as tarefas selecionadas estão em consonância com as considerações de Fischbein (1975), que, como já indicado, afirma que a análise das possibilidades não pode ser reduzida a uma simples enumeração de elementos. Tal análise, para o autor, deve ser um processo que, com base nas informações existentes, desenvolva de modo racional e construtivo a criação do espaço amostral dos resultados possíveis.

Considero que o uso de jogos em uma perspectiva problematizadora, assim como as tarefas anteriores[37], é importante para a articulação de conceitos sobre combinatória e probabilidade, uma vez que concordo com a afirmação de Grando (2008, p. 25) sobre o jogo e a Matemática no contexto de sala de aula:

> O jogo, pelo seu caráter propriamente competitivo, apresenta-se como uma atividade capaz de gerar situações-problema “provocadoras”, onde o sujeito necessita coordenar diferentes pontos de vista, estabelecer várias relações, resolver conflitos e estabelecer uma ordem. Aperfeiçoar-se no jogo significa jogá-lo operatoriamente, considerando todos esses aspectos.

[37] Tarefas 1 a 11.

Dessa forma, escolhi como tarefas[38] alguns jogos, como “Corrida de Cavalos”[39], “Senha”[40], “Lançamento de dardos”[41], “Lobo mau e Chapeuzinho”[42], “Lançamento de moedas”[43] e “Par ou ímpar”[44]. Entendo o uso desses jogos como uma importante estratégia para a articulação do raciocínio combinatório e do pensamento probabilístico, pois, desenvolvidos em uma perspectiva problematizadora, eles favorecem a resolução de problemas com diferentes características e contextos combinatórios. Além disso, é um recurso que possibilita a análise de possibilidades, o desenvolvimento de estratégias combinatórias e o cálculo de probabilidades de forma lúdica. Visando tais objetivos, situações-problema foram elaboradas a partir do jogo. Algumas delas já eram propostas pelos autores, outras foram adaptadas para a pesquisa.

No desenvolvimento das tarefas com jogos, realizei algumas alterações de acordo com os objetivos de pesquisa. Dentre elas, o número de dardos estipulado para cada jogador e a pontuação. Propus que cada aluno lançasse quatro dardos e que, ao invés de ter uma pontuação inicial da qual fossem subtraídos os pontos, os pontos marcados seriam contados. Meu objetivo com tais alterações é que os alunos pudessem ter maior número de dados para analisar as possibilidades e comparar os pontos obtidos com os acertos.

No final do desenvolvimento da sequência de tarefas, decidi pela escrita de uma carta com os alunos. Essa prática tem sido desenvolvida por alguns professores do Grucomat, objetivando perceber as impressões e os conceitos elaborados pelos estudantes a partir de um trabalho específico. De acordo com Penha (2013), integrante do Grucomat, a escrita de carta pode ser encarada como um recurso para o aluno comunicar suas ideias ao professor que rompe com um tipo de aula e de avaliação.

Diante dessa decisão, escrevi uma carta[45] aos alunos, a qual foi entregue por um professor da turma que se dispôs a ajudar nessa etapa da pesquisa. A escrita da resposta também se deu na aula desse professor, que fez apenas o papel de “carteiro”, sem intervir no

---

[38]Tarefas 12 a 18: anexo C.
[39]Tarefa adaptada de Skovsmose (2008).
[40](MACEDO; PETTY; PASSOS, 1997, p. 53-58).
[41]O jogo de dardos, além de ser um jogo de competição, também é utilizado como passa tempo entre amigos, o que possibilita variações nas regras. De maneira geral, o tabuleiro é pendurado, e é estipulado um espaço, o qual é marcado para que os jogadores se posicionem para atirar os dardos. Oficialmente há um valor de pontos, o qual é subtraído de acordo com a pontuação do dardo fixado pelo jogador. Vence o jogador que chegar a zero pontos. O jogo foi adaptado para o contexto.
[42]Tarefa baseada em Antonio Lopes (2000).
[43]Tarefas adaptadas de Celi Lopes (2003).
[44]Tarefa criada por mim a partir de tarefas utilizadas na pesquisa de mestrado.
[45]Carta: anexo D.

processo de leitura e de escrita da carta. A opção dessa parceria nessa tarefa tinha como objetivo criar um contexto para ela, pois não é comum o remetente entregar a carta ao destinatário e ficar ao lado dele no momento da escrita da resposta. Considero que o distanciamento entre o destinatário e o remetente possibilita que as relações afetivas sejam apresentadas na resposta.

Esse recurso foi oportuno à pesquisa desenvolvida, pois a manifestação do aluno quanto ao prazer ou não de realizar tarefas nas aulas de matemática é um dado relevante à investigação. Com isso, foi possível romper com a cultura de aula desenvolvida anteriormente.

Visando investigar os indícios da contribuição de um estudo da combinatória articulado ao desenvolvimento do pensamento probabilístico, organizei cinco tarefas[46] sobre probabilidade. Essas eram questões de múltipla escolha sobre a probabilidade de determinados eventos. Depois de escolher o item que considerava correto, o aluno precisava justificar sua escolha. A opção por esse tipo de questão, depois da sequência de tarefas que envolvia questões abertas, deu-se com o intuito de observar de forma mais objetiva as concepções dos alunos sobre probabilidade, na perspectiva do "resíduo".

Como mencionei ao final do primeiro capítulo, acredito que, para que suceda o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do pensamento probabilístico, componentes mediadores como linguagem, tarefas e ambiente de aprendizagem precisam estar imbricados. Assim, indico em seguida como foi composto tal ambiente.

3.5.1 Dinâmica das tarefas: ambiente de aprendizagem

Considero que − para identificar as ideias sobre combinatória que emergem em um processo de comunicação oral e escrita, identificar quais tarefas são potencializadoras e buscar indícios da contribuição de um estudo de combinatória para o desenvolvimento do pensamento probabilístico − é preciso criar um ambiente de aprendizagem que tenha como estratégia de ensino e de aprendizagem a comunicação de ideias. Para tanto, utilizei a proposta de Christiansen e Walther (1986) no desenvolvimento da sequência de tarefas da pesquisa.

[46] Tarefas sobre probabilidade: anexo E. As tarefas de 1 a 4 foram adaptadas da tese de doutorado de Celi Lopes (2003). A tarefa 5 foi adaptada dos trabalhos de Godino, Batanero e Cañizares (1996).

Os autores propõem que o ambiente de aprendizagem seja organizado em três fases para o desenvolvimento das tarefas em sala de aula. Considero relevante reiterar a explicação nesse momento, pois ela é fundamental para a composição das tarefas utilizadas com a turma. A primeira fase é a de *apresentação,* a segunda é a de *atividade independente* e a terceira é a de *reflexão conclusiva.*

A fase *de apresentação* é o momento em que a tarefa é apresentada aos alunos, assim como a dinâmica de desenvolvimento. O uso tradicional de exemplos introdutórios deve ser evitado, o foco deve ser motivar o aluno a desenvolver a tarefa (CHRISTIANSEN; WALTHER, 1986).

A fase *de atividade independente* é o momento que a tarefa será realizada em pequenos grupos[47]. O objetivo é o de construir significações em uma esfera menor.

A fase de *reflexão conclusiva* é o momento em que as significações produzidas são sistematizadas, promovendo uma reflexão coletiva. De acordo com Christiansen e Walther (1986), essa fase é indispensável para verificar o uso comum de linguagem e símbolos, o grau de aprendizagem partilhada, a negociação de papéis e as potencialidades das tarefas. Essa fase permite observar "a possibilidade de reversibilidade na relação de ensino: o espaço do aprender ensinando" (FONTANA, 1993, p. 149).

Tendo como propósito o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do pensamento probabilístico e as evidências sobre esses conceitos, tomei como referência tal dinâmica no desenvolvimento de todas as tarefas da pesquisa. Dessa forma, iniciava o trabalho com a apresentação da tarefa. Visando criar um ambiente propício ao compartilhamento de ideias neste e nos demais estágios, procurava estabelecer uma relação de comunicação com os alunos para que houvesse um diálogo aberto na sala de aula e a comunicação das ações e das concepções dos alunos. Para Christiansen e Walther (1986, p.32),

> A linguagem tem um papel central nesta mediação de relações devido aos seus poderes inerentes, generativos e generalizadores, os quais permitem ao indivíduo: quebrar a esfera pessoal de experiência; identificar o essencial dos objetos sob consideração; construir relações teóricas com a realidade; ter um lugar no conhecimento socializado; e, no total, estabelecer-se e compreender-se a si próprio como ser humano no contexto social e da humanidade.

[47] A quantidade de alunos em cada grupo é definida pelo professor, de acordo com seus objetivos e suas tarefas.

O processo de comunicação como uma ferramenta de aprendizado também é defendido por Hiebert et al (1997), ao afirmarem que, ao se comunicar, os alunos refletem sobre o que fazem e pensam e, assim, constroem conexões importantes sobre a Matemática.

Diante de tais considerações, desenvolvi a pesquisa. Acredito que a dinâmica apresentada possibilita a criação de um ambiente de aprendizagem em sala de aula em que a comunicação tem papel relevante e promove condições para que os alunos se sintam motivados a desenvolver as tarefas apresentadas.

Pleiteando investigar meus pressupostos e atingir os objetivos dessa pesquisa, apresento no próximo item aspectos pertinentes à análise dos dados da investigação.

3.6 Procedimentos de análise dos dados

A análise foi realizada em dois eixos. No primeiro deles, analisei as ideias sobre combinatória que emergem em um processo de comunicação oral e escrita, em um contexto de problematização. No segundo, estudo as contribuições do estudo da combinatória ao pensamento probabilístico. A escolha desses eixos vem ao encontro da perspectiva histórico-cultural, permitindo a compreensão dos sentidos e dos significados construídos e compartilhados entre professora e alunos em um contexto de interação dialógica (NACARATO; GRANDO, 2013).

Para melhor compreensão dos sentidos e significados construídos entre os envolvidos na pesquisa, professora-pesquisadora e alunos, selecionei três tarefas. São elas: "linguagem probabilística", "itinerários" e "o problema das cordas".

A análise do primeiro eixo foi realizada por episódio, conforme definido por Marocci (2011, p. 93):

> Compreendemos episódio como unidade de análise em que estão envolvidos eventos em torno de um determinado tema, cujo espaço temporal é delineado pelas marcas coerentes do início, do meio e do fim. No episódio, estão contidas falas e ações dos sujeitos de forma a produzir um contexto sequenciado de ideias, cuja análise do processo de desenvolvimento e do produto construído na discussão pode ajudar a inferir sobre a produção de significados e sentidos para um determinado conceito.

Dessa forma, cada tarefa analisada foi considerada um episódio que contemplava as três fases do desenvolvimento das tarefas em sala de aula, de acordo com a perspectiva de

Christiansen e Walther (1986), apresentada anteriormente. A escolha das três tarefas para análise se deu a partir da organização e das intensas leituras do material produzido – Diário de Campo, gravações de áudio e de vídeo e registro dos alunos – visando identificar dados relevantes.

O segundo eixo, no qual busco analisar as contribuições do estudo da combinatória ao pensamento probabilístico, constituiu-se a partir das cinco tarefas que os alunos desenvolveram individualmente após realizarem 18 tarefas, cujo foco era o raciocínio combinatório. A análise desse eixo aconteceu por meio dos registros escritos dos alunos e do Diário de Campo da professora, pois a dinâmica de desenvolvimento das tarefas não foi a mesma das 18 tarefas; eles realizaram individualmente e não houve comunicação oral de ideias, suas justificativas foram registradas na folha impressa com a tarefa. A mudança da dinâmica ocorreu, pois o intuito era observar de forma mais objetiva quais os conceitos sobre a probabilidade os alunos apresentavam em tarefas com diferentes perspectivas e contextos.

Nos próximos capítulos, apresento as análises realizadas.

4 A PRODUÇÃO DE SIGNIFICAÇÕES PARA CONCEITOS SOBRE COMBINATÓRIA EM CONTEXTO DE COMUNICAÇÃO EM SALA DE AULA

Neste capítulo, apresento o primeiro eixo de análise da pesquisa. Busco analisar as ideias dos alunos sobre combinatória que emergem no processo de comunicação oral e escrita, em um contexto de problematizações.

Conforme mencionei anteriormente, para essa pesquisa realizei 18 tarefas com os alunos; com isso, produzimos grande quantidade de dados em registros escritos e gravações de áudio e vídeo. Ao tentar criar categorias de análise, na perspectiva histórico-cultural, percebi que olhar para muitos dados dificultaria compreender os sentidos e os significados produzidos pelos alunos e pela professora sobre a combinatória e a probabilidade, uma vez que, diante dessa perspectiva, é no movimento dos signos, dos gestos, da interpretação e da indicação que os sentidos são produzidos e (re)significados. Além disso, ao olhar para categorias em um contexto tão amplo, significações relevantes produzidas pelos alunos podem se perder.

Selecionei três tarefas dessa sequência, as quais apresento em excertos na forma de episódios. Cada episódio é composto por três fases: apresentação da tarefa, desenvolvimento nas duplas e nos trios[48] (atividade independente) e reflexões conclusivas sobre a tarefa. As selecionadas foram:

- Tarefa 1 − “linguagem probabilística”;
- Tarefa 9 − “itinerários”;
- Tarefa 11 − “o problemas das cordas”.

As fases dos episódios foram analisadas com diferentes instrumentos de produção de dados, que são:

- Fase da apresentação: Diário de Campo da professora-pesquisadora;
- fase da atividade independente: Diário de Campo da professora-pesquisadora, registros escritos das duplas de alunos e gravações de áudio das conversas entre professora-pesquisadora e duplas de alunos;

[48] Quando o número de alunos presente na classe era ímpar.

- fase da reflexão conclusiva: Diário de Campo da professora-pesquisadora e gravações de vídeo das discussões desenvolvidas com toda a classe.

A primeira tarefa que selecionei foi a “linguagem probabilística”. A princípio não foi a que me “saltou aos olhos”, talvez porque já tivesse desenvolvido tarefas semelhantes na pesquisa de mestrado. No entanto, ao organizar os registros feitos pelos alunos e transcrever as gravações de áudio e vídeo, constatei as significações atribuídas pelos alunos ao longo de seu desenvolvimento, o que me levou a ter um olhar mais analítico para ela e considerá-la neste capítulo.

4.1 Episódio 1 − A linguagem probabilística e o jogo de par ou ímpar: produção de significações

Conforme mencionei, a tarefa “linguagem probabilística” não foi a que me chamou atenção em um primeiro momento, pois já havia desenvolvido cinco tarefas[49] semelhantes na pesquisa de mestrado. Em uma das tarefas, os alunos utilizavam os termos do vocabulário probabilístico para estimar a previsão do tempo em determinado período na cidade em que moravam; em outra, os alunos relacionavam os termos do vocabulário probabilístico entre si. De forma semelhante, em todas as tarefas desenvolvidas, os alunos conectavam os termos do vocabulário probabilístico com possibilidades e/ou probabilidades de determinados eventos.

O objetivo com o desenvolvimento de tais tarefas era que os alunos se apropriassem de forma significativa dos termos do vocabulário probabilístico, já que eles estavam presentes nos enunciados das tarefas que desenvolveriam no decorrer da pesquisa. Isso de fato aconteceu, os termos relacionados à linguagem probabilística passaram a fazer parte do vocabulário dos alunos na discussão das tarefas da pesquisa e também em situações de sala de aula, fora do contexto de investigação, após o término da pesquisa, em minha prática pedagógica.

As observações da pesquisa anterior me conduziram a afirmar que é propícia a discussão sobre termos do vocabulário probabilístico no início dos estudos sobre probabilidades, pois equívocos na interpretação de enunciados e na apresentação de ideias podem ser minimizados. Reitero essa afirmação, no entanto, destacando que tarefas desse tipo

[49]Para maiores informações ver Santos (2010): tarefas 1, 2 e 3, páginas 50 e 51; tarefas 1 e 2, páginas 95 e 96.

possuem outras potencialidades, além da apropriação de vocabulário, como pude agora constatar.

Considero que a tarefa relativa à linguagem probabilística possibilita a produção e a negociação de significações, não apenas dos termos, mas dos conceitos de combinatória e de probabilidade. A tarefa, associada à dinâmica desenvolvida, favoreceu o processo de elaboração conceitual dos alunos. O que corrobora a colocação de Góes (1997, p. 21-22):

> [...] o conceito não é apenas representado pela palavra e nem se reduz ao desenvolvimento de impressões (pela percepção, pela memória). Forma-se por meio do uso da palavra, que não é um rótulo aderido a uma ideia estabelecida, a um conceito pronto. Pensamento e linguagem se constituem mutuamente. Ao incorporar uma palavra, a criança não apenas designa um objeto, mas também analisa, abstrai propriedades, generaliza-as. Por essa razão, a palavra participa da significação do objeto e da experiência de conhecimento de mundo. A palavra reflete e generaliza a realidade. As relações entre palavra e conceito não ocorrem isoladamente; a palavra é enunciada e interpretada numa rede de outras palavras, de interpretações com outras pessoas e de ações sobre o objeto.

Foi esse olhar teórico que me mobilizou a analisar a tarefa "linguagem probabilística". Essa tarefa foi por mim criada a partir de tarefas utilizadas anteriormente, no mestrado.

<u>Tarefa 1 – Linguagem probabilística</u> Considerando os possíveis resultados de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas − em que cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos −, classifique com uma das palavras do quadro abaixo os acontecimentos citados:
Impossível - pode ser – possível - bastante provável – certo - se espera que – seguro- há alguma possibilidade - há alguma probabilidade - incerto
a) A soma ser um número ímpar: b) A soma ser um número menor do que 10: c) A soma ser o número 12: d) A soma ser um número maior do que 0: e) A soma ser o número 0: f) Os colegas apresentarem números de dedos distintos: g) Os colegas apresentarem números de dedos iguais:

Essa tarefa desencadeou o “episódio 1”, desenvolvido em três fases: apresentação, atividade independente e reflexão conclusiva. Na sequência, apresento os dados produzidos em cada fase.

Figura 1 − Diário de Campo da professora-pesquisadora: 04 de novembro de 2010

Iniciei a aula dizendo aos alunos com quem formariam duplas[50]. Assim que as duplas estavam formadas, falei como seria a dinâmica da sequência de tarefas que iríamos desenvolver: “*primeiramente vamos ler a tarefa e conversar sobre sua proposta, vocês vão me dizer se entenderam a proposta e, se possuírem dúvidas, me digam quais são elas. Na sequência, juntamente com um colega desenvolverão a tarefa; a dupla fará um único registro da tarefa; eu vou passar pelas duplas e vou conversando com vocês, mas vocês também podem me chamar, caso achem necessário. Depois, cada dupla apresentará suas considerações sobre a tarefa para classe e vamos conversar sobre elas, podendo concordar ou não com os colegas*” . *Ao final dessa explicação, li a tarefa com os alunos. A princípio ficaram um pouco apreensivos, depois começaram a realizá-la. (DC, 04 nov. 2010).*

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

Esse trecho do Diário de Campo aponta a relação dialética da professora e da pesquisadora quando assumem a mesma função. Percebe-se no relato evidências de características típicas da professora, como a de querer deixar “clara” a proposta de trabalho a seus alunos, e da pesquisadora, que se preocupa em zelar pelo desenvolvimento de seu plano de pesquisa. Esse fato indica também a intencionalidade da professora-pesquisadora, que, segundo Ponte (2002, p. 9), “tem em vista marcar que a investigação requer um planejamento e não se reduz a uma atividade espontânea".

Depois da apresentação da tarefa, iniciou-se a fase da atividade independente, momento em que os alunos desenvolveram a tarefa. Ao todo 27 alunos, doze duplas e um trio, realizaram essa tarefa.

Julguei necessário organizar, nesse momento de análise, os dados de todas as duplas em um quadro:

---

[50]Quando o número de alunos da classe era ímpar, um trio era formado.

Quadro 6 − Síntese das respostas da tarefa 1: “linguagem probabilística”

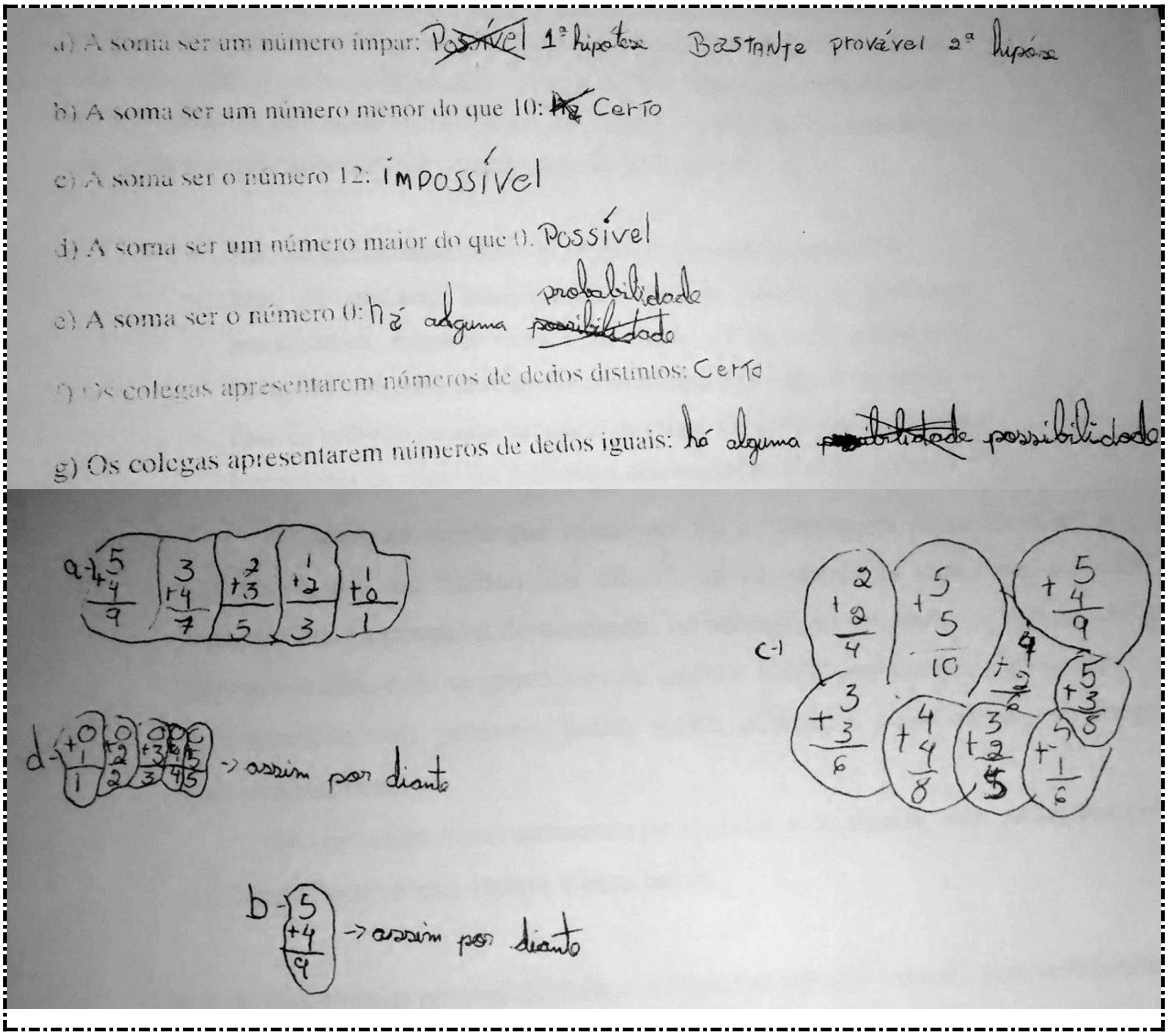
Palavras empregadas / Acontecimentos	Impossível	Pode ser	Possível	Bastante provável	Certo	Se espera que	Seguro	Há alguma possibilidade	Incerto	Há alguma probabilidade
a. A soma ser um número ímpar	0	4	3	3	1	0	1	1	0	0
b. A soma ser um número menor que 10	0	3	5	0	4	0	0	0	0	1
c. A soma ser o número 12	12	0	0	0	0	0	0	0	1	0
d. A soma ser um número maior do que 0	0	1	6	1	4	0	1	0	0	0
e. A soma ser o número 0	2	2	3	0	0	0	0	5	0	1
f. Os colegas apresentarem números de dedos distintos	1	2	4	2	2	0	0	2	1	0
g. Os colegas apresentarem números de dedos iguais	3	1	3	0	2	0	0	2	3	2

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

Percebe-se pelas palavras atribuídas pelos alunos, nos registros escritos, aos acontecimentos que em todas as alternativas há respostas equivocadas conceitualmente, formando as seguintes sentenças: “é bastante provável a soma ser um número ímpar”, “é certo a soma ser um número maior que zero”, “é incerto a soma ser o número 12”, “pode ser que a soma seja um número maior do que 0”, “é impossível a soma ser o número 0”, “é certo os colegas apresentarem números de dedos distintos” e “ é impossível os colegas apresentarem números de dedos iguais”. Tal fato é uma evidência de que a interpretação dos termos do vocabulário probabilístico não é compartilhada por todos os alunos, conforme apontado por Godino, Batanero e Cañizares (1996), Green (1982) e Santos (2010).

As respostas dos alunos a essa tarefa foram sucintas, eles colocaram apenas o termo escolhido por eles em cada acontecimento. Porém, o registro dos alunos Lucas e Bianca, se diferenciou dos demais, pois foi o único que buscou analisar as possiblidades e realizou algumas adições.

Figura 2 − Registro da dupla Lucas e Bianca (tarefa 1 − "linguagem probabilística")



Fonte: Acervo da Pesquisadora

Percebe-se que o aluno realiza adições e, a partir delas, busca palavras do vocabulário probabilístico adequadas para estabelecer relações entre o acontecimento e os resultados obtidos nos algoritmos. Ele faz adições, mas não esgota o espaço amostral. A realização das adições modifica a hipótese inicial no item a. Esse fato aponta a atividade de autorregulação, possibilidade favorecida pela dinâmica da aula, considerada essencial ao desenvolvimento da atividade mental.

Isso também pode ser compreendido como a busca de procedimento sistemático para descrever as possibilidades de soma dos resultados do jogo de par ou ímpar entre dois jogadores para, então, atribuir uma palavra ao evento. Mas também pode ser entendido como uma necessidade de registrar algoritmos ao resolver problemas de Matemática, já que esse registro normalmente é solicitado pelo professor dos anos iniciais; o que, de certa forma, faz parte das raízes históricas imbricadas na resolução de problemas da disciplina de Matemática.

Na sequência do desenvolvimento da tarefa, após a conclusão da fase da atividade independente, foi realizada a reflexão conclusiva da tarefa. Para a socialização dessa tarefa, escrevi o enunciado de cada item na lousa; e, diante deles, escrevia o termo que cada dupla dizia ter usado para cada evento. Com isso, os alunos apresentavam suas respostas às tarefas e também tomavam conhecimento das realizadas pelos colegas. Normalmente, ao final da apresentação dos termos utilizados em cada item, iniciávamos a discussão.

As gravações de vídeo do momento da reflexão conclusiva da tarefa sobre linguagem probabilística foram extensas, cerca de 40 minutos. Dessa forma, transcrevo os trechosque considero significativos à pesquisa. Powell, Francisco e Maher (2004), denominam os momentos significativos aos objetivos de pesquisa de "eventos críticos". Eles afirmam que as transcrições desses momentos ajudam a "analisar com atenção elementos como linguagem e fluxo de ideais" (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 113).

	**Transcrição 1: fragmento da reflexão sobre o item "a soma ser um número ímpar" (T1)**	**Possíveis eventos críticos**
1.	P[51]: *Tem algum termo que os colegas colocaram que vocês não concordam?*	Movimento: significado para a palavra "certo"
2.	Augusto: *Certo.*	
3.	P: *Por que o certo não seria adequado?*	
4.	Gabriel: *Porque certo é uma certeza.*	
5.	P: *E o que é uma certeza?*	
6.	Luís Felipe: *É você ter certeza daquela coisa. Se é verdade! Verdadeiro.*	

[51] Entenda "P" como professora-pesquisadora.

7.	Augusto: *Porque é certo!*	
8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15.	P: *Por que não é certo que vai sair um número ímpar?* Luís Felipe: *Porque tem as mesmas possibilidades, de par e de ímpar.* Lucas: *Possível sim.* [O aluno se refere ao termo “possível”] P: *Por que?* Luís Felipe: *Porque às vezes sai.* Augusto: *Seguro também não.* Bruna: *Cai mais o par.* Luís Felipe: *Não! Tem as mesmas possibilidades.*	Construção de relações entre os significados das palavras e o evento “sair um número ímpar”
16. 17. 18. 19. 20.	Augusto: *Depende; se você for esperto, não.* P: *Como assim Augusto?* Augusto: *Você fica olhando o número de dedos que a pessoa sempre coloca, aí você coloca. Meu amigo sempre coloca um dedo, aí, eu sempre peço par. Ele coloca um dedo e eu também, dá dois, e eu ganho.* P: *Neste caso é o jogo que possibilita mais resultado pares ou a situação que você foi vivenciou? Você confia fazer dessa forma com outro colega?* Augusto: *Não! É que ele é pequeno.*	Depende do parceiro do jogo: análise de possibilidades a partir das jogadas do adversário. (concepção subjetivista)
21. 22. 23. 24.	P: *Tem como verificar as possibilidades de pares e ímpares neste jogo?* Luís Felipe: *Tem! A gente fica jogando e outro fica registrando os números que dá, fica fazendo risquinho no par ou no ímpar.* P: *Mas será que essa forma é confiável?* Luís Felipe: *Não. Como você vai saber se saiu mais par ou se saiu mais ímpar?*	Análise de possibilidades a partir de frequência. (concepção frequentista)
25. 26.	Gabriel: *Lógico que tem!* P: *Será que não há outra forma, além de ficar marcando o resultado das jogadas?*	Construção do espaço amostral: de experimentos dos

27. Thadeu: *Tem sim, fazendo com os próprios dedos. Tipo "0 e 1"; "0 e 2", e assim.*

28. P: *Tá! Então vai fazendo isso e me falando as combinações e os resultados que eu vou anotando na lousa.*

29. P: *Para ficar organizado, vamos começar com o zero em uma mão direita. O que podemos colocar na outra?*

30. Augusto: *0, 1, 2, 3, 4 e 5.*

31. P: *E colocando o número um em uma mão. O que podemos colocar na outra?*

32. Thadeu: *O mesmo: 0, 1, 2, 3, 4 e 5.*

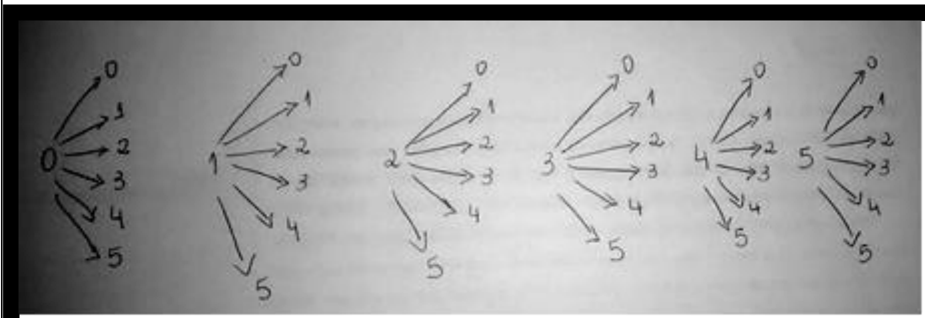
33. Augusto: *Assim é com todos os números.*

34. P: *Até que número eu coloco na mão direita.*

35. Augusto: *Cinco.*

O seguinte diagrama foi construído na lousa, a partir das falas dos alunos:

Diagrama 1 − Análise de possibilidades do jogo de "par ou ímpar"



Fonte: Acervo da pesquisadora.

36. P: *E agora?*

37. Thadeu: *Tem que ver as somas.*

38. P: *Como podemos fazer isso?*

39. Luís Felipe: *Vai colocando na frente do esquema.*

40. P: *Ok. Vocês vão me falando.*

Os alunos foram falando a soma e a professora-pesquisadora marcava na

alunos à sistematização da professora.

frente do diagrama. Depois disso, partiram para a contagem das somas. 41. P: *Quais as somas que temos?* 42. Augusto: *De zero a dez.*	
43. P: *É possível saber qual soma temos mais?* 44. Augusto: *É só contar.* A professora colocou na lousa as possibilidades de soma para posicionar na frente dos números as respectivas quantidades. 45. P: *Por onde podemos começar?* 46. Thadeu: *Pelo "zero".* 47. P: *Quanto temos?* 48. Luís Felipe: *Um.* 49. P: *E a soma "um"?* 50. Classe: *"Dois".* 51. P: *E a "Dois"?* 52. Thadeu: *Três.* 53. P: *Quantas somas "três"?* 54. Augusto: *Quatro.* 55. P: *E a "quatro"?* 56. Luís Felipe: *Cinco.* 57. P: *E as outras?* 58. Lucas: *A "cinco" tem seis.*	Contagem do espaço amostral: observação de regularidades na sequência de somas
59. P: *E a soma seis?* 60. Classe: *Sete.* 61. P: *Por que vocês acham que a quantidade é sete?* 62. Luís Felipe: *Por que está dando sempre um número a mais.* 63. P: *Será?* Lucas contou as somas dos diagramas e disse: 64. Lucas: *Não! São cinco.*	Alteração da regularidade das somas: um conflito
65. Luís Felipe: *Ah, só tem cinco tabelas.*	Busca de

<table>
<tr>
<td>
66. P: Como assim?
67. Luís Felipe: Na lousa só tem cinco tabelas [se referia aos diagramas]. Então, não vai ficar aumentando.
68. P: E com a soma sete?
69. Augusto: Vai diminuindo agora.
70. Luís Felipe: Quatro.
71. P: E as demais?
72. Classe: “8”: 3; “9”: 2 e “10”: 1.

Os alunos foram falando sem fazer contagem, seguindo a sequência.
73. P: Quantas somas temos ao todo?
74. Lucas: Trinta e seis.

Ao final da contagem, produzimos na lousa uma tabela semelhante a esta:
Tabela 1 – Possibilidades de somas no jogo de par ou ímpar
<table>
<tr><th>Somas</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th></tr>
<tr><td>Quantidades</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>
Fonte: Acervo da Pesquisadora
</td>
<td>explicação para a alteração do padrão da regularidade da sequência de somas</td>
</tr>
<tr>
<td>
75. P: Por que só tem uma possibilidade para a soma “10”?
76. Augusto: Porque só tem duas mãos.
77. Luís Felipe: É. Cinco mais cinco.
78. P: Então, temos mais somas pares ou ímpares?
79. Luís Felipe: O mesmo tanto.
</td>
<td>Compreensão das variáveis e de suas possibilidades</td>
</tr>
</table>

O trecho transcrito sobre o item *a*, “a soma ser um número ímpar”, vai além da verificação das somas serem pares ou ímpares. Ele apresenta a construção de significados e significações sobre vários termos apresentados na tarefa e também sobre análise combinatória e probabilidade.

Percebe-se logo no início da discussão (T1)[52] que o termo “certo”, usado por uma dupla, incomoda os colegas. Tal incômodo é justificado na busca de significados para a

[52] T1: Transcrição 1.

palavra, como “que é uma certeza” (T1.5)[53] e “se é verdade” (T1.6). Além da palavra “certo”, o termo “seguro” também não foi aceito por Augusto (T1.13). Esses trechos evidenciam a construção de significados para as palavras do vocabulário probabilístico e de relações entre os significados dos termos e o evento “sair um número ímpar”.

O fato de os alunos considerarem que determinados termos não são adequados e que os outros termos são adequados, até mesmo os não mencionados, apresentados no trecho T1 (8-15), indica que os estudantes possuem conceitos sobre as possibilidades no jogo de par ou ímpar, mobilizados no movimento de significação. Classificar esses conceitos no movimento de significação não é possível, pois, de acordo com Fontana (2005, p. 22), “apesar das diferenças existentes entre conceitos espontâneos (dominados pela criança) e os conceitos sistematizados (propostos na escola), no processo de elaboração da criança eles articulam-se dialeticamente”.

O evento crítico apresentado no T1 (16-20), em que o aluno Augusto faz a análise de possibilidades a partir das jogadas do adversário, indica a presença da concepção subjetivista de probabilidade, determinada a partir das vivências do aluno. As colocações de Augusto diante da tarefa e do questionamento da professora-pesquisadora − “*Você confia fazer dessa forma com outro colega?*” − apontam que o aluno tem ideia de que diferentes contextos sugerem diferentes interpretações.

A concepção frequentista da probabilidade é apresentada por Luís Fernando quando sugere que seja calculada a frequência de jogadas para verificar as possibilidades de somas pares e ímpares no jogo (T1.22). A resposta negativa do aluno (T1.24) ao questionamento da professora-pesquisadora, “*Mas será que essa forma é confiável?*”, é mais um indício de que os alunos possuem conceitos sobre probabilidade a partir de vivências anteriores, escolares e cotidianas.

A comunicação desenvolvida entre os trechos T1 (16-24) apresenta diferentes concepções probabilísticas dos alunos Augusto e Luís Fernando no desenvolvimento do mesmo item da tarefa 1. O fato de ser o mesmo item não significa que seja o mesmo contexto, pois problematizações desenvolvidas ao longo do diálogo modificaram o percurso da discussão. A concepção subjetivista foi apresentada a partir da análise de uma situação particular vivenciada por Augusto, que a compartilhou com a classe; a concepção frequentista exposta por Luís Fernando foi desencadeada como uma proposta para resolver uma

[53] T1. 5: Transcrição 1, fala 5.

problemática que surgiu no decorrer do diálogo. Percebe-se, assim, a importância da linguagem e da problematização na apresentação dos significados sobre os contextos.

Nesse trecho, também é possível observar que diferentes concepções probabilísticas, presentes no ideário dos alunos são expostas de maneira espontânea na tentativa de significar seus conceitos. Compreendo que nessa situação a apresentação dos conceitos probabilísticos foi espontânea, mas também mediada pela linguagem, pelas problematizações e pelo ambiente de aprendizagem; o que ressalta a importância da mediação na construção de conceitos.

Percebe-se no episódio 1 que a construção do espaço amostral não surgiu de imediato, talvez por falta de experiências anteriores com esse tipo de problema de combinatória. Isso só ocorreu a partir da fala 27, com a sinalização do aluno Gabriel − "*Lógico que tem*" (T1. 25) − e do questionamento da professora − "*Será que não há outra forma, além de ficar marcando o resultado das jogadas?*" (T1.26). Ideias coerentes com a construção de espaço foram apresentadas por Thadeu (T1.27), sugerindo a utilização dos próprios dedos para a construção do espaço amostral.

A colocação do aluno Thadeu é um indicativo da necessidade que o aluno tem de utilizar recursos representativos para a construção do espaço amostral e até mesmo para a significação da ação que está se desenvolvendo. Esse apontamento é um fato relevante para pensar no processo de ensino e de aprendizagem da combinatória, desenvolvido muitas vezes por meio de uma situação-problema, sem a manipulação de instrumentos ou de sentidos para o aluno.

Outra questão que se observa neste trecho é o papel desempenhado pela professora, que, movida pela intencionalidade com o intuito de desenvolver conceitos sobre combinatória em seus alunos, busca, a partir de questionamentos e colocações, articular a ideia apresentada por Thadeu à construção organizada do espaço amostral. O procedimento analítico desenvolvido com a problematização indica um processo de formação de conceitos sobre análise combinatória. Segundo a concepção Vygotskyana, os conceitos científicos se iniciam por experiências concretas e procedimentos analíticos.

No trecho T1 (25-74) do diálogo, foi construído o espaço amostral e a contagem das somas (T1.29-74). No decorrer dessa ação fui anotando as informações de forma organizada, em um quadro construído na lousa, para que os alunos percebessem a regularidade das somas; e, a partir desses dados, questionei a situação no momento que o padrão da sequência seria alterado: "*Por que vocês acham que a quantidade é 7?*" (T1.61). A resposta da classe "*7*"

(T1.60) e do aluno Luís Fernando "*Porque está dando sempre um número a mais?*" (T1.62) indica que perceberam a regularidade da sequência, mas não imaginavam que ela seria alterada.

O conflito gerado com a alteração do padrão da sequência de somas indicado pelo aluno Lucas "*Não! São 5*." (T1.64) imediatamente é justificado por Luís Fernando: "*na lousa só tem cinco tabelas. Então não vai ficar aumentando*." (T1.67). Esse trecho aponta que problematizações geradas a partir de conflitos cognitivos criam nos alunos a necessidade da construção de sentido. Essa construção consequentemente possibilita que conceitos sejam desenvolvidos ou ampliados. Segundo Fontana (2005, p. 129), "na busca de compreensão, de apropriação ativa do dizer do outro, este é aproximado das palavras interiores, dos conceitos já internalizados e consolidados ou em processo de elaboração, conceitos espontâneos ou não".

Observa-se, no decorrer do episódio 1, que a linguagem e a dinâmica de problematização desenvolvida a partir da tarefa 1, "linguagem probabilística", conduziu os alunos a desenvolveram generalizações e conceitos sobre análise combinatória e também padrões numéricos.

Ao organizar os dados para análise da pesquisa, percebi que concepções equivocadas sobre as somas "pares" e "ímpares" podem ser construídas a partir da tabela apresentada (Tabela 1), pois há mais elementos pares − 0, 2, 4, 6, 8 e 10 − que ímpares − 1, 3, 5, 7 e 9. No entanto, a quantidade de somas pares e ímpares é a mesma. Talvez a construção de um quadro com as possibilidades das somas no jogo de "par ou ímpar" seria mais adequada para observar essa relação entre as somas e suas possibilidades:

Tabela 2 – Análise das possibilidades no jogo de "par ou ímpar"

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7
3	3	4	5	6	7	8
4	4	5	6	7	8	9
5	5	6	7	8	9	10

Somas ímpares

Somas pares

Fonte: Acervo da Pesquisadora

Com essa tabela é possível observar que a quantidade de somas pares e ímpares são as mesmas, 18 cada, mesmo tendo mais elementos de soma pares. Essa discussão não foi realizada na aula porque considerei que a fala do aluno "*o mesmo tanto*" (T1.79), a partir da tabela desenvolvida com eles e das observações dos alunos apresentadas na transcrição da quantidade de possibilidades de cada soma e do total (T1. 45-74), evidenciava que haviam resolvido a problemática.

Observa-se, com a análise do episódio 1, que − assim como apontado por pesquisadores como Godino, Batanero e Cañizares (1996), Green (1982) e Santos (2010) − os termos do vocabulário probabilístico não são compartilhados por todos os alunos. Contudo, no desenvolvimento da tarefa 1 "linguagem probabilística" os alunos construíram um movimento de sentidos e significações dos termos do vocabulário probabilístico em diferentes contextos.

Os conceitos espontâneos sobre a combinatória apresentados pelos alunos foram pontos de partida para problematizações, que desencadearam ideias, generalizações e/ou (re)significações. Esse fato ressalta as considerações de Vygotsky (2001) sobre a importância dos conceitos espontâneos para a formação de conceitos científicos.

As problematizações promovidas e desenvolvidas na tarefa 1 possibilitaram que diferentes conceitos sobre probabilidade fossem apresentados por alguns alunos. Esse fato é um indicativo de que a tarefa "linguagem probabilística" proporciona a construção de relações entre conceitos sobre combinatória e sobre probabilidade. Além dessas relações, a tarefa também permitiu que observações e conceitos sobre sequência numérica fossem desenvolvidos.

O procedimento de análise de possibilidade do jogo de par ou ímpar apresentado pelo aluno Lucas na fase de desenvolvimento da tarefa, por meio de adições, e as sugestões do aluno Luís Fernando para fazer essa análise a partir do registro de jogadas (T1.22) e do aluno Thadeu (T1.27) para fazê-la com os próprios dedos indicam que os alunos possuem conhecimento de diferentes procedimentos de contagem. Todavia, esses procedimentos nem sempre são utilizados pelos alunos na resolução de problemas sobre combinatória, e, quando utilizados, muitas vezes não conduzem os alunos à resposta adequada.

Considero que esse fato é um indicativo relevante para pensar no processo de ensino da combinatória. Sugiro o desenvolvimento de tarefas que possibilitem a construção significativa de diferentes procedimentos de contagem e uma dinâmica de aprendizagem que permita que esses conceitos sejam problematizados e sistematizados em um processo de negociação de ideias entre professor e alunos, como desenvolvido nesta pesquisa.

As observações apresentadas sinalizam que a tarefa “linguagem probabilística” proporcionou a construção de conceitos sobre combinatória e probabilidade pelos alunos. No entanto, considero que apenas seu desenvolvimento não torna uma tarefa potencializadora, pois os componentes mediadores − linguagem, ambiente de aprendizagem e problematizações −, articulados nas diferentes fases de realização da tarefa, em um contexto real de sala de aula, possibilitaram o movimento de conceitos e significações sobre a temática.

É evidente, no decorrer desse episódio, a importância das relações sociais, do coletivo, para a ação/elaboração conceitual particular, conforme apontado por Vygotsky. O movimento de elaboração conceitual feito no ambiente de sala de aula levou os alunos a desenvolverem conceitos sobre combinatória e probabilidade, e me conduziu, enquanto professora, a construir conceitos refletidos em ações que objetivavam o desenvolvimento do raciocínio combinatório e probabilístico.

Na sequência da realização da reflexão conclusiva sobre o item a, “a soma ser um número ímpar”, foi realizada a do item b, “a soma ser um número menor que 10”. Depois que os termos utilizados pela dupla no item foram organizados na lousa, iniciou-se a fase de reflexão conclusiva do segundo item.

	**Transcrição 2: fragmento da reflexão sobre o item “a soma ser um número menor que 10” (T2)**	**Possíveis eventos críticos**
80.	Augusto: *O que é “há alguma probabilidade”?*	Movimento: significado para o termo “há alguma probabilidade”
81.	P: *Alguém já ouviu esse termo?*	
82.	Classe: *Sim.*	
83.	P: *O que sabem sobre ele?*	
84.	Núbia: *Que é provável acontecer.*	
85.	Stela: *Que está provando alguma coisa, tipo assim.*	
86.	P: *Quando eu associo esse termo a alguma*	

situação, o que posso concluir? 87. Raquel: *Que tem alguma chance de acontecer.* 88. Augusto: *Entendi.*	
89. P: *Pensando no jogo do “par ou ímpar”, qual a menor soma que temos?* 90. Classe: *“Zero”.* 91. P: *E a maior?* 92. Classe: *“Dez”.*	Ideias sobre os limites do espaço amostral do evento
93. Raquel: *“Cinco”.* 94. Augusto: *De uma pessoa é “cinco” e de duas são “dez”.* 95. Raquel: *É “cinco”.* 96. Bruna: *“Dez”.* 97. Augusto: *Se cada um coloca cinco, quanto vai ter?*	Conflito com a maior soma: construção de argumentos para validar considerações
98. Bruna: *Prô, pode colocar duas mãos ou tem que colocar só uma?* 99. Classe: *Uma só.* 100. Stela: *Com um ou com dois jogadores?* 101. Lucas: *São dois?* 102. Raquel: *Mais pode ser de mais jogadores.* 103. P: *No jogo com dois jogadores qual a maior soma que podemos obter?* 104. Raquel: *É dez.*	Legitimação dos argumentos de validação
105. P: *E se fosse com três jogadores?* 106. Augusto: *Quinze. Aumenta cinco quando aumenta um jogador. Sempre assim.* 107. P: *E a menor soma com três ou mais jogadores?* Os alunos ficaram quietos por um tempo.	Generalização: espaço amostral se altera de acordo com os parâmetros

108. Augusto: *Zero. Todo mundo não põe nada.*	
109. P: *Ok. Voltando ao item b: a soma ser um número menor que dez; o que podemos concluir?* 110. Augusto: *Que é certo.* 111. P: *Como assim?* 112. Augusto: *Cada mão tem cinco dedos.* 113. P: *Quando eu digo "menor que dez", o dez está incluso ou não?* 114. Stela: *Não! Você está falando menor que "dez".* 115. P: *E quais são essas somas?* 116. Classe: *Nove, oito, sete, seis, ..., zero.* 117. P: *Quando eu digo que é possível cair um número menor que "dez", o que eu estou querendo dizer?* 118. Luís Felipe: *Que é possível que caia um número desses.*	Equívoco provocado pelo termo "menor que"
119. P: *E se não fosse o menor que dez, que número seria?* 120. Luís Felipe: *O "dez".* 121. P: *E o pode acontecer nessa situação?* 122. Luís Felipe: *Pode ser um número menor que dez: nove, oito, assim.* 123. P: *E é certo?* 124. Bruna: *É certeza que vai acontecer.* 125. P: *Temos certeza que vai sair um número menor que "dez"?* 126. Stela: *Não. Mais ou menos.* 127. P: *Por que mais ou menos?* 128. Bruna: *Não tem certeza que vai tirar "dez".* 129. Stela: *É. Vai saber, ela pode por "cinco" e eu*	Negociação de possibilidades e probabilidades

"um". 130. Bruna: *Aí fica "seis".*	
131. P: *Vamos olhar para os outros termos. Eu posso considerar o termo "há alguma probabilidade"?* 132. Classe: *Pode.* 133. P: *Tem algum termo que foi usado pelos colegas que vocês acham que não é adequado à situação?* 134. Bruna, Augusto e Raquel: *O certo.* 135. P: *E os alunos que colocaram o certo, o que pensam?* 136. Augusto: *Eu confundi. Achei que o "dez" também seria.* 137. Lucas: *Eu também.* 138. Thadeu: *Eu também.* 139. P: *Tem algum termo que não foi usado e que vocês acham que poderiam ter usado?* 140. Augusto: *Há alguma possibilidade.* 141. Stela: *Seguro. Não, não!* 142. P: *Seguro não?* 143. Thadeu: *Não, porque não é certo que caia o "dez".*	Verificação de termos adequados e não adequados ao evento
144. Stela: *Não é seguro essa resposta, não tem muitas chances de cair o "dez".* 145. P: *Por que o "dez" não têm muitas chances?* 146. Stela: *Tem muito mais chances de cair os menores que 10.*	Noção de probabilidade
147. P: *Tem algum termo que pode ser utilizado em situações em que as chances são muitas?* 148. Stela: *Possível.* 149. Augusto: *Há alguma possibilidade.*	Conflito: busca de termo que representa "muitas chances"

150. P: *Para vocês o "possível" e "há alguma possibilidade" indica que tem muitas chances de acontecer, mais do que de não acontecer?* 151. Classe: *É.* 152. Melissa: *Pode ser.* 153. P: *O bastante provável pode usar nessa situação?* 154. Stela: *Aí, vai saber. Você está afirmando que vai acontecer.* 155. Bruna: *Você está quase afirmando que vai acontecer aquilo.* 156. P: *Podemos quase afirmar que vai acontecer de sair um número menor que dez?* 157. Bruna: *Não, não pode.*	
158. P: *Vamos retomar na análise de possibilidades de somas que fizemos.* Professora coloca o diagrama feito na lousa, no item anterior (Diagrama 1). 159. Thadeu: *Nós podemos utilizar o "bastante provável".* 160. P: *Por que?* 161. Thadeu: *Porque o dez tem uma chance só de sair e os outros tem bastante chances.* 162. P: *Quantas?* 163. Thadeu: *Trinta e cinco.* 164. P: *Afinal, a que conclusão chegamos?* 165. Lucas: *Que é bastante provável que saia um número menor que dez.*	Procedimento de representação visual do espaço amostral

A reflexão conclusiva do item b, "a soma ser um número menor que 10", envolveu mais alunos na discussão do que no item a. Esse fato indica o desejo, por parte dos alunos, de expressar suas ideias sobre a tarefa. Acredito que o ambiente de aprendizagem propiciado para o desenvolvimento das tarefas e a postura dialógica adotada por mim, enquanto professora, na fase de reflexão conclusiva da tarefa sejam fatores preponderantes para tal atitude, uma vez que os alunos se sentem envolvidos na dinâmica de ensino e aprendizagem. Considero que a dinâmica de ensino e essa postura da professora são fatores relevantes para o desenvolvimento de conceitos e significações sobre combinatória e probabilidade, de acordo com as considerações de Moura et al (2010, p. 83) é no "movimento do social ao individual que se dá a apropriação de conceitos e significações".

Observa-se, no início do episódio 2 (T2.80-88), que as alunas Núbia, Raquel e Stela buscam esclarecer a dúvida do colega Augusto, "*O que é: há alguma probabilidade?*", e, no trecho T2 (89-92), que os alunos apresentam suas ideias sobre os limites do espaço amostral no jogo de par ou ímpar entre dois jogadores ao afirmarem que a menor soma é 0 e a maior é 10. Ambas as situações são desencadeadas por questionamentos realizados por mim, no papel da professora, que busco, por meio de problematizações, estimular a apresentação dos conceitos dos alunos sobre a temática em questão e também provocar a construção de significações para as ideias colocadas por eles. Essa postura adotada indica, mais uma vez, a relevância da intencionalidade do professor como mediador de suas ações para a construção de significações nas aulas de Matemática.

O processo de comunicação e circulação de ideias no decorrer do episódio parece algo natural, os alunos apresentam seus conceitos, contrariam os apresentados pelos colegas, o que provoca conflitos de ideias, como o apresentado pela aluna Raquel quando discorda de Augusto, no trecho T2 (93-97), ao afirmar que a maior soma no jogo de par ou ímpar é "*cinco*" e não "*dez*", como ele coloca. A ideia de Raquel também é refutada por Bruna (T2.96), mas a partir da justificativa e do questionamento de Augusto, "*de uma pessoa é cinco e de duas são dez*" T2 (94) e "*se uma coloca 5, quanto vai ter?*" T2 (97), Raquel valida as respostas dos colegas (T2.104), as quais indicam que a maior soma no jogo de par ou ímpar entre duas pessoas é "*dez*". Nesse momento, na tentativa de convencer a aluna Raquel de que estava equivocada, Augusto explica as alterações do espaço amostral no jogo de par ou ímpar. A ideia de que o espaço amostral é alterado de acordo com os parâmetros é compreendido pelo aluno, tanto que, quando questiono "*e se o jogo fosse com três jogadores?*", ele responde que seria "*15*" e justifica que "a*umenta cinco quando aumenta um jogador. Sempre assim*".

Esse trecho evidencia que os conceitos sobre combinatória dos alunos de uma mesma faixa etária estão em níveis diferenciados. Mas, a partir de um movimento mediado pela linguagem, os conceitos vão sendo (re) significados, alcançando níveis mais elevados de generalizações, como aponta Fontana (1993, p. 125), "na dinâmica de elaboração conceitual, a palavra é mediadora da compreensão ativa dos conceitos e da transição de uma generalização para outras generalizações".

A interpretação errônea do enunciado "a soma ser um número menor que 10" levou várias duplas a conclusões equivocadas do espaço amostral, incluindo a soma 10 na contagem e considerando a palavra "certo" adequada para o evento (T2. 109-118). Um dos alunos que apresentou essa concepção equivocada foi Augusto, que no trecho anterior apresentou conceitos significativos sobre alterações do espaço amostral no jogo de par ou ímpar. Esse fato traz dois indicativos: a influência dos significados atribuídos à linguagem e à estimação das probabilidades − pois o aluno que apresentava conceitos científicos sobre o espaço amostral do jogo de par ou ímpar, em momento subsequente, fez interpretação equivocada do termo "menor que" e estimação da probabilidade por meio de termo do vocabulário probabilístico − e a influência dos diferentes contextos no movimento de concepções espontâneas e científicas desse aluno.

Esse apontamento, de certo modo, é notado por Vygotsky (2001) quando afirma que a formação de conceitos não apresenta percurso linear e não é limitada por idade cronológica e maturação biológica. Penso que a formação de conceitos sobre combinatória pode ser compreendida como um processo circular, que se movimenta de forma vertical e horizontal, como uma espiral, a partir de interferências do outro, desencadeadas por intervenções didáticas pedagógicas, pela linguagem, como pensamento verbal e forma de comunicação e também do movimento individual de significações, tal como apresentado no esquema 2.

A relação entre possibilidades e probabilidade surgiu no diálogo, na negociação entre as possibilidades do jogo e a probabilidade de sair ou não um número menor que 10 (T2. 119-130; T2. 145-157). Concepções formais de probabilidade são apresentadas ao justificar alguns termos que não são considerados adequados para o evento, como o "seguro" (T2. 144), e termos considerados adequados, como o "bastante provável" (T2. 159-163). As considerações do aluno Thadeu para essa problemática − "*nós podemos utilizar o bastante provável*" para os números menores que dez, “*porque o dez tem uma chance só de sair e as outras têm bastantes chances*” − foram apresentadas depois da retomada das possibilidades de somas no jogo proposta pela professora a partir da reprodução do diagrama de árvores com as possibilidades (Diagrama 1) na lousa. Presume-se, com o exposto, que o conceito formal de probabilidade apresentado e justificado por Thadeu foi instigado pela retomada das possibilidades de somas na lousa. Ou seja, a representação visual do espaço amostral permitiu que o aluno Thadeu apresentasse suas considerações sobre as possibilidades e a probabilidade de “*sair uma soma menor que dez no jogo do par ou ímpar*” de forma segura.

As reflexões produzidas nos itens “b” da tarefa “linguagem probabilística” sinalizam que a dinâmica de ensino utilizada na pesquisa, desenvolvida a partir da proposta de Christiansen e Walther (1986), aliada à tarefa, favorece o processo de linguagem e formação de conceitos sobre a combinatória e a probabilidade. O papel do professor nessa dinâmica de ensino e de aprendizagem é crucial, pois é ele que, de certa forma, provoca o movimento do esquema, constituído por componentes mediadores: tarefa, linguagem e ambiente de aprendizagem e conceitos espontâneos e científicos. O movimento provocado pelo professor tem origem em sua intencionalidade, no propósito de formar conceitos científicos específicos, mas é a partir das problematizações que desenvolve, ou conduz, que esse esquema ganha força para se movimentar e articular conceitos sobre combinatória e probabilidade.

Assim como no item b, na socialização do item c, “a soma ser o número 12”, os termos que as duplas haviam colocado para esse evento foram registrados na lousa. Nesse item, as duplas utilizaram apenas os termos “impossível” e “incerto” para o evento. A partir disso, iniciou-se uma discussão a respeito destes, a qual transcrevo a seguir.

 **Transcrição 3: fragmento da reflexão conclusiva sobre o item c: “a soma ser o número 12” (T3)**	**Possíveis eventos críticos**
166. P: *O que acham desses termos?* 167. Augusto: *É a mesma coisa.* 168. Thadeu: *Incerto é indeciso.* 169. Melina: *É impossível!!! Por exemplo, eu coloco “5” e ela “5”, 10. É impossível dar 12.*	Significações das palavras “incerto” e “impossível”

170. Núbia: *Incerto é alguma coisa que não está certo. Impossível é que não pode acontecer.* 171. P: *Esse acontecimento é impossível, incerto, ou os dois?* 172. Augusto: *Não tem como acontecer.* 173. Valéria: *Cada um só tem cinco em cada mão.* 174. Bruna: *Não tem como acontecer! É impossível.*	

Observa-se, nesse fragmento, que os alunos apresentam significados para as palavras “incerto” e “impossível” ao mesmo tempo que estabelecem relações das palavras com o contexto, produzindo, dessa forma, significações. Os dados apresentados nesse trecho são um indício de que os alunos são capazes de produzir significações sobre combinatória e probabilidade a partir de problematizações de situações que envolvem termos do vocabulário probabilístico.

Destaca-se também a importância de se trabalhar com os significados das palavras. . A palavra “incerto” é considerada por Núbia como antônimo de certo (T1. 170). No entanto, “não está certo” não é a mesma coisa que “não é certo”. Para os alunos, o “certo” está relacionado a um estado − por exemplo, o exercício está certo −, só que em contexto probabilístico o “certo” representa certeza.

Esse contexto também é um indicativo do desenvolvimento do pensamento probabilístico dos alunos, pois, de acordo com Celi Lopes (2008), ele possibilita a avaliação das possibilidades para a medida de chance dos acontecimentos e consequentemente “instrumentaliza as pessoas em suas previsões e tomadas de decisões” (LOPES, C., 2008, p. 72).

De maneira semelhante ao item anterior, os termos empregados pelos alunos nas problemáticas apresentadas foram registrados na lousa. No entanto, no momento da socialização das respostas, na fase de reflexão conclusiva, o aluno Thadeu interrompeu a professora-pesquisadora na tentativa de adiantar a finalização do trabalho. Esse momento do episódio é transcrito a seguir:

 **Transcrição 4: fragmento da reflexão sobre o item “a soma ser um número maior que 0” (T4)**	**Possíveis eventos críticos**
175. Thadeu: *É igual ao 10. Não precisa nem falar, pode usar as mesmas palavras.* [O aluno se referia ao b, “a soma ser menor que 10”] 176. Jéssica: *É.* 177. P: *O que os colegas acham?* 178. Classe: *É mesmo. Não precisa repetir de novo.*	Estabelecendo relações em diferentes contextos

O diálogo exposto indica que o aluno Thiago avaliou os diferentes eventos, “a soma ser um número menor que 10” e “a soma ser um número maior que 0”, e constatou que as possibilidade e as probabilidades são as mesmas. Essa observação indica um processo de elaboração conceitual do aluno, explicitado por generalizações de uma mesma temática em uma diferente problemática. De acordo com Vigotsky (2001, p. 9), esse tipo de processo pode ser compreendido como generalização, pois é “um ato verbal de pensamento e reflete a realidade duma forma totalmente diferente da sensação e da percepção”.

Depois da observação de Thadeu e do consentimento da classe, iniciamos a reflexão conclusiva do item e, “a soma ser o número 0”. Assim como nas tarefas anteriores, os alunos disseram os termos que utilizaram para o evento, e eu registrei na lousa; depois iniciamos a socialização desse item da tarefa. Os demais itens da tarefa também foram discutidos.

 **Transcrição 5: fragmento da reflexão sobre os itens “a soma ser o número 0”, “os colegas apresentarem número de dedos distintos” e “os colegas apresentarem número de dedos iguais” (T5)**	**Possíveis eventos críticos**
179. P: *Nesta situação, o que podemos considerar?* 180. Thadeu: *Zero e zero.* 181. P: *Que termos usaram nesse evento?*	Termos adequados para o evento “a soma ser o número 0”: termos adequados ao

182. Augusto: *Há alguma possibilidade.* 183. Bruna: *É possível. Pode ser.*	contexto
184. P: *Posso usar o termo bastante provável aqui?* 185. Bruna: *Não! Bastante provável é que acontece bastante e isso não acontece.*	Conceito de probabilidade
186. P: *Como fica a situação dos colegas apresentarem números de dedos distintos?* 187. Valéria: *Possível.* 188. Augusto: *Há alguma possibilidade. Pode ser.*	Análise do contexto e termos adequados: "os colegas apresentarem número de dedos distintos"
189. P: *E os colegas apresentarem números de dedos iguais?* 190. Raquel: *É possível.* 191. Luís Felipe: *Há alguma probabilidade, possibilidade.* 192. Bruna: *Pode ser.*	Outro contexto: "apresentarem números de dedos iguais"

No transcorrer das discussões percebe-se que os alunos passaram a usar palavras consideradas adequadas para os diferentes eventos com certa facilidade, não havendo incompatibilidade de opiniões sobre os termos sugeridos. Além disso, eles são mais objetivos em suas considerações. No entanto, os termos "impossível", "bastante provável" e "certo", utilizados nos registros escritos, apresentados no quadro 5, foram omitidos na fase da reflexão conclusiva. Esse fato indica que as discussões anteriores possibilitaram a construção de significações para os termos do vocabulário probabilístico, observada pela flexibilidade de adequação do uso dos termos aos diferentes contextos e de estimativa de probabilidade, apresentada pela aluna Bruna quanto à "soma ser o número "0".

Problematizações como essas e outras desenvolvidas ao longo da tarefa possibilitaram que os alunos avaliassem situações de combinatória e probabilidade em diferentes contextos, tal fato é sugerido por Watson (2006), que defende que a exploração de distintos contextos no ensino da probabilidade possibilita o desenvolvimento de conceitos probabilísticos. Às considerações da autora, acrescento que um trabalho articulado entre combinatória e probabilidade, envolvendo variados contextos, proporciona o desenvolvimento do pensamento combinatório e probabilístico dos alunos.

No final dessa fase de reflexão conclusiva, perguntei aos alunos o que acharam da tarefa que realizamos. Suas considerações são apresentadas.

 **Transcrição: fragmento sobre a opinião dos alunos sobre a tarefa (T6)**	**Possíveis eventos críticos**
193. P: *O que acharam da tarefa que realizamos?* 194. Bruna: *Legal! O tempo passa mais rápido.* 195. Augusto: *É. Antes passava devagar.* 196. Bruna: *A Matemática fica mais interessante.* 197. Welligton: *Parece que a gente aprende mais.* 198. Valéria: *Depois do problema da balança*[54] *a Matemática ficou mais legal.* 199. Bruna: *Foi legal, mas agora está ficando mais interessante. Eu, que odiava Matemática, estou começando a gostar.*	Sentimentos em relação à aula de Matemática

As palavras de alguns alunos mostram o quanto estavam satisfeitos com as aulas de Matemática, mais precisamente com o ambiente de aprendizagem. Neste ambiente, o trabalho no processo de ensino e de aprendizagem é compartilhado entre professor e alunos. Ao se sentirem motivados pelo processo, os estudantes se envolvem em uma cultura compartilhada de construção de significados e significações dos conceitos matemáticos. Como apontado por Rigon et al (2010, p.58), “o movimento de internalização dos significados e atribuição dos sentidos dos objetos pelo homem é decorrente da vida em sociedade, pelas relações interpessoais”.

Considero que o ambiente de aprendizagem feito na pesquisa possibilitou que interações fossem estabelecidas a partir da linguagem, como: professor-aluno, tarefa-alunos e alunos-conceitos combinatórios e probabilísticos. Nesse processo, a linguagem foi

[54] Problema desenvolvido em dinâmica semelhante à aplicada nessa pesquisa.

fundamental para que conceitos sobre combinatória e probabilidade fossem desenvolvidos, contribuindo, assim, para o desenvolvimento do pensamento combinatório e probabilístico dos alunos do 6º ano do Ensino fundamental.

Os estudos realizados para esta pesquisa e a análise deste episódio me conduziram a algumas considerações como as de Godino, Batanero e Cañizares (1996), que observaram que os alunos apresentam dificuldades nas estimações probabilísticas e na interpretação de termos do vocabulário probabilístico. Penso, a partir da análise aqui apresentada, que os obstáculos da estimação probabilística apontada por esses pesquisadores estejam relacionadas aos equívocos de interpretação dos enunciados dos problemas, envolvendo termos específicos do vocabulário probabilístico e outros. Dessa forma, o fato de fazer estimação probabilística equivocada não necessariamente indica que o aluno não possui conceitos sobre probabilidade. Provavelmente, os alunos estão na fase do pensamento por complexo, ou seja, estabelecem nexos, mas carregam indícios de verdadeiros conceitos.

A possibilidade de comunicação e circulação de conceitos sobre combinatória e probabilidade contribui para o processo de interpretação de situações nesse contexto. Desse modo, o conceito espontâneo apresentado inicialmente é (re)significado, novos níveis de generalização são alcançados, conduzindo provavelmente os alunos à elaboração conceitual.

No decorrer da tarefa, nota-se que diferentes conceitos sobre probabilidade foram apresentados e significados pelos alunos. Conforme relatado anteriormente, essa observação também foi constatada em minha pesquisa de mestrado, ao indicar que diferentes conceitos probabilísticos estão presentes no discurso e no ideário dos alunos da Educação Básica.

Esse indicativo vem ao encontro das considerações de Watson (2006), ao afirmar que os conceitos subjetivo, frequentista e formal das Probabilidades devem estar presentes no currículo escolar. Acredito que as concepções lógica e clássica também devam estar presentes no currículo escolar. Porém enfatizo sua inclusão no currículo não é suficiente para um ensino e uma aprendizagem com compreensão.

De acordo com o apontado no referencial teórico e o observado no decorrer da análise, um aluno pode apresentar conceito formal em determinado momento e subjetivista em outro, pois há implicações do contexto em que a Probabilidade está sendo utilizada e também das relações entre conceitos desenvolvidos nas vivências cotidianas e escolares das pessoas. Dessa forma, as articulações entre conceitos espontâneos e científicos sobre probabilidade precisam estar inseridas no trabalho pedagógico em sala de aula.

No episódio 1, observa-se de maneira marcante o papel assumido por mim, enquanto professora, no decorrer dos diálogos. O papel dialógico do docente, de acordo com Fontana (2003), é uma forma deliberada e explícita para a elaboração conceitual pelo aluno. Além disso, a autora acrescenta que a imagem que se tem do adulto no cotidiano é diferente da imagem constituída culturalmente pelo aluno do adulto (professor) como mediador do trabalho em sala de aula. Compreendo, com o exposto, que o papel culturalmente instituído ao professor, de promotor do trabalho pedagógico em sala de aula, deve ser usado a favor do processo de ensino e de aprendizagem. Ou seja, o professor pode aliar essa visão culturalmente instituída a sua intencionalidade pedagógica, assumindo uma postura reflexiva diante do processo de formação de conceitos científicos dos alunos, uma prática problematizadora em sala de aula.

A linguagem, assim como apontada por Vigotsky (2001), é percebida na análise realizada como uma potencialidade na formação de conceitos sobre combinatória e probabilidade dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. É expressa por meio de coesões entre comunicação e generalização.

Diante do exposto, observa-se, no decorrer do episódio 1, que a tarefa desencadeou a construção de conceitos de combinatória e probabilidade e a articulação das relações entre eles. Esse processo foi mediado pela construção de significações desenvolvidas em uma dinâmica dialógica entre ambiente de aprendizagem, linguagem e tarefa; que, conduzido pelos sujeitos envolvidos na pesquisa, provocaram o movimento entre conceitos espontâneos e científicos.

A segunda tarefa que selecionei para análise foi a "itinerários". Apresento-a na sequência, no episódio 2.

4.2 Episódio 2 − Tarefa "itinerários": possibilidades de construção e significação de procedimentos de enumeração e contagem

A "itinerários" foi a nona tarefa, de uma sequência de 18. Quando a realizamos[55], estávamos praticamente na metade do processo de coleta de dados, já havíamos vivenciado várias problematizações sobre combinatória na sala de aula, produzimos significações sobre combinatória nas oito tarefas que realizamos anteriormente, como a construção e a produção

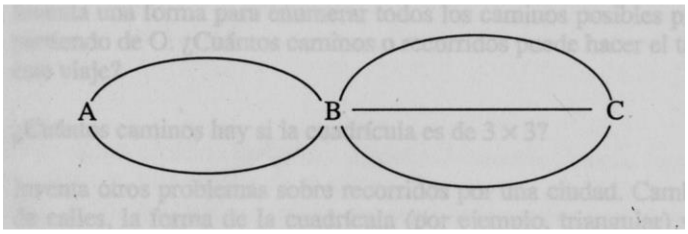
[55] Eu, professora-pesquisadora, e alunos.

de diversos tipos de registros do espaço amostral de diferentes eventos. Esse foi um dos fatores que me influenciaram a fazer sua análise. Além disso, não havia trabalhado anteriormente com tarefa com essa problemática com alunos do 6º ano. Assim, fiquei curiosa para saber quais significações seriam produzidas a partir dessa tarefa.

Na tarefa 9, "Itinerários", os alunos deveriam enumerar a quantidade de itinerários para ir do ponto A ao C, em diferentes condições:

Tarefa 9 − Itinerários

a) Quantos itinerários há para ir de A a C?



b) Quantos itinerários há para ir e para voltar?

c) E se não puder ir e voltar pelo mesmo caminho?

De forma semelhante ao que ocorreu na tarefa apresentada no item anterior, as fases dos episódios foram analisadas com diferentes instrumentos de coleta de dados, descritos em cada tópico. Conforme mencionado, as tarefas foram desenvolvidas em três fases: apresentação, atividade independente e reflexão conclusiva.

Em meu Diário de Campo fiz registros sobre a fase de apresentação da tarefa, um deles apresento a seguir.

Figura 3 – Diário de Campo da pesquisadora: 29 de novembro de 2010

Depois da tarefa anterior[56], os alunos olharam para esta de forma mais "tranquila". Alguns não sabiam o significado da palavra "itinerários", mas de imediato os colegas disseram: "caminho; percurso; trajeto". Eles compreenderam o enunciado da tarefa. A figura que representava os itinerários também foi compreendida por eles. (DC, 29 nov. 2010).

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora

[56] Na tarefa 8, "o problema do táxi", a problematização pedia que criassem formas para enumerar os diferentes percursos que um táxi poderia fazer em uma "cidade quadriculada", saindo de O e chegando a A.

Na tentativa de observar ou não alguma regularidade nas respostas dadas pelas duplas de alunos nos registros escritos, organizei-as em quadros. Essa tarefa foi realizada por 19 alunos, sendo oito duplas e um trio. Os demais alunos da classe faltaram nesse dia.

Quadro 7– Quantos itinerários há para ir de A a C?

Quantidade de itinerários determinados pelos alunos:	4	6	13
Número de respostas apresentadas	1	7	1

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

Quadro 8 – Quantos itinerários há para ir e voltar?

Quantidade de itinerários determinados pelos alunos:	5	6	12	18	36
Número de respostas apresentadas	1	1	5	1	1

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

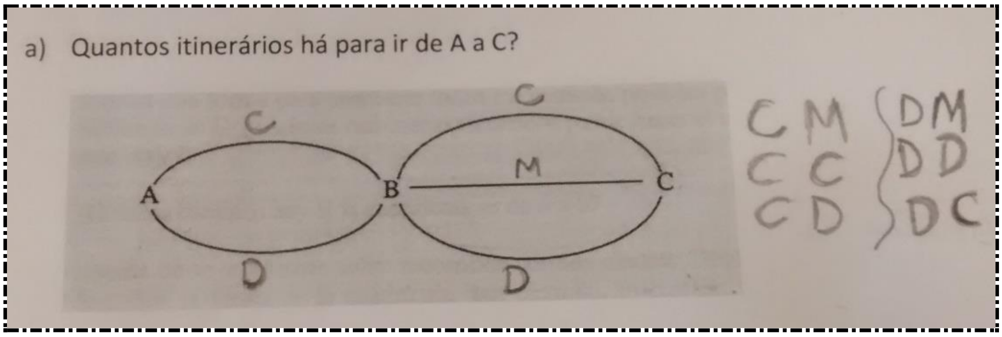
Quadro 9 – E se não puder ir e voltar pelo mesmo caminho?

Quantidade de itinerários determinados pelos alunos	0	4	6	12	30
Número de respostas apresentadas	2	1	4	1	1

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

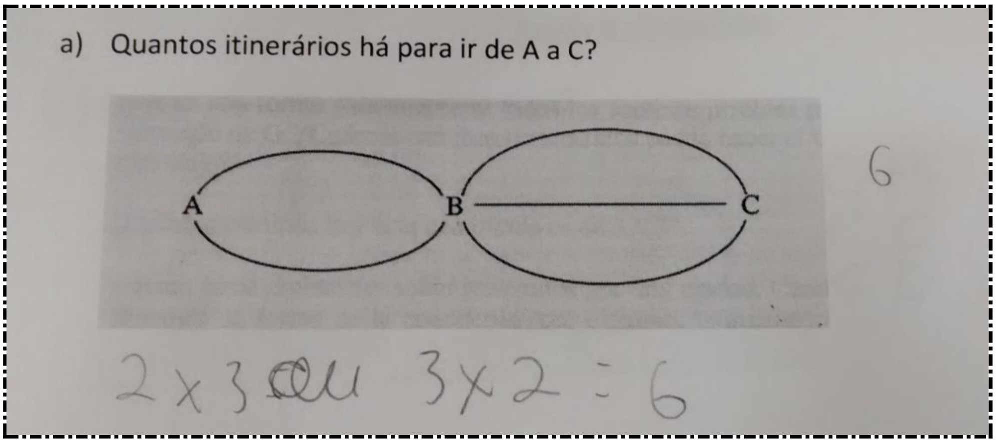
Os registros feitos pelas duplas apresentavam diferentes procedimentos de enumeração, como: representação por meio de números e letras, princípio multiplicativo, traçado dos diferentes itinerários e diagrama de árvores.

Figura 4 – Registro das alunas Bruna e Luana, itinerários para ir de A a C: representação por meio de letras



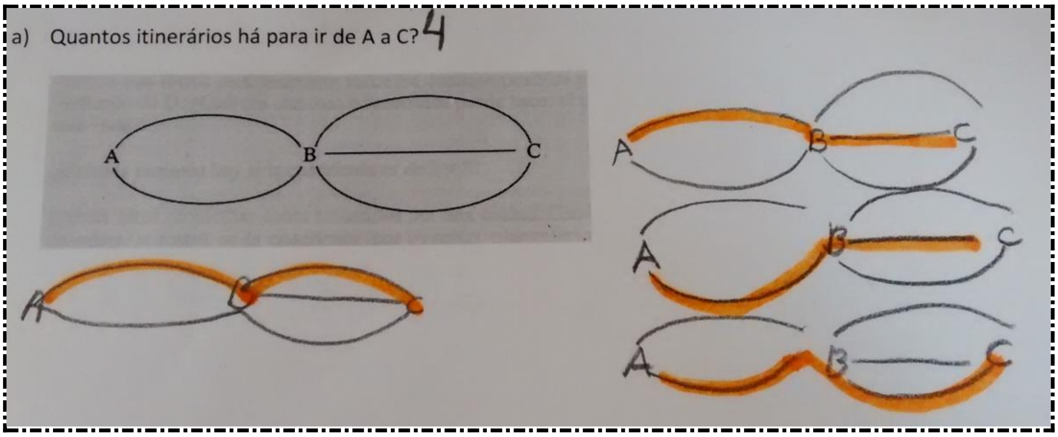
Fonte: Acervo da Pesquisadora

Figura 5 – Registro dos alunos Alex e Felipe, itinerários para ir de A a C: princípio multiplicativo



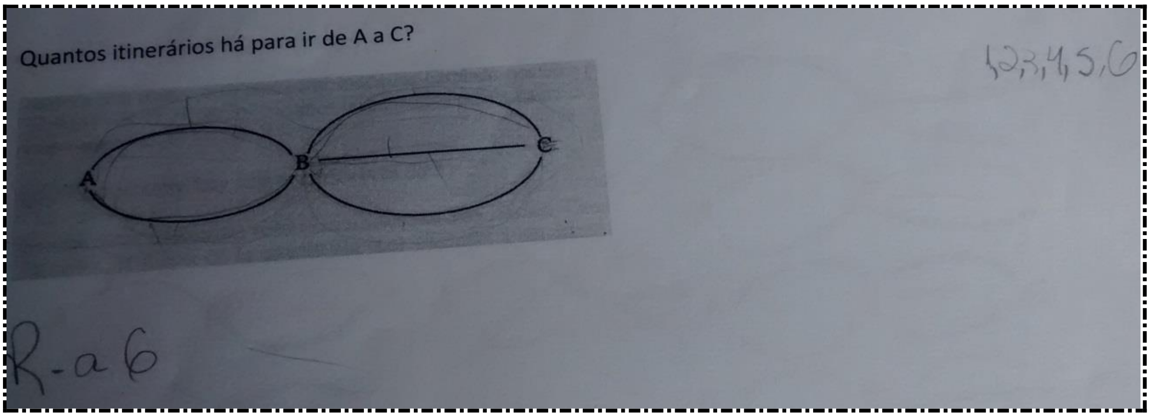
Fonte: Acervo da Pesquisadora

Figura 6 – Registro das alunas Julia e Jenifer, itinerários para ir de A a C: traçado dos diferentes itinerários



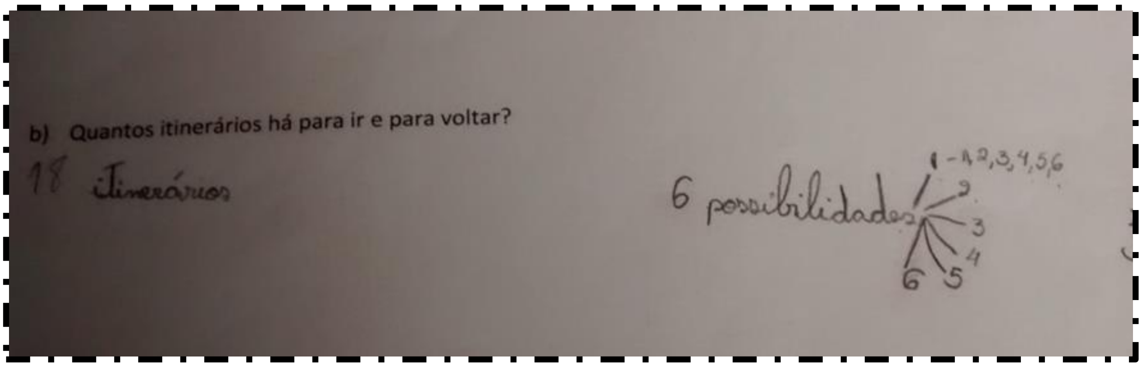
Fonte: Acervo da Pesquisadora

Figura 7 – Registro das alunas Núbia e Natasha, itinerários para ir de A a C: representação numérica



Fonte: Acervo da Pesquisadora

Figura 8 – Registro dos alunos Lucas e Guilherme, itinerários para ir e voltar: diagrama de árvores

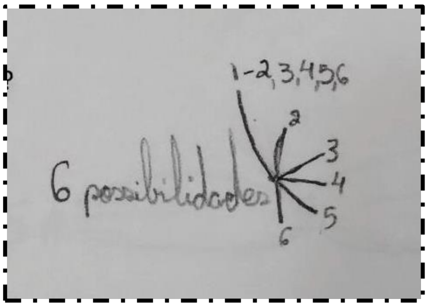


Fonte: Acervo da Pesquisadora

Embora algumas duplas não tenham chegado ao número exato de possibilidades, percebe-se que utilizaram diferentes procedimentos de contagem para resolver a tarefa. O uso desses procedimentos é um indício de desenvolvimento do raciocínio combinatório. Porém, o uso de procedimentos sistemáticos de contagem, que possuem certa ordem para organizar os elementos, como o utilizado por Bruna e Luana (Figura 4), pode evidenciar conceitos mais elevados do raciocínio combinatório. O desenvolvimento de problemas de combinatória é apontado por Lopes e Coutinho (2009) como relevante para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois possibilita diferentes agrupamentos e caminhos para sua resolução.

Durante a realização da tarefa, na fase da atividade independente, conversei com algumas duplas sobre seus registros. O diálogo estabelecido com Lucas e Augusto sobre os itens “b” e “c” foi transcrito:

	**Transcrição 7: fragmento do diálogo com Lucas sobre os itens “b” e “c” da tarefa “itinerários” (T7)**	**Possíveis eventos críticos**
200. 201.	P: *Quantos itinerários há para ir e voltar?* Lucas: *Tem 18 possibilidades.*	Concepção espontânea: equívoco sobre o total de possibilidades
202. 203.	P: *Como chegou a essa conclusão?* Lucas: *Eu tenho seis caminhos para ir até C. E*	Movimento para justificar sua concepção

seis para voltar, mas ele pode voltar por outro caminho. 204. P: *Como assim?* 205. Lucas: *Se ele for pelo caminho 1, por exemplo, ele pode voltar pelo 1, 2, 3, 4, 5 e 6.*	
O aluno anotou sua fala no diagrama que havia feito em seu registro escrito: Figura 9 – Registro da dupla Lucas e Augusto: tarefa 9, item b  Fonte: Acervo da Pesquisadora 206. Lucas: *Então, são 36 itinerários. São 6 vezes 6. Seis possibilidades anteriores e depois, seis possibilidades para cada anterior.*	Observação de anotação no diagrama de árvore: ressignificação de conceito
206. P: *E se não puder voltar pelo mesmo caminho?* 207. Lucas: *São 30 possibilidades, porque se vai pelo caminho 1, só pode voltar pelo 2, 3, 4, 5 ou 6. Tem 6 possibilidades para ir e 5 para voltar; e 6 vezes 5 são 30.*	Percepção de que a situação pode ser resolvida a partir do princípio multiplicativo

As concepções espontâneas apresentadas por Lucas (T7. 201) e o registro feito pelo aluno (Figura 7), em um primeiro momento, representam concepções equivocadas (total 18) quanto às possibilidades de itinerários de A a C. Tais colocações também podem nos conduzir a uma interpretação equivocada de seus conceitos sobre combinatória. No entanto, quando perguntei a ele como chegou a essa conclusão (T7. 202), ele foi instigado a buscar argumentos significativos para validar sua concepção, percebendo que era um total de 6 x 6 = 36.

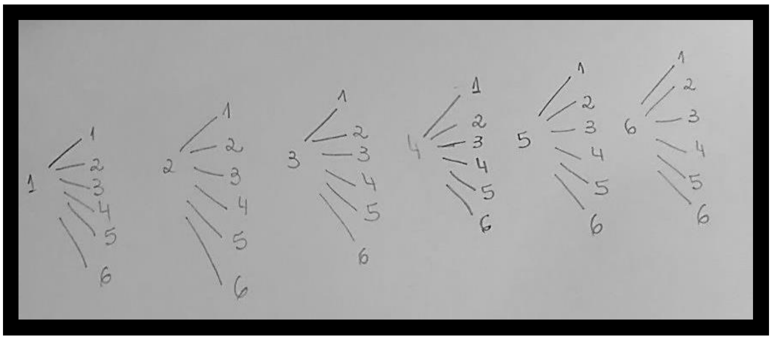
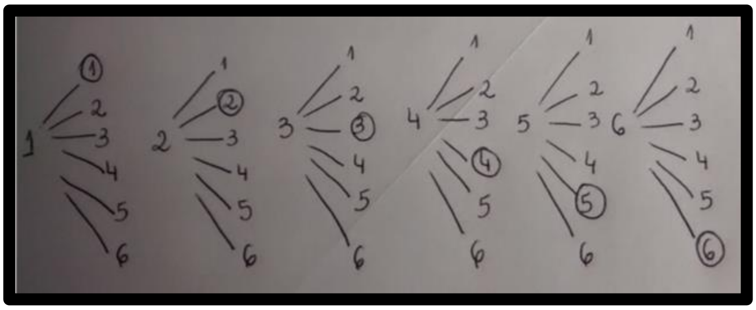
De acordo com Vygotsky, a formação de conceitos científicos não tem início apenas na experiência concreta, mas em procedimentos analíticos. Para o pesquisador, os conceitos científicos podem ter início na definição verbal, por meio de esclarecimento de propriedades específicas, e sua aplicação incide em objetos de contextos variados, possibilitando que o aluno adquira consciência do conceito mediante sua aplicação.

Desse modo, na busca de argumentos para justificar sua resposta, Lucas ressignifica o conceito equivocado sobre as possibilidades de itinerários e desenvolve generalizações sobre combinatória ao responder prontamente (T7. 207) que o total seria 30 possibilidades, se não puder voltar pelo mesmo caminho. Assim como a problematização, o diagrama de árvore foi um recurso importante para que Lucas percebe-se que a tarefa poderia ser resolvida por meio do princípio multiplicativo.

Os diferentes registros realizados pelos alunos e a generalização desenvolvida por Lucas é um indicativo de que a tarefa "itinerários" é importante para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Lopes e Coutinho (2009) salientam que processo de ensino e aprendizagem da combinatória deve se pautar na resolução de problemas que permitam a exploração de diferentes tipos de registros. As autoras atribuem sua importância ao fato de "[...] modelar uma situação na qual várias possibilidades de construção de agrupamentos, de caminhos, fornecendo um tipo específico de interpretação quando se devem levar em conta os resultados possíveis para cada um desses agrupamentos ou caminhos" (LOPES; COUTINHO, 2009, p. 62).

Assim como Lucas, outros alunos apresentaram suas concepções sobre a problemática proposta pela tarefa. Metade dos grupos colocou que havia 12 possibilidades para ir de A a C e voltar. A justificativa apresentada no momento da socialização foi a seguinte:

	**Transcrição 8: fragmento da reflexão sobre os itens b e c da tarefa "itinerários" (T8).**	**Possíveis eventos críticos**
208. 209.	P: *Quantos itinerários há para ir e para voltar?* Raquel: *Seis de ida e seis de volta.*	Conceito de enumeração x

210. Felipe: *É o item a duas vezes.* 211. Alex: *Duas vezes seis ou seis vezes dois.*	conceito equivocado
212. Lucas: *São 36 possibilidades, pois há 6 caminhos para ir, e para cada um deles há 6 para voltar. Prô, faz os diagramas na lousa.* Conforme solicitado pelo aluno, fiz os diagramas na lousa. Diagrama 2 – Possibilidades de itinerários para ir e voltar de A a C  Fonte: Acervo da Pesquisadora	Aluno explica aos colegas como construiu seu raciocínio
213. P: *E se não puder voltar pelo mesmo caminho, como fica?* 214. Lucas: *Aí são 30 possibilidades, pois não pode voltar pelo mesmo. Se ele for pelo caminho 1, pode voltar pelo 2, 3, 4, 5 ou 6. Se for pelo caminho 2, pode voltar pelo 1, 3, 4, 5 ou 6.* O aluno seguiu esse raciocínio indicando o percurso de ida e as possibilidades de volta até o caminho 6. Fui circulando no digrama feito o caminho que não poderia ser usado para voltar. O diagrama ficou da seguinte forma: Diagrama 3 – Itinerários diferentes  Fonte: Acervo da Pesquisadora	Apresentação de procedimento sistemático de contagem: diagrama de árvore

215. Lucas: *Dá trinta, porque são seis vezes cinco.*	
216. P: *O que a classe me diz da resposta do Lucas e do Augusto?* 217. Luís Felipe: *Tá certa.* A classe parecia satisfeita com a conclusão apresentada.	Conceitos apresentados por Lucas são validados pelos colegas de classe

Ao analisar o primeiro trecho, percebe-se um conflito de conceitos, pois, ao mesmo tempo em que os alunos apresentam conceitos para enumerar as possibilidades de itinerários para ir e voltar de A a C, esses conceitos são equivocados. Para justificar o total de itinerários possíveis, Alex se reporta ao princípio multiplicativo quando afirma que são "*duas vezes seis ou seis vezes dois*" (T8. 211). Esse procedimento de contagem é adequado à situação; no entanto, a forma como é interpretado, "*seis de ida e seis de volta*" (T8. 209), conduziu-o, bem como os outros alunos, a uma resposta que não condiz com a quantidade de itinerários do problema.

A concepção equivocada, apresentada por metade dos alunos, sobre as possibilidades para ir e voltar de A a C é um indicativo de que tarefas que envolvem situações compostas de combinatória não são simples para os alunos do 6º ano resolverem. Contudo, segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), a falta de uso de procedimentos sistemáticos de enumeração é um dos principais motivos de erros nos problemas de combinatória.

Em minha pesquisa de mestrado, observei que o uso de procedimentos sistemáticos de contagem conduz os alunos à resposta adequada. Constatei que um aluno se diferenciava dos demais porque, no desenvolvimento das tarefas que envolviam a combinatória, construía o espaço amostral de forma organizada, chegando quase sempre ao total de possibilidades dos eventos.

Penso que essa evidência, assim como as observadas nessa tarefa, é um indicativo da importância do processo de sistematização de procedimentos de contagem para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Todavia, considero que não é algo a ser informado, mas sim desenvolvido de maneira expressiva pelos alunos, assim como fez Lucas ao explicar aos colegas seu raciocínio no desenvolvimento da tarefa (T8. 212-215).

A tarefa "Itinerários" é um problema de combinatória cujas características envolvem diferentes tipos de soluções: existência, enumeração, reconto e otimização. Essas características estão presentes nas problematizações propostas na tarefa e possibilitam que diferentes significações sejam elaboradas pelos alunos a partir de contexto semelhante. Esse fato promove o movimento e o desenvolvimento de conceitos mais elevados de combinatória, como os apresentados pelo aluno Lucas.

Além disso, a tarefa se apresenta como uma potencialidade no desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois possibilita que diferentes procedimentos de enumeração e contagem sejam construídos e significados pelos alunos. A tarefa "o problema das cordas", também possibilitou observações a respeito do raciocínio combinatório, as quais apresento no episódio 3.

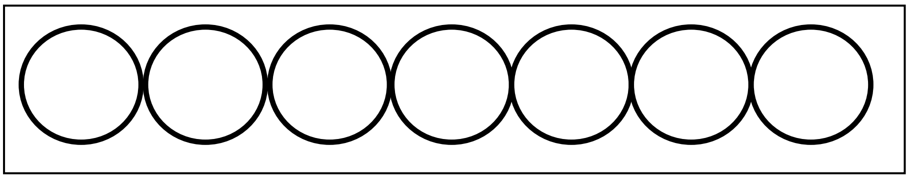
4.3 Episódio 3 − Tarefa "O problema das cordas": análise de regularidades e possibilidades

A escolha do "o problema das cordas" aconteceu quando eu ainda estava selecionando as tarefas para a sequência de investigação. De imediato, considerei o problema interessante; a problemática envolvida se diferenciava das selecionadas até aquele momento, uma vez que procedimentos lógicos estavam implícitos no processo de contagem das cordas. No entanto, como o problema fazia parte do livro *Experiências Matemáticas* (SÃO PAULO, 1998) da 7ª série, atual 8º ano do Ensino Fundamental, temia que os alunos investigados, turma do 6º ano do Ensino Fundamental, encontrassem dificuldades ao resolvê-lo. Porém, levando em conta os pressupostos de Vygotsky de que o aprendizado escolar é fundamental não apenas para o desenvolvimento de elaboração conceitual dos alunos, mas também para a tomada de consciência de seus próprios processos mentais, incluí-o na sequência de tarefas.

Achei importante que os alunos já tivessem desenvolvido algumas tarefas sobre combinatória para realizarmos "o problema das cordas". Assim, na ordem da sequência de tarefa, sua posição foi a 11ª.

<u>Tarefa 11 – O problema das cordas</u>

Marque nas circunferências abaixo, respectivamente, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 pontos.



- Verifique o número de cordas que podem ser traçadas em cada circunferência, unindo dois pontos.
- Organize os resultados obtidos e faça um registro relacionando o número de pontos e o número de cordas.
- É possível determinar, sem traçar, o número de cordas de uma circunferência com 10 pontos? Justifique sua resposta.

Neste episódio, da mesma forma como nos anteriores, foram analisados diferentes instrumentos de coleta de dados: Diário de Campo, registro escrito dos alunos, gravações de áudio e vídeo, que são especificados nas fases em que analisados. Ao todo, 22 alunos realizaram a tarefa, formando, assim, 11 duplas.

O registro que fiz em meu Diário de Campo traz algumas informações sobre a fase de apresentação da tarefa.

Figura 10 – Diário de Campo da pesquisadora: 30 de novembro de 2010 (1)

Entreguei a folha da tarefa para as duplas, várias leram e disseram que não entenderam a tarefa. Li com eles o enunciado e perguntei se sabiam o significado da palavra "respectivamente". Alguns disseram que não. Assim que expliquei o significado, percebi que as duplas compreenderam a tarefa. Percebo, muitas vezes, que eles dizem que não compreenderam a tarefa, mas na verdade parecem inseguros, não confiam na forma como a interpretaram. Às vezes penso que querem uma confirmação do que imaginam ser a tarefa antes de a realizarem. (DC, 30 nov. 2010).

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora

Depois da apresentação da tarefa, as duplas iniciaram a fase da atividade independente. No início dessa fase surgiram alguns questionamentos, conforme registado no Diário de Campo:

Figura 11 – Diário de Campo da pesquisadora: 30 de novembro de 2010 (2)

Questionamentos:

Valéria: De um mesmo ponto pode sair duas cordas?

Thadeu: Posso fazer o contrário, sair de um ponto, chegar em outro e voltar ao mesmo?

Para responder a primeira pergunta fiz um círculo na lousa com três pontos e iniciamos um diálogo:

P: O que preciso fazer aqui?

Felipe: Unir dois pontos com um traço. [Executei]

P: E agora?

Augusto: Unir um ponto já marcado com o que está faltando marcar. [Realizei o que o aluno falou]

P: OK! Dá para unir mais pontos?

Lucas: Os outros dois que estão ligados só uma vez. [Liguei os dois pontos]

P: Mais algum?

Felipe: Não.

P: Posso fazer o contrário agora, sair do ponto que cheguei e voltar?

Augusto: Não, é a mesma coisa.

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora

Os trechos do Diário de Campo apresentam uma cena típica de sala de aula: a princípio os alunos parecem compreender o que está sendo proposto, mas, quando vão desenvolver a tarefa, surgem dúvidas. Nesse momento, o professor deve pensar em uma estratégia para que os alunos entendam o que está sendo proposto, mas precisa tomar cuidado para não apresentar os caminhos para a resolução da tarefa, transformando, dessa forma, um problema não rotineiro em um exercício, tal como indicam Christiansen e Walther (1986).

Depois que conversamos, os alunos voltaram a realizar a tarefa. Porém, Valéria e sua colega de dupla, Bianca, me chamaram.

Transcrição 9: fragmento do diálogo com Valéria sobre "o problema das cordas" (T9)	**Possíveis eventos críticos**
218. Valéria: *Prô, tem alguma coisa que não está certo.* 219. P: *Por que?* 220. Valéria: *Com um ponto eu não traço cordas. Certo?* 221. P: *OK!* 222. Valéria: *Com dois pontos eu faço uma corda.* 223. P: *Sim.* 224. Valéria: *Com três pontos eu deveria traçar duas cordas.* 225. P: *Quantas você traçou?* 226. Valéria: *Três.* 227. P: *Por que acha que não está certo?* 228. Valéria: *Porque estava em uma ordem, e ela mudou.* 229. P: *E o próximo círculo, quantas cordas têm?* 230. Valéria: *Seis.* 231. P: *E a sequência se manteve do jeito que imaginava?* 232. Valéria: *Não. Vou fazer até o final para ver.* A aluna continuou traçando as cordas.	Conflito com a regularidade do número de cordas

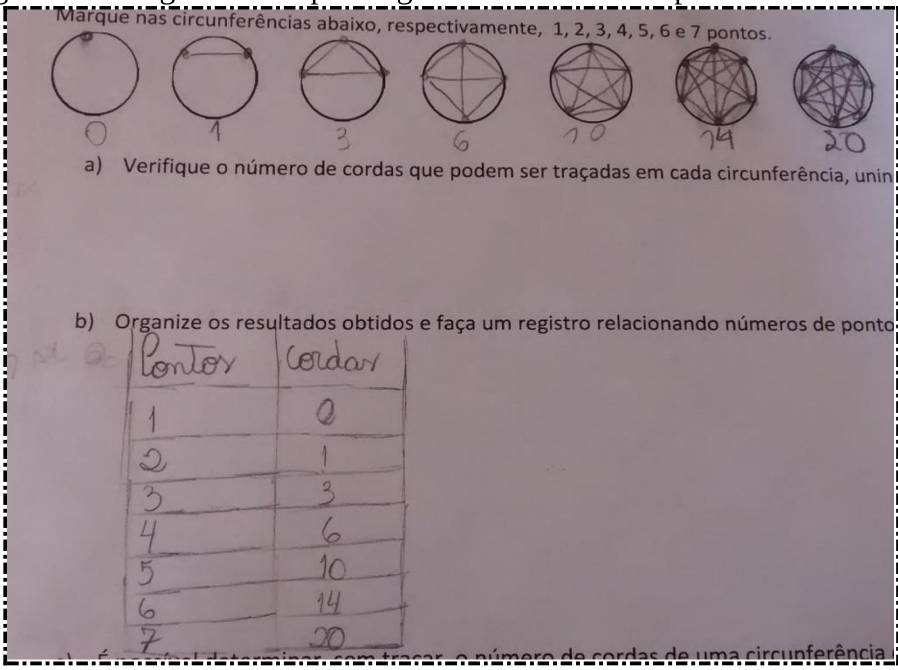
O processo de contagem de número de pontos e de cordas, a princípio, foi compreendido por Valéria, o que a incomodou foi a alteração no padrão da sequência elaborada a partir do número cordas, apresentado na transcrição 9. Ao observar que os dois primeiros números da sequência de cordas eram uma unidade a menos que a quantidade de pontos, a aluna ficou em dúvida, pois, em sua concepção, a regularidade deveria se manter, como isso não ocorreu, concluiu que havia algo errado em sua contagem. Esse fato é uma evidência de que a aluna percebeu certo procedimento lógico na relação entre número de pontos e cordas.

Poucos estudos relacionados à observação e ao desenvolvimento de sequência numérica são feitos com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. As considerações que os alunos apresentam sobre sequências numéricas são concepções espontâneas, baseadas em experiências cotidianas, que, na maioria das vezes, só são observadas quando a razão da sequência se mantém, como no caso da aluna Valéria.

As observações de Valéria sobre as relações entre número de pontos e cordas é um indício do pensamento por complexos, fase marcada por nexos e relações de observações desordenadas que são agregadas e organizadas em determinadas experiência. O pensamento por complexo é uma das três fases básicas, que, segundo Vygotsky, está presente nos períodos de desenvolvimento do pensamento científico.

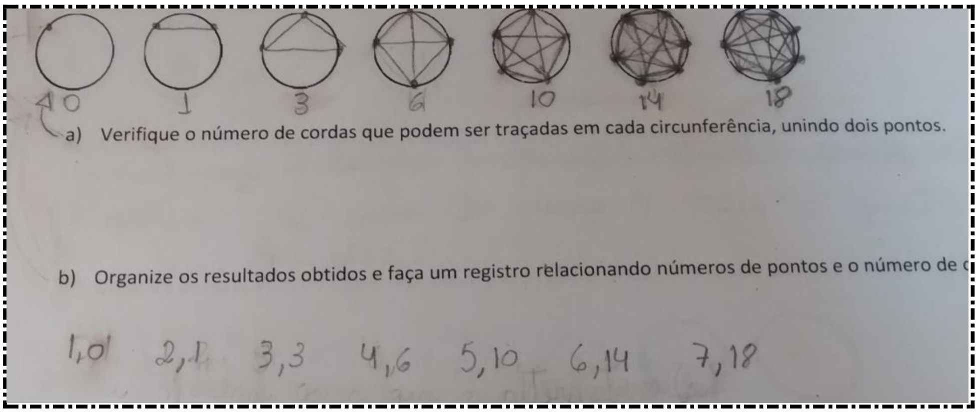
Após a conclusão da fase da atividade independente, verifiquei que as duplas registraram o número de pontos nas circunferências e o número de cordas de diferentes maneiras. Apresento a seguir os distintos registros dos alunos.

Figura 12 − Registro da dupla Augusto e Guilherme: o problema das cordas



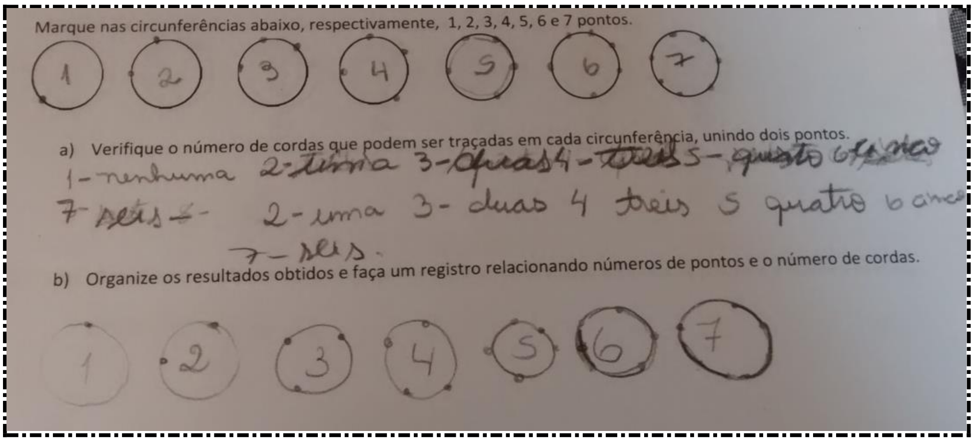
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 13 − Registro da dupla Elder e Walter: o problema das cordas



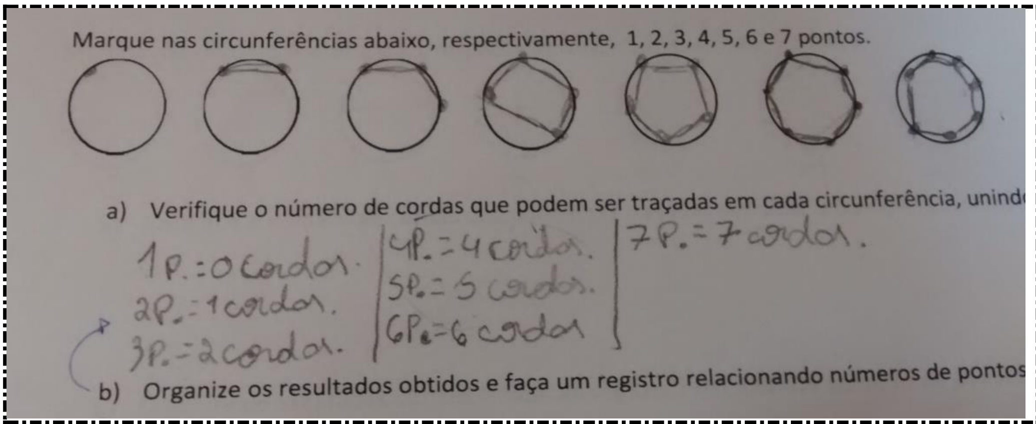
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 14 − Registro da dupla Julia e Jenifer: o problema das cordas



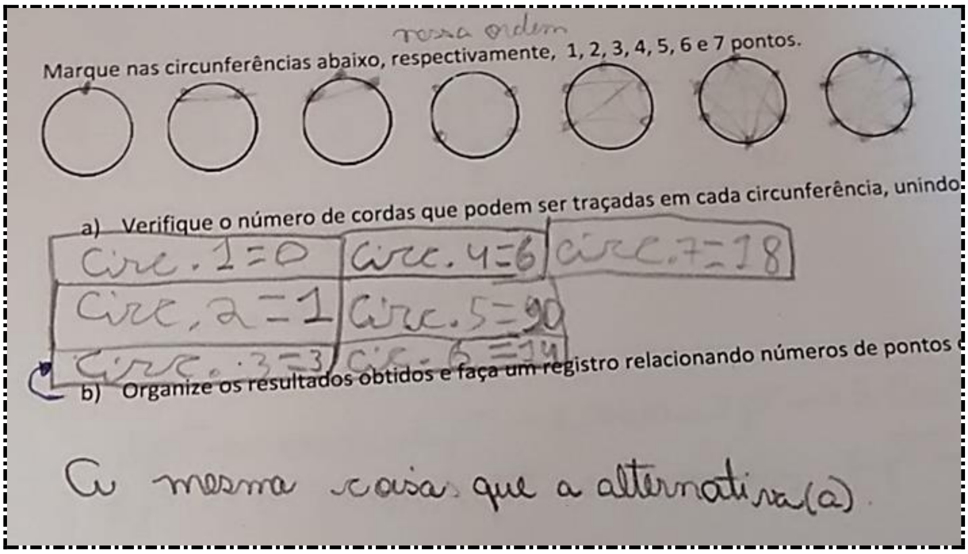
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 15 − Registro da dupla Luana e Natasha: o problema das cordas



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 16 − Registro da dupla Anne e Thadeu: o problema das cordas



Fonte: Acervo da pesquisadora

Assim como observado na tarefa “itinerários”, diferentes procedimentos de enumeração são utilizados pelos alunos em seus registros. Tais registros possibilitaram que as regularidades fossem notadas e generalizações fossem realizadas. O fato de os alunos usarem diferentes procedimentos de contagem em variadas problematizações é mais um indício do desenvolvimento do raciocínio combinatório. Esse fato é apontado por Lopes e Coutinho (2009) como importante para que seja superado o uso de fórmulas no processo de ensino de combinatória.

Ao analisar o número de cordas que as duplas atribuíram para os respectivos pontos nos registros escritos, constatei que atribuíram o número correto de cordas até os seguintes pontos:

2 pontos → 2 duplas;

3 pontos → 3 duplas;

4 pontos → 2 duplas;

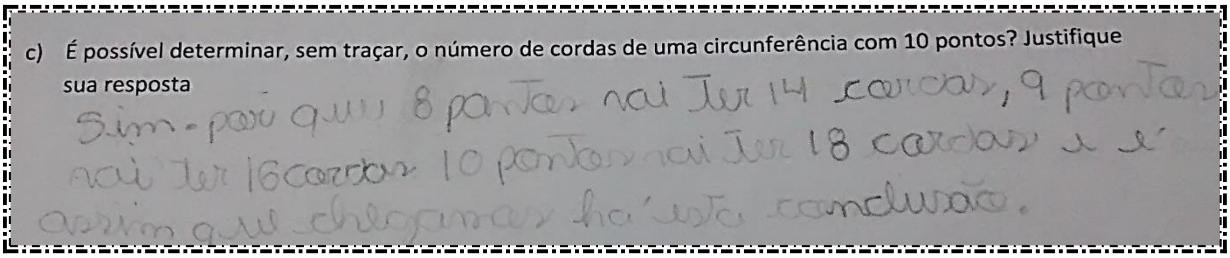
5 pontos → 4 duplas.

Outra regularidade que observei foi que quatro duplas traçaram 14 cordas com 6 pontos. Acredito que o tamanho dos círculos que coloquei na folha da tarefa são pequenos, assim, quando há muitos pontos fica difícil traçar as cordas e verificar se todos os pontos estão conectados entre si. Penso que esse fator possa ter dificultado a contagem do número de cordas.

Com dessa observação, refleti sobre os obstáculos que muitas vezes o próprio professor coloca a seus alunos, dificultando a resolução da tarefa proposta. A avaliação e a reflexão do professor diante do trabalho que ele propôs são importantes para que essa situação seja minimizada.

No registro escrito dos alunos, notei algumas regularidades nos conceitos desenvolvidos por eles para determinar o número de cordas de uma circunferência com 10 pontos. Percebi que quatro duplas repetiram a diferença entre os números finais da sequência de quantidade de cordas traçadas a partir dos pontos.

Figura 17 − Registro da dupla Andréa e Raquel: número de cordas em uma circunferência com 10 pontos



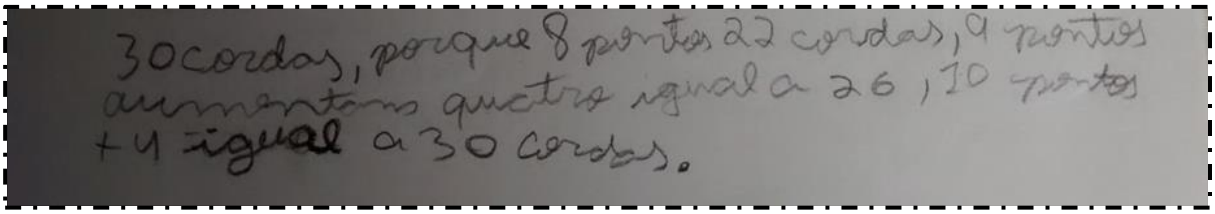
c) É possível determinar, sem traçar, o número de cordas de uma circunferência com 10 pontos? Justifique sua resposta

Sim. porque 8 pontos vai ter 14 cordas, 9 pontos vai ter 16 cordas 10 pontos vai ter 18 cordas e é assim que chegamos há esta conclusão.

Fonte: Acervo da pesquisadora

Andréa e Raquel concluíram que com 8 pontos traçariam 14 cordas; com 9 pontos, 16 cordas; e com 10 pontos, 18 cordas. Assim, acrescentaram para cada ponto duas cordas.

Figura 18 − Registro da dupla Anne e Thadeu: número de cordas em uma circunferência com 10 pontos

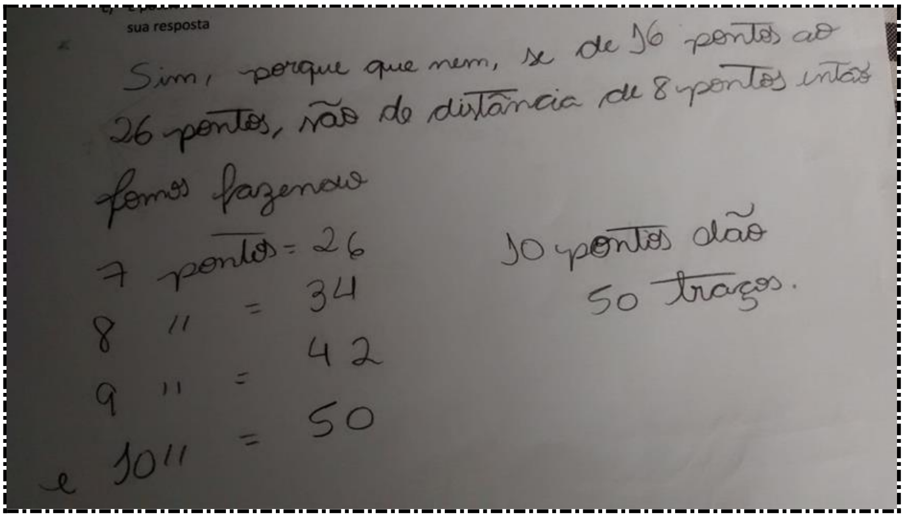


30 cordas, porque 8 pontos 22 cordas, 9 pontos aumentamos quatro igual a 26, 10 pontos +4 igual a 30 cordas.

Fonte: Acervo da pesquisadora

Conforme apresentado na figura 16, de acordo com o número de cordas que traçaram, Anne e Thadeu observaram que a cada ponto inserido no círculo, 4 cordas eram acrescentadas. Dessa forma, chegaram à conclusão de que com 10 pontos teriam 30 cordas, como indicado na Figura 18.

Figura 19 − Registro da dupla Jéssica e Gustavo: número de cordas em uma circunferência com 10 pontos


sua resposta

Sim, porque que nem, se de 16 pontos ao 26 pontos, são de distância de 8 pontos então fomos fazendo

7 pontos = 26
8 " = 34
9 " = 42
e 10" = 50

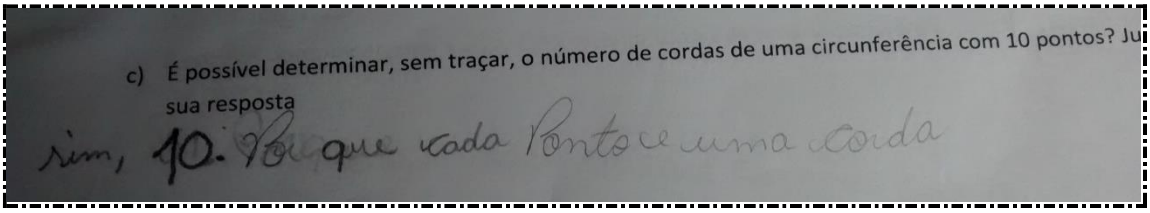
10 pontos dão 50 traços.

Fonte: Acervo da pesquisadora

Os conceitos apresentados pelos alunos em seus registros apresentados, mesmo que equivocados, são um indício de generalizações das relações entre número de pontos e cordas. De acordo com Nuñez (2009), o fato de os alunos buscarem atributos em uma situação concreta para, a partir de suas características, criarem uma regra geral para continuar a sequência em uma situação mais ampla é um processo de generalização abstrata que contribui para o desenvolvimento do pensamento conceitual.

Também observei nos registros escritos que duas duplas atribuíram uma corda para cada ponto, justificando que cada ponto é uma corda, como se observa na Figura a seguir.

Figura 20 − Registro da dupla Luana e Natasha: número de cordas em uma circunferência com 10 pontos

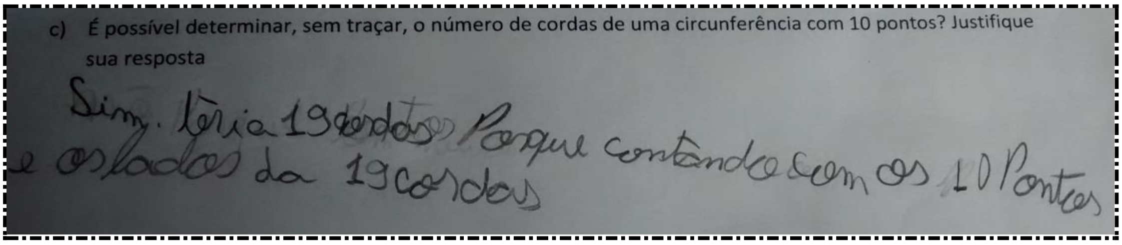


Fonte: Acervo da pesquisadora

Três duplas afirmaram nos registros escritos que não era possível determinar o número de cordas de uma circunferência de 10 pontos, porque "*são muitas*".

Stela e Lívia apresentaram resposta diferente dos colegas de classe ao determinar o número de cordas em uma circunferência com 10 pontos,

Figura 21 − Registro da dupla Stela e Lívia: número de cordas em uma circunferência com 10 pontos



Fonte: Acervo da pesquisadora

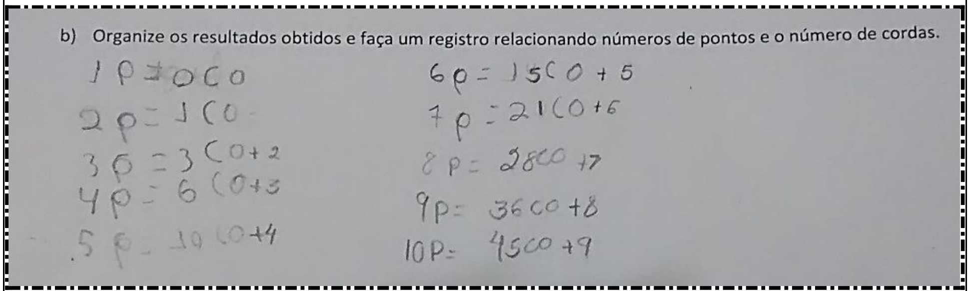
As alunas afirmam na justificativa que há 19 cordas, contando com os 10 pontos e os lados. Os lados que se referem são os espaços entre um ponto e outro; dessa forma, com 10 pontos têm-se nove espaços, ou lados, como as alunas os nomeiam. A cada ponto consideraram que traçariam uma corda, totalizando, assim, 19 cordas.

Mesmo apresentando diferentes números de cordas e raciocínio, percebe-se que as duplas buscam, em observações iniciais ou finais da sequência de números de cordas, identificar alguma regularidade para sustentar sua estimativa da quantidade de cordas em uma circunferência com 10 pontos. Esse procedimento, apesar de não os conduzir ao número exato de cordas, pode ser considerado como a construção de significações sobre a relação entre número de pontos e de cordas. As significações produzidas pelos alunos nessa tarefa são desencadeadas a partir da análise dos próprios registros que produziram. Dessa forma, a princípio, a linguagem escrita representa sua forma de pensamento; no entanto, a análise que foi realizada em seus registros possibilitou que (re)significações fossem desenvolvidas pelos alunos.

A dupla Lucas e Felipe, na fase da atividade independente, fez observações e produziu significações, apresentadas na seguinte transcrição.

Transcrição 10: fragmento do diálogo com Lucas e Felipe sobre o item b da tarefa “o problema das cordas” (T10)	**Possíveis eventos críticos**
233. P: *O que observaram na tarefa?* 234. Felipe: *Vai aumentando as cordas.* 235. P: *Me expliquem.* 236. Lucas: *Um amigo: nenhuma corda; dois amigos: uma corda.* 237. Felipe: *Aumentou uma corda.*	Análise das regularidades
238. P: *Não entendi o termo “amigos”?* 239. Felipe: *É que pensamos que cada ponto poderia ser um amigo que joga a corda para salvar o outro.* 240. P: *Ah, ok!*	Busca de contexto significativo para a problemática
241. Lucas: *Três amigos: três cordas.* 242. Felipe: *Agora aumentaram duas cordas.* 243. Lucas: *Com quatro, aumentaram três.*	Compreensão da razão na sequência de cordas
244. P: *Vamos registrar isso?* 245. Lucas: *Posso colocar aqui do lado mais dois?* O aluno registrou na frente de 3 p = 2 co “+2”. 246. Lucas: *Aqui vou colocar mais três.* Ele registrou: 4p = 6 co “+3”.	Registro favorece observação de padrão

<table>
<tr><td>
247. P: Entendi. E depois, o que acontece?
248. Felipe: Mais quatro. Vai aumentando.
Lucas colocou na frente dos outros números da sequência: +4, +5 e +6.

Figura 22 − Registro da dupla Lucas e Felipe: número de cordas


Fonte: Acervo da pesquisadora
</td><td></td></tr>
<tr><td>
249. P: Estou um pouco confusa. Em que número vai aumentando?
250. Lucas: No anterior.
251. P: Vamos ver se entendi: zero mais um é “um”; um mais dois “três”; três mais três “seis”.
252. P: E qual é o próximo?
253. Lucas: Seis mais quatro = dez.

Lucas ficou um pouco quieto, pois havia colocado 14 cordas para a circunferência de 6 pontos.
254. P: E agora?
255. Lucas: Sim.
</td><td>Alunos percebem equívocos na contagem das cordas</td></tr>
<tr><td>
256. Lucas: Acho que nos esquecemos de contar uma corda.
257. P: Então seriam 15?
258. P: E na de sete pontos?

Parou novamente, pois haviam colocado 20 cordas.

259. Lucas: Esquecemos de contar de novo. É muita coisa!
260. Apagou o número 20 e colocou o número 21.
</td><td>Confiança no raciocínio desenvolvido e não na contagem realizada</td></tr>
</table>

Assim como seus colegas, Lucas e Felipe encontram uma regularidade entre a quantidade de pontos e o número de cordas. No entanto, alguns fatores contribuíram com isso, como a percepção dos alunos de que a diferença entre os números aumentava a cada ponto acrescentado e minha intervenção, como professora-pesquisadora, para que registrassem a diferença entre os números. Esse registro possibilitou à dupla observar a regularidade das diferenças entre os números de cordas e desenvolver um raciocínio de contagem válido para que pudessem continuar a resolver a tarefa.

Christiansen e Walter (1986) atentam para a importância das intervenções pedagógicas do professor. Segundo os autores, o trabalho do professor deve envolver a comparação entre as soluções apresentadas e promover o uso do raciocínio nestas conexões.

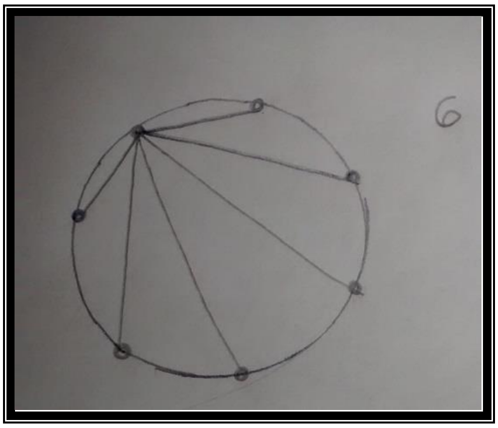
Observa-se, com o exposto, que a produção escrita não pode ser considerada apenas como uma forma de expressão e registro, mas também deve ser vista como uma potencialidade para o desenvolvimento de conceitos. No ato de registrar ou de explicar seu registro, o aluno pode refletir sobre suas ideias e produzir (re)significações.

As conclusões de Lucas e Felipe foram apresentadas aos colegas na fase da reflexão conclusiva. Para iniciar essa discussão, coloquei na lousa sete circunferências e marquei em cada uma os pontos determinados pela tarefa. Em seguida, começamos o diálogo:

 **Transcrição 11: fragmento da reflexão conclusiva sobre a tarefa "problemas das cordas" (T11)**	**Possíveis eventos críticos**
261. P: *Quantas cordas eu consigo traçar na primeira circunferência?* 262. Classe: *Nenhuma.* 263. P: *E com dois pontos?* 264. Classe: *Uma corda.* 265. P: *Com três?* 266. Classe: *Três.* Depois de alunos dizerem o número de cordas, eu anotava o respectivo número abaixo de cada circunferência, sem fazer	Enumeração das cordas

o traçado. 267. P: *E com quatro pontos?* 268. Lucas: *Seis.* 269. P: *E aqui, com cinco pontos?* 270. Luís Felipe: *Não sei.* 271. Lucas: *Dez.*	
272. Valéria: *Tem que traçar!* Comecei a traçar as cordas na circunferência com cinco pontos. Alguns alunos foram contando à medida que eu traçava. 273. Luís Felipe: *Olha, formou uma estrela.* Quando terminei de traçar as cordas na circunferência, os alunos concluíram: 274. Classe: *Dez.* 275. P: *E agora?* 276. Stela: *Vai unindo os pontos.* Aluna sugere que continue a traçar as cordas.	Sugestão de procedimento de enumeração
277. Luís Felipe: *É mais que 10.* 278. P: *Por quê?* 279. Luís Felipe: *Aumentou um ponto.*	Compreensão da variação dos parâmetros
280. Thadeu: *São 14.* 281. Lucas: *Quinze.* Lucas e Felipe diziam “15”, vários alunos “14”. Conforme mencionado anteriormente, quatro duplas	Conflito com as quantidades de cordas / com a utilização de procedimento de contagem

colocaram que com 6 pontos seriam traçadas 14 cordas. Esse fato deu força às duplas para insistirem em sua hipótese. 282. Valéria: *Vamos contando.* 283. Thadeu: *Vai dar 14.* À medida que eu traçava as cordas, os alunos contavam e concluímos: 284. Classe: *Quinze.* 285. P: *Com sete pontos quantas cordas tenho que traçar?* 286. Jéssica: *Vinte e seis.* 287. Lucas: *Quinze.*	
288. Valéria: *O Prô, vai traçando do ponto de cima e esgota todas as possibilidades dele, aí você faz o mesmo com o próximo.* 289. P: *OK!* Segui as orientações da Valéria, porém no final errei e tracei o vigésimo primeiro traço sobre o que havia traçado anteriormente, o vigésimo. A classe ficou agitada. Uns dizendo que eram 20 cordas, outros me dizendo 21. 290. P: *Vamos começar novamente para conferir.* 291. Valéria: *Vai anotando quando termina um ponto.* A aluna queria que eu anotasse o número de cordas assim que esgotasse as possibilidades de cada ponto. Comecei de um ponto e esgotamos todas as possibilidades.	Sugestão de procedimento sistemático de contagem

Os alunos foram contando a cada corda traçada. Anotei o número de cordas, conforme sugestão da Valéria. Ficou da seguinte forma: Figura 23 − Registro: sugestão de contagem  Fonte: Acervo da pesquisadora Iniciamos a contagem do ponto ao lado do anterior e contamos cinco cordas.	
292. Lucas: *Vai diminuindo um Prô.* 293. P: *Será?* Iniciamos outra contagem 294. Luís Felipe: *Agora vai dar quatro.* Contamos quatro cordas e partimos para a próxima contagem. 295. Luís Felipe: *Agora três.* De forma semelhante, a cada contagem Luís Felipe dizia o número de cordas, uma a menos que a anterior, e a quantidade se confirmava. Fizemos isso até o final. 296. P: *E agora pessoal?* 297. Lucas: *Deu 21: 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1.*	Observação de regularidade em processo de contagem

298. P: *Ok!*	
299. P: *No item b, era preciso organizar os dados que fizeram em um registro. Eu observei que as duplas fizeram diferentes registros. Como sugerem que eu faça esse registro na lousa?* 300. Augusto: *Faz uma tabela.* 301. P: *Pode ser turma?* 302. Classe: *Pode.* Construí uma tabela na lousa, na primeira linha da primeira coluna escrevi pontos e na coluna ao lado cordas. De acordo com as orientações dos alunos fui completando a tabela. 303. Valéria: *Um ponto, zero cordas.* 304. P: *Dois pontos?* 305. Guilherme: *Uma corda.* 306. P: *Três pontos?* 307. Classe: *Três cordas.* 308. P: *Quatro pontos?* 309. Felipe: *Seis cordas.* 310. P: *Cinco pontos?* 311. Classe: *Dez cordas.* 312. P: *Seis pontos?* 313. Melissa: *Quinze cordas.* 314. P: *Sete?* 315. Stela: *Vinte e um.*	Escolha do registro adequado para o contexto: tabela
316. P: *Olhando para esses números, vocês observam alguma coisa?* 317. Felipe: *Que do primeiro ponto aumentou uma corda. Depois aumentou duas cordas.* Registrei a fala do aluno ao lado da tabela. 318. Lucas: *Depois aumenta três.* 319. Luís Felipe: *Depois quatro.*	Comunicação de ideias

320. Valéria: *Mais cinco.* 321. Stela: *Mais seis.* 322. P: *E dez pontos, quantas cordas teríamos?* 323. Felipe: *Quarenta e cinco.* 324. Thadeu: *Sete pontos mais seis dá 28.* 325. Lucas: *Vinte e oito mais oito dá 36.* 326. Felipe: *Dez pontos, aumenta nove, aí são 45.* 327. Thadeu: *E assim por diante.*	
328. P: *Pessoal, fiquei pensando em uma coisa. Quando contamos as cordas no círculo com sete pontos, o número de cordas foi diminuindo, e agora foi aumentando. Alguém tem alguma ideia por que aqueles números diminuem e esses aumentam?* Ficaram quietos por uns instantes. 329. Felipe: *É que o amigo que joga a corda para salvar os outros e vai embora. Aí, diminuem os salvamentos.* 330. P: *Não entendi, me explique.* 331. Felipe: *No começo tinha sete amigos, um jogou as cordas, salvou seis amigos e foi embora. Outro que ficou, jogou a corda para cinco e foi embora. Aí vai, até não ter ninguém para salvar.* A classe não entendeu a explicação que Felipe deu. Expliquei a eles que a dupla considerava cada ponto como um amigo e as cordas eram usadas para salvar os amigos. 332. Classe: *Legal!!!*	Criação de contexto para signifcar conceitos

Percebe-se, com a transcrição 11, que a tarefa a princípio gerou algumas dúvidas na compreensão da proposta de trabalho e depois, na fase da atividade independente, provocou alguns conflitos cognitivos, como o apresentado por Valéria (T9). Contudo,foi compreendida e significada pelos alunos à medida que a desenvolviam.

No processo de contagem das cordas, os alunos diziam quantas cordas poderiam ser traçadas, de acordo com os respectivos pontos, eu marcava essa quantidade abaixo de cada circunferência (T11. 260-270). Minha ação com esse tipo de registro foi intencional, desejava que os alunos percebessem a regularidade na sequência de número de cordas, pois penso que, dependendo da forma como o registro é realizado, essa observação talvez não fosse possível. Segundo Rosa, Moraes e Cedro (2010), a compreensão de características comuns de um objeto ou fenômeno em relação a uma classe de objetos e fenômenos similares pode conduzir os alunos ao desenvolvimento de generalizações.

Na transcrição 11, diferentes colocações são apresentadas na socialização da tarefa (T11. 269-270), como quando Luís Felipe diz que não sabe quantas cordas podem ser traçadas com cinco pontos e Lucas diz que são dez. Para resolver essa problemática, Valéria sugere um procedimento de enumeração: "*Tem que traçar!*" (T11. 271). Percebe-se, nesse movimento, que as problemáticas que surgem favorecem o desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas. Nesse processo, os alunos vão se apropriando dos procedimentos de enumeração e os incorporando a sua prática.

A organização no processo de enumeração e de registro de possibilidades, característica importante do raciocínio combinatório, foi observada em algumas considerações de Valéria: "[...] *vai traçando do ponto de cima e esgota todas as possibilidades dele, aí você faz o mesmo com o próximo*" (T11. 287) e "*vai anotando quando termina um ponto*" (T11. 290). Tal traço também é notado em uma fala de Augusto, quando sugere: "*faz uma tabela*".

Conforme já mencionado, de acordo com Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), um dos principais motivos de erros na resolução de problemas de combinatória é a falta de uso de procedimentos sistemático de enumeração, porém a análise apresentada evidencia que o trabalho desenvolvido nesta pesquisa possibilita que os alunos se apropriem e utilizem procedimentos sistemáticos de enumeração com compreensão. Esse fato e minhas observações anteriores (SANTOS, 2010) indicam que o uso de procedimentos sistemáticos de contagem conduz os alunos às respostas adequadas ao resolver problemas de combinatória e probabilidade; esse uso pode ser considerado como uma possibilidade para superar a problemática apontada por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994).

As alterações da quantidade de possibilidades, ocasionadas com o aumento das varáveis, número de pontos e cordas, foi observada por Luís Fernando depois que concluímos que, com cinco pontos, teríamos 10 cordas. Ele disse que são "*mais que 10*" (T11. 276) e justificou o porquê de sua conclusão: "*aumentou um ponto*" (T11. 278). As observações de Luís Fernando podem ser um indício do pensamento por complexo, pois conexões foram desenvolvidas entre a regularidade da sequência e os parâmetros de possibilidades.

No decorrer do diálogo, houve vários conflitos com o número de cordas na circunferência com seis pontos. Lucas e Felipe afirmavam "*quinze*", e outros alunos "*quatorze*" (T11. 279-280). A solução para esse confronto de ideias foi proposta por Valéria, que se envolveu no diálogo e sugeriu que fôssemos contando a quantidade de cordas a partir do traçado (T11. 281). Em momento posterior, ao traçar as cordas na circunferência com sete pontos, errei a representação ao traçar as cordas. Tracei 20, sendo que o correto seriam 21 cordas. A classe ficou agitada, alguns alunos dizendo que seriam 20 cordas, outros 21. Sugeri que fizéssemos novamente os traçados para verificar qual a quantidade correta (T11. 289). Valéria novamente se envolveu na discussão e propôs: "*vai anotando quando termina um ponto*" (T11. 290). As sugestões de Valéria indicam que tem compreensão de procedimentos sistemáticos de enumeração e de contagem. Esse indicativo é uma característica do raciocínio combinatório.

Alguns alunos observaram que a quantidade de cordas diminuía de um ponto para o outro (T11. 291-296). Dessa forma, ao traçar as cordas na circunferência com sete pontos, de acordo com a sugestão de Valéria de esgotar todas as possibilidades de traçados de um ponto e fazer o registro da quantidade, antes de iniciar o traçado em outro ponto, construímos uma adição com sequência de parcelas decrescentes, 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1, e concluímos que a quantidade de cordas seria 21. Os dados produzidos nessa e em outras sequências feitas na tarefa indicam que ela possibilita não apenas o desenvolvimento de conceitos sobre combinatória, mas também de padrões numéricos. Isso também evidencia a possibilidade de articulação entre as áreas de estudo da Matemática.

Ao analisar esse trecho da tarefa, percebi que poderia ter explorado mais a constatação dos alunos sobre a diminuição da quantidade de cordas de um ponto para outro e desenvolvido outras generalizações. Acredito que, diante do raciocínio apresentado no desenvolvimento da tarefa, se eu tivesse proposto a eles que observassem se esse fato se repetia nas demais circunferências, eles poderiam desenvolver outras generalizações e definir o número de cordas em circunferência, com mais pontos, traçando apenas as cordas do primeiro ponto. Por exemplo, na circunferência com seis pontos, cinco cordas são traçadas a partir do primeiro ponto, quatro do segundo, três dos terceiro e assim sucessivamente, até finalizar com um ponto; na circunferência com cinco pontos, são traçadas inicialmente quatro cordas, depois três, duas e uma. Diante dessa observação, é possível definir o número de cordas em uma circunferência qualquer, realizando uma adição com parcelas decrescentes, iniciando pela quantidade de pontos, menos uma unidade, finalizando no número 1, como realizado na socialização da tarefa (T11. 296).

Penso que na complexidade do trabalho em sala de aula diversas possibilidades que favorecem o desenvolvimento de conceitos passam despercebidas pelo professor. Essa observação foi possível nesse momento em que analiso o registro dos alunos e as discussões desenvolvidas na aula, e busco indícios de conceitos desenvolvidos por eles. Acredito que a oportunidade de desenvolver ações como essas, de análise das aulas ministradas e de produções dos alunos, em uma perspectiva reflexiva e crítica, pode contribuir para o processo de aprendizagem do professor e dos alunos.

As considerações desenvolvidas por Lucas e Felipe na fase da atividade independente (T10), que indicavam que a razão da sequência aumentava uma unidade a cada ponto, foram apresentadas aos colegas de classe quando finalizamos a contagem das cordas e construímos a tabela com os dados. Tais colocações foram apropriadas pelos colegas, tanto que, no decorrer da apresentação, alguns deles continuaram a sequência iniciada pela dupla (T11. 318-320), dizendo qual seria o próximo número. Esse fato é uma evidência de que, por meio das relações sociais, a pessoa desenvolve ações e elaborações particulares que a constituem como sujeito, como apontado por Fontana (2005). O receio que tinha incialmente do desenvolvimento dessa tarefa foi sendo superado na medida em que os alunos apresentavam suas ideias e suas sugestões nas diferentes fases de seu realização. Não acreditava, a princípio, que eles conseguissem determinar, sem traçar, o número de cordas de uma circunferência com 10 pontos. No entanto, considero que superaram essa expectativa com o uso de procedimentos de contagem e enumeração de possibilidades para a tarefa, com as diversas maneiras como organizaram e registraram as possibilidades e com as conclusões a que chegaram a partir da observação de regularidades e de sequência numérica. De acordo com Lopes e Coutinho (2009), atributos como esses são importantes para o raciocínio combinatório, que visa o desenvolvimento de uma forma de pensar que permite às pessoas analisar situações de decisões em contextos escolares e não escolares “que envolvem mais que uma possibilidade de resultado final do processo e suas possíveis ramificações” (LOPES; COUTINHO, 2009, p. 62).

4.4 Sínteses relativas às tarefas analisadas

Os dados apresentados fazem parte da análise das tarefas realizadas. Nelas busquei evidências sobre o desenvolvimento do pensamento probabilístico com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental quando esse pensamento se articula ao raciocínio combinatório por meio de um trabalho pedagógico na perspectiva da problematização.

No episódio 1, “ a linguagem probabilística e o jogo de par ou ímpar: produção de significações” ficou evidente o movimento dos alunos na busca de significados para os termos do vocabulário probabilístico e de significações ao adequá-los a diferentes contextos. Conceitos sobre combinatória − como a análise de possibilidades, a construção do espaço amostral, as noções de limite do espaço amostral e as observações das variáveis e de seus parâmetros − foram apresentados e desenvolvidos pelos alunos na execução da tarefa “linguagem probabilística”.

De acordo com Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), a combinatória é um instrumento de modelização da Matemática. Dessa forma, tem papel fundamental nessa e em outras disciplinas escolares. A concepção sobre padrões numéricos que surgiram no decorrer da pesquisa é uma evidência dessa potencialidade da combinatória. Considero que tanto a combinatória como as outras disciplinas escolares e os conteúdos matemáticos, quando articulados no processo de ensino e aprendizagem, possibilitam que os alunos percebam os diversos contextos em que a Matemática está presente e passem a estabelecer outras relações e conceitos, ampliando, assim, o sistema conceitual com novos níveis de generalidade dos conceitos.

A problematização apresentada na forma escrita, na primeira fase das tarefas, e depois na forma oral, na terceira fase das tarefas, levou os alunos a analisar, questionar, criticar, buscar modelos explicativos, comparar, entre outras coisas. Com isso, esse contexto favoreceu o movimento entre conceitos espontâneos e científicos.

Quanto ao raciocínio combinatório e ao pensamento probabilístico, observa-se que ambos se alternam enquanto foco da discussão. Porém, em determinado momento da primeira tarefa, eles se entrelaçam, e os alunos passam a apresentar conceitos sobre ambos.

Ficou evidente que as tarefas “itinerários” e “o problema das cordas” favoreceram a apropriação de procedimentos de enumeração e contagens pelos alunos. Além disso, houve o envolvimento deles na construção de significados e significações dos problemas de combinatória. Também ficou evidente nessas tarefas o movimento entre conceitos espontâneos e científicos a partir do conjunto de componentes mediadores: tarefa, ambiente de aprendizagem e linguagem.

No decorrer da análise, busquei verificar se em algum momento, de forma isolada, os componentes mediadores mencionados foram preponderantes para a obtenção de conceitos. No entanto, constatei que o processo de elaboração conceitual é mediado pela linguagem, pelo ambiente de aprendizagem e pela tarefa e que, ao ser envolvido no movimento entre conceitos espontâneos e científicos, possibilita que novos conceitos sejam desenvolvidos e outros (re)significados, como organizado no Esquema 2 do segundo capítulo.

O que impulsiona o movimento desse esquema são as pessoas envolvidas no processo de ensino e de aprendizagem, nesta pesquisa, especificamente, professora-pesquisadora e alunos. Em concordância com a perspectiva histórico-cultural, é por meio das relações com o outro, mediadas pelo sistema linguístico, que o sujeito se desenvolve. A mediação do outro movimenta, de certa forma, um sistema complexo, possibilitando a produção de significados e sentidos, as significações (FONTANA, 2005). De acordo com Smolka (2010, p. 125), a produção de sentidos é marcada pelo trabalho simbólico (interações, intertextos) na “dinâmica interconstitutiva das dimensões individual, social, ideológica”, e o processo de significação afeta e constitui o corpo e o sujeito.

Dessa forma, é possível dizer que a professora-pesquisadora e os alunos do 6º ano contribuíram uns com os outros em seu processo de elaboração conceitual. Em que medida cada um contribuiu? Penso que não seja possível responder isso, mesmo porque foi realizado um recorte para esta pesquisa, conforme mencionado; e apresento trechos que considerei relevantes para a análise, outros tão interessantes quanto podem não ter sido analisados.

É possível observar nos episódios que variam os alunos que contribuem com suas colocações. Na transcrição 1, Augusto e Luís Felipe se destacam quando expõem seus conceitos sobre termos do vocabulário probabilístico e conceitos probabilísticos, possibilitando que significações fossem desenvolvidas. Na transcrição 2, quando Stela, Augusto e Bruna discutem sobre as possibilidades no jogo de par ou ímpar, contribuem para a elaboração de conceitos sobre as possibilidades e as probabilidades da soma ser um número menor que dez. As observações e as conclusões de Lucas para a contagem dos itinerários (T7) foram importantes para a significação dos procedimentos de enumeração. Lucas e Felipe, a partir das observações que realizaram sobre padrões numéricos, colaboraram para que os colegas conseguissem descobrir, sem traçar, a quantidade de cordas de uma circunferência com 10 pontos. As considerações de Valéria contribuíram para a formação de conceitos sobre procedimentos sistemáticos de enumeração de possibilidades.

O fato de um aluno se expor mais que o outro na fase de reflexão conclusiva não é uma evidência de que tenha aprendido mais ou de que tenha mais conhecimento que os colegas. Todos os estudantes se envolveram no desenvolvimento das tarefas propostas nesta pesquisa, mesmo porque ela envolve três fases. A negociação de ideias, feita na fase da atividade independente, também cooperou para a formação de conceitos dos alunos. No entanto, a apresentação de ideias no momento da reflexão conclusiva envolve mais alunos, contribuindo assim para a validação ou não de ideias elaboradas pelas duplas; possibilitando que conceitos sejam (re)significados.

Considero que essas observações me possibilitam afirmar que a sequência de tarefas, as intervenções da professora-pesquisadora e dos alunos, as problematizações, o ambiente de aprendizagem e a linguagem favoreceram o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do pensamento probabilístico dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Também me conduziram a significações das potencialidades das tarefas analisadas no trabalho, em contexto escolar, com combinatória. No entanto, depois dessas observações me questionei: quais as implicações desse trabalho nas concepções probabilísticas dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental? Essa será a análise do próximo capítulo.

5 O MOVIMENTO DAS CONCEPÇÕES PROBABILÍSTICAS DOS ALUNOS A PARTIR DO TRABALHO REALIZADO

Neste capítulo apresento uma síntese dos dados coletados nas tarefas sobre probabilidade desenvolvidas individualmente no final da sequência destas. Elas foram realizadas no momento em que os alunos desenvolviam a avaliação interdisciplinar[57], porque depois dessa avaliação muitos alunos entraram em férias.

Quando comecei a organizar os dados para este capítulo, observei que a aparente superficialidade da análise das questões de múltipla escolha e a falta de possibilidade de comunicação com os alunos me deixou angustiada, pois a dinâmica de desenvolvimento dessas tarefas foi diferente das anteriores. Entretanto, ao buscar indícios dos conceitos dos alunos a partir das alternativas assinaladas e das justificativas apresentadas, percebi que a falta de comunicação oral, em determinados momentos, não tornou suas considerações menos importantes. Pelo contrário, segundo Hiebert et al (1997), esses momentos de avaliação são fundamentais para se buscar indícios do que ficou, em termos de aprendizagem, para os alunos após um trabalho realizado.

A possibilidade de buscar indícios é considerada por Hiebert et al (1997) uma ferramenta importante para avaliar o processo de ensino desenvolvido, pois muitos estudantes têm problemas para utilizar os conceitos desenvolvidos em um processo de aprendizagem em outros contextos.

Dessa forma, considero importante para a presente pesquisa, que se insere no campo da prática pedagógica, analisar o raciocínio combinatório e o pensamento probabilístico de alunos em diferentes contextos: em um processo de negociação de significados e significações com a professora-pesquisadora e com os colegas de classe e em um momento individual de interpretação e reflexão sobre os conceitos apropriados. Esse momento não está dissociado da perspectiva vygotskyana, que considera que “[...] a pesquisa visa compreender os eventos investigados descrevendo-os, mas procura também suas possíveis relações, integrando o individual com o social, focalizando o acontecimento nas suas mais essenciais e prováveis relações” (FREITAS, 2009, p. 4).

Na sequência, apresento os dados das tarefas sobre probabilidade.

---

[57] Avaliação instituída pela escola, elaborada com dinâmica semelhante a das avaliações externas, com questões de múltiplas escolhas de todas as disciplinas estudadas, realizada no mesmo dia com os alunos de todas as classes.

5.1 As tarefas sobre probabilidades: indícios do trabalho realizado

Na busca de alguns indícios de elaboração conceitual dos alunos em probabilidade organizei em quadros as respostas dadas por eles nas cinco tarefas sobre probabilidade. Vinte e sete alunos realizaram essas tarefas. Nos quadros, coloquei para cada tarefa a quantidade de respostas dadas em cada alternativa e as justificativas apresentadas para a escolha da alternativa. A quantidade de justificativas não corresponde à quantidade de respostas, pois haviam justificativas iguais.

Quadro 10 – Síntese das respostas da tarefa 1 sobre probabilidade

Tarefa 1. Vou colocar uma ficha azul e uma amarela em um saco e pedir para você tirar uma sem olhar. Qual você acha que mais provável sair?		
ALTERNATIVAS	QUANTIDADE DE RESPOSTAS	JUSTIFICATIVAS[58]
a. A azul.	2	Porque amarela tem mais. Pode ser que a azul seja mais tirada ou pode também ser a amarela.
b. A amarela.	1	Eu acho que a amarela tem mais possibilidades de sair.
c. Ambas têm as mesmas possibilidades.	23	São duas fichas iguais, só muda a cor. Porque pode tirar uma ou outra. Porque as duas tem o mesmo número. Porque tem as mesmas possibilidades. Porque a azul tem 50% de chances de sair e a amarela também tem 50%. Porque há duas: uma chance para cada uma. Porque tem as mesmas quantidades de fichas. Porque tem uma de cada cor. As chances são as mesmas. Pode sair amarela ou azul. Porque não tem duas azuis e uma amarela, ou vice e versa.
d. Não sei responder	0	

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

Essa tarefa envolve uma situação clássica de probabilidade, uma vez que as possibilidades de se extrair fichas azul e amarela são equiprováveis. Percebe-se, pelas respostas dadas pelos alunos e por suas justificativas, que muitos deles identificam essa característica na problemática quando afirmam: “As duas fichas são iguais, só muda a cor”;

[58] Optei por não revisar as justificativas dos alunos, respeitando seu modo de escrever.

“Porque as duas têm o mesmo número”; “Porque tem uma de cada cor”; “As chances são as mesmas”; “Porque não tem duas azuis e uma amarela ou vice-versa”.

Todavia, três alunos apresentam concepções equivocadas. Um deles talvez por não compreender o enunciado, pois afirma que “a amarela tem mais”, os outros dois apresentam indícios de se basearem na concepção subjetivista, pois dão ideias de que perceberam a equiprobabilidade ao afirmar “Pode ser que a azul seja mais tirada ou pode também ser a amarela” e “Eu acho que a amarela tem mais possibilidades de sair” e ao assinalar a cor que acreditam que seja mais provável.

A alteração do espaço amostral da tarefa 2, aumentando uma ficha azul, demanda que a concepção formal das probabilidades seja apresentada.

Quadro 11 – Síntese das respostas da tarefa 2 sobre probabilidade

Tarefa 2. Se eu colocar duas fichas azuis dentro de um saco e uma amarela, qual é a mais provável que saia?		
ALTERNATIVAS	QUANTIDADE DE RESPOSTAS	JUSTIFICATIVAS
a. Azul	23	Porque tem duas fichas azuis e uma amarela, então é mais provável que saia a azul. Porque tem mais fichas azuis. Porque tem mais fichas azuis que amarela. Tem uma possibilidade a mais. Porque tem duas fichas azuis e uma amarela. Porque você tem duas chances dentre 3. Porque tem mais que a amarela. Porque azul tem 75% de chance de sair e a amarela somente 25%.
b. Amarela	0	
c. Ambas têm as mesmas possibilidades	3	As duas podem ter chances. Uma das duas vai sair. Pode sair azul ou amarela, mas o azul tem mais chances.
d. Não sei responder	0	

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

A análise do espaço amostral e o reconhecimento das possibilidades para a medida de chance são indícios da escolha da alternativa a, resposta dada por 23 alunos. Essa eleição é um indicativo de que os alunos possuem conceitos de probabilidade formal. No entanto, a opção de três alunos de assinalar a alternativa c – “ambas têm as mesmas possibilidades” – pode ser um indício de não compreensão da construção do espaço amostral, e o fato da azul ter uma ficha a mais não é considerado como uma possibilidade a mais. Diante dessa consideração, a medida de probabilidade não é feita de forma correta. Segundo Sáenz (1999), quantificar o azar não é fácil, porque a concepção de probabilidade não é natural nem intuitiva; é fruto de reflexão e prolongado contraste com a realidade. Dessa forma, a realização de tarefas sobre probabilidade é importante para o desenvolvimento do pensamento probabilístico.

A tarefa 3 provocou alguns conflitos nas concepções probabilísticas dos alunos. Ela se diferencia das demais, pois sua resolução envolve reflexões sobre os conceitos lógicos de probabilidade.

Quadro 12 – Síntese das respostas da tarefa 3 sobre probabilidade

Tarefa 3. Com duas fichas azuis e uma amarela dentro do saco, a probabilidade de tirar uma vermelha é:		
ALTERNATIVAS	QUANTIDADE DE RESPOSTAS	JUSTIFICATIVAS
a. Certa.	0	
b. Pouco provável.	11	Porque tem mais chance de tirar a azul. Nós podemos tirar uma azul ou amarela. Porque teria duas fichas azuis, uma amarela e uma vermelha, há mais possibilidades de sair azul. Depende da sorte. É muito pouco tirar azul e amarela. Porque só tem uma amarela e uma vermelha. Porque a quantidade de vermelha é muito pouca. Vermelha não tem muitas possibilidades, é como a amarela. Há apenas 1 dentre 4. Pode tirar a vermelha, porque tem duas azuis e uma amarela. Porque há outras três fichas para tirar.
c. Impossível.	13	Tem duas azuis e uma amarela, como vai tirar uma vermelha? Não tem ficha vermelha. Só tem fichas azuis e amarelas.

		Porque azul tem mais. Tem duas azuis e uma amarela, não tem como tirar vermelha.
d. Não sei responder.	2	Não sei responder.

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

De forma diferente das anteriores, houve certo equilíbrio na escolha da resposta adequada e não adequada à problemática apresentada. Metade dos alunos compreendeu a situação apresentada e estabeleceu relações da concepção lógica de probabilidade. A justificativa dada por um aluno por meio de um questionamento, “tem duas azuis e uma amarela, como vai tirar uma vermelha?”, indica que ele analisou as variantes da situação, avaliou as possibilidades e fez críticas quanto à problemática apresentada. O conjunto dessas ações é apontado por DelMas (2002) como característica do pensamento probabilístico.

Vários alunos optaram pelo termo “pouco provável”; essa escolha − associada a algumas justificativas, como “tem duas fichas azuis, uma amarela e uma vermelha” e “há apenas 1 dentre 4” − é um indicativo de que houve equívocos na interpretação do enunciado, pois vários alunos consideram que a ficha vermelha está inserida no saco com as azuis e a amarela, que ela faz parte do espaço amostral do evento. Diante dessa consideração, a escolha do termo “pouco provável” é adequada.

O fato de metade dos alunos não assinalarem a resposta adequada é um indício de que problemas que envolvem a probabilidade lógica não são fáceis de serem interpretados e podem conduzir os alunos a equívocos, como considerar a ficha vermelha como uma possiblidade, talvez porque a problemática é definir sua probabilidade. O conceito lógico está relacionado ao grau de confiança medido de maneira extrema, certo e impossível; e o fato de ser medido de duas formas apenas, certo ou impossível, 0 ou 1, não o torna fácil de ser compreendido.

De acordo com Godino, Batanero e Cañizares (1996), o conceito lógico das probabilidades é desenvolvido a partir de uma relação lógica entre o enunciado e as hipóteses, conduzindo o sujeito ao desenvolvimento de generalizações de implicações e contradições disponíveis. Segundo os autores, é preciso encontrar situações distintas da concepção clássica e frequentista para seu ensino.

A tarefa 4, assim como a 2, possibilita que a concepção formal de probabilidade seja apresentada. A diferença entre essas tarefas é o contexto e a quantidade de elementos do espaço amostral.

Quadro 13 – Síntese das respostas da tarefa 4 sobre probabilidade

Tarefa 4. Uma classe tem 19 alunos: 11 meninas e 8 meninos. Se você escrever o nome de cada um dos alunos em um papel, colocá-los em um saco e retirar um nome ao acaso, o que considera que seja mais provável?		
ALTERNATIVAS	QUANTIDADE DE RESPOSTAS	JUSTIFICATIVAS
a. Que o nome seja de um menino.	3	Porque tem mais meninos. Porque na classe tem mais meninos. Tem mais possibilidades de sair meninos do que menina.
b. Que o nome seja de uma menina.	16	A quantidade é maior. Tem mais nomes de meninas. Tem mais meninas. Tem mais meninas que meninos. Estão na maioria. Porque tem 11 meninas e 8 meninos. As meninas são mais. O número de meninas é maior do que de meninos. Porque tem mais meninas na sala que meninos. Porque há 11 probabilidades dentre 19.
c. A probabilidade de o nome ser de um menino é a mesma que a de ser de uma menina.	7	Porque pode sair menino ou menina, mas meninas têm mais chances. Porque tem as mesmas possibilidades. Tem duas chances de ser. Na sala tem 11 meninas e 8 meninos, mas tem mais possibilidades de sair meninas. Exemplo: Giovani ou Giovana Os meninos podem ser tirados ou as meninas. Pode ser tanto menino como menina.
d. Não sei responder.	0	

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

Como ocorreu na tarefa 2, a maioria dos alunos percebeu, a partir do espaço amostral, que há maior probabilidade de retirar o nome de uma menina que de um menino. Esse fato indica que a concepção formal em diferentes contextos foi apresentada pela maior parte dos estudantes.

A escolha feita por três alunos, “que o nome seja de um menino”, indica características da concepção subjetivista, uma vez que não são consideradas as possibilidades do evento apresentado, mas talvez as possibilidades do contexto em que está inserido. Neste caso, o número de alunos da classe em que estudam, pois é maior o número de meninos.

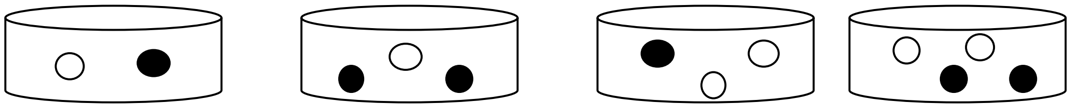
Alguns alunos consideram que a probabilidade de o nome ser de um menino é a mesma que a de ser de uma menina, isso indica que eles avaliam que o fato de ter nomes de meninos e de meninas no saco, independente das respectivas quantidades, torna a situação equiprovável. Esse equívoco é um indício da presença da concepção clássica das probabilidades.

As respostas apresentadas pelos alunos nas tarefas 2 e 4 são semelhantes e favorecem a reflexão formal das probabilidades. Assim, percebe-se que a concepção clássica destas é evidenciada na resposta de três alunos na tarefa 2, quando afirmam que “as possibilidades de fichas azuis e brancas são as mesmas”, e de sete alunos na tarefa 4, quando colocam que “a probabilidade de o nome ser de um menino é a mesma que a de ser de uma menina”.

Justificativas podem ser atribuídas à diferença entre a quantidade de respostas equivocadas da tarefa 2 para a 4, como a diferença entre as probabilidades de cada evento. Na tarefa 2 a probabilidade de retirar uma azul bola azul é 66,7% e de escolher uma amarela é 33,3%, a diferença entre elas é de 33,4%. Na tarefa 4 a probabilidade de tirar o nome de uma menina é 58% e de escolher o de um menino é 42%, a diferença entre elas é de 16%. Outra justificativa pode ser o contexto das tarefas, pois situações semelhantes a da tarefa 4 podem ter sido vivenciadas por eles, já que apresenta contexto de sala de aula, conduzindo-os a uma observação de frequência. O conceito subjetivista também pode ter guiado os alunos em suas respostas.

A tarefa 5 possibilita que as concepções clássica e formal das probabilidades sejam comparadas.

Quadro 14 – Síntese das respostas da tarefa 5 sobre probabilidade

<table>
<tr><td colspan="3">Tarefa 5. Em uma vitrine de uma loja de esportes há alguns recipientes transparentes com bolas brancas e pretas. Veja o desenho abaixo, representando a vitrine.

Recipiente 1 Recipiente 2 Recipiente 3 Recipiente 4</td></tr>
<tr><td>ALTERNATIVAS</td><td>RESPOSTAS/ QUANTIDADES</td><td>JUSTIFICATIVAS</td></tr>
<tr><td rowspan="3">a. Suponha que você fosse retirar, sem olhar, uma bola do recipiente 3. Qual a cor de bola que provavelmente você iria retirar? Por que?</td><td>Branca – 24</td><td>Porque tem mais.
A branca porque tem mais que a preta.
Porque tem maior número.
Porque tem 3 bolas, 2 brancas e uma preta.
A branca porque tem duas bolinhas.
A branca porque tem mais possibilidades.
A branca porque ela tem 2 possibilidades e a preta tem 1 só. Por isso, a branca é mais fácil de sair.
A branca tem a maioria das chances.
Pode ser que eu retire à branca, mas tem chances de sair a preta.
A branca é a mais provável.
A Branca porque tem duas brancas e uma preta.
A branca porque tem mais possibilidades de sair, porque tem duas.
A branca porque tem maior quantidade.</td></tr>
<tr><td>Preta – 1</td><td>Porque só tem ela.</td></tr>
<tr><td>Ambas - 1</td><td>A branca ou a preta, mas a branca tem mais.</td></tr>
<tr><td>b. De qual recipiente seria mais provável retirar (sem olhar) uma bola preta? Justifique sua resposta.</td><td>Recipiente 1 - 3</td><td>Porque tem mais chance de tirar a bolinha preta.
Porque tem duas bolas.
Porque pode ser que eu tire a branca ou preta.</td></tr>
</table>

	Recipiente 2 - 19	Porque tem mais bolas pretas que brancas. Porque tem duas bolas pretas e uma branca. No recipiente 2, porque há 2 chances dentre 3. Tem menos branca e mais preta. Porque as bolas estão embaixo e tem mais preta. Porque tem duas bolas pretas e ela tem mais possibilidades de sair. Porque a bola preta está em maior quantidade.
	Recipiente 3 - 1	Porque iria ficar igual, iria ter a mesma resposta.
	Recipiente 4 - 2	Tem as mesmas possibilidades. Porque tem duas pretas e duas brancas.
	Recipiente 2 e 4 - 1	Não justificou
c. Seria mais fácil retirar uma bola branca do recipiente 2 ou do recipiente 1? Explique o porquê de sua resposta.	Recipiente 1 - 16	Porque tem uma bola branca e uma bola preta. Porque tem as mesmas possibilidades. Tem as mesmas quantidades de branca e preta. No 1, porque tem a metade das chances e no 2, a minoria. No 1, porque no 2 tem mais pretas que brancas. Tem duas bolas pretas e uma branca e a preta ficaria mais fácil de sair. Número de bolas iguais. Tem menos bolas pretas. Porque há duas bolas se ele tiver sorte tirará a branca. Digamos que 50% de cada bola. No 1, porque no 2 tem duas bolinhas pretas. No 1 dá para retirar uma bola preta ou branca e no recipiente 2 dá para tirar as duas pretas. Porque é mais provável que saia. No recipiente 2 seria mais difícil sair, pois contém mais pretas e no 1 tem as mesmas chances de tirar as duas cores.
	Recipiente 2 - 8	No 2, porque tem apenas uma branca em cada um deles. Porque no recipiente 1 tem uma bola branca e no 2 também. Porque a bola branca está em cima. Porque tem três bolas e duas delas são

		pretas. Porque iria ficar com duas pretas. Porque tem duas bolas pretas e uma branca.
	Ambos - 1	São as mesmas chances porque tem uma bola branca em cada recipiente.
	Não especificou recipiente - 1	Porque tem mais chances de sair branco que preto.

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

As opções e as justificativas apresentadas pelos alunos nessa tarefa indicam que, assim como as situações de incertezas conduzem os alunos a diferentes concepções, os enunciados de problemas de probabilidade também podem os conduzir a diferentes interpretações.

A interpretação de problemas probabilísticos não é fácil, pois envolve a interpretação dos enunciados e as concepções pessoais. Dessa forma, conceitos subjetivistas e frequentistas muitas vezes influenciam nas respostas dos alunos por serem utilizados na vida cotidiana. Os enunciados dos problemas ou as figuras que apresentam também podem contribuir para a construção de equívocos nas respostas, como os apresentados nessa tarefa, com a disposição das bolas nos recipientes. As respostas "porque as bolas estão embaixo" para a problemática b e "porque a bola branca está em cima" para a c são indícios de que a forma como as bolas foram dispostas nas figuras influenciaram os alunos em suas ideias.

De acordo com a perspectiva vygotskyana, interpretações como essa, em que a palavra estabelece inter-relações entre os objetos são características do pensamento por complexo. Segundo Fontana (2005), operações de análise são indicadores do movimento do pensamento por complexo para os conceitos potenciais.

Alguns alunos redigiram respostas equivocadas de alguns alunos para a questão "seria mais fácil retirar uma bola branca do recipiente 2 ou do recipiente 1?", afirmando que seria no 2, "porque iria ficar com duas bolas pretas" ou "porque tem duas bolas pretas e uma branca". Isso pode ocorrer por conta de fundamentação na concepção frequentista de probabilidade, talvez porque acreditem que o fato de ter menos bolas brancas é porque ela sai mais ou porque "a bola branca está em cima".

A falta de compreensão da concepção formal das probabilidades é observada na resposta de certos estudantes para o item c: "são as mesmas chances de sair branco que preto" e "no 2, porque tem apenas uma branca em cada uma deles". Eles consideram que o fato de ter bolas das duas cores nos recipientes torna a situação equiprovável.

Mesmo diante de alguns equívocos, percebe-se nas respostas dos alunos na tarefa 5 que a maioria dos alunos consegue analisar e comparar características de situações equiprováveis ou não para avaliar e estimar as chances dos diferentes eventos. Essas ações são evidências do pensamento probabilístico.

5.2 Considerações relativas às tarefas de probabilidade

As respostas dadas pelos alunos na tarefa sobre probabilidade indicam que há um movimento das concepções probabilísticas dos alunos investigados, mobilizado pelos diferentes contextos e características das tarefas. O uso de termos do vocabulário probabilístico como "bastante provável", "há possiblidades", "há probabilidades" foi observado nas justificativas dos alunos, assim como a estimativa das probabilidades por meio de expressões e porcentagens.

As respostas apresentadas pela maioria alunos nas tarefas sobre probabilidade indicam que eles estimam de maneira adequada as probabilidades de problemas de diferentes concepções probabilísticas. Porém, os conceitos frequentista e subjetivista, desenvolvidos a partir de experiências de âmbito pessoal e de frequência, estão presentes nas concepções de alguns alunos, em situações diversas de probabilidade. Esse fato é um indicativo de que os conceitos espontâneos, estabelecidos na vida cotidiana, influenciam na resolução de problemas escolares de probabilidade. Dessa forma, a dinâmica de aprendizagem realizada na primeira fase da pesquisa se faz importante para que conceitos científicos sejam estabelecidos.

A tarefa 1, que envolvia a concepção clássica de probabilidade, foi a que teve maior número de respostas adequadas dos alunos, dando indícios da compreensão do conceito. De acordo com Godino, Batanero e Cañizares (1996), a representação formal do conceito clássico está associada à certa destreza no trabalho com frações e conceitos de razão. Considero que esse fato seja um indicativo para o ensino de probabilidade. Penso que as situações de probabilidade clássica são oportunas para o desenvolvimento de tal destreza; no entanto, o fato de iniciar os estudos de probabilidade a partir da concepção clássica pode conduzir os alunos ao desenvolvimento de conceitos equivocados, como os apresentados por alguns alunos, que consideram espaço amostral equiprovável em situações que não são. Minha sugestão é que circunstâncias relacionadas à concepção formal das probabilidades antecedam casos voltados para a clássica no processo de ensino das probabilidades.

A avaliação dos enunciados dos problemas de probabilidade e de suas representações gráficas precisam ser consideradas no momento de seleção de tarefas do ensino das probabilidades. Como observado na análise, os enunciados e suas representações podem conduzir os alunos ao desenvolvimento de conceitos e estimação probabilística equivocados.

As discussões desenvolvidas na tarefa “linguagem probabilística” possibilitaram reflexões que envolviam conceitos de todas as concepções probabilísticas – clássica, frequentista, formal, subjetivista e lógica – por meio de relação entre os termos do vocabulário probabilístico e as possibilidades no jogo de par ou ímpar. Porém, o foco de minha investigação era as articulações entre o pensamento combinatório e o probabilístico, e não o desenvolvimento específico dos conceitos. Dessa forma, as tarefas desenvolvidas não possibilitaram o desenvolvimento de generalizações de problemáticas lógicas probabilísticas específicas. Penso que esse apontamento possa ser um objeto de investigação importante, pois os conceitos de probabilidade lógica são significativos para a resolução de problemas cotidianos e escolares.

As concepções equivocadas das probabilidades apresentadas em algumas situações são indícios de que o desenvolvimento do pensamento probabilístico não é espontâneo nem fruto de trabalho específico de probabilidade, mas de um processo de ensino e de aprendizagem que permeia todo o período escolar, que envolve o movimento entre conceitos espontâneos e científicos, articulados pelos componentes mediadores − tarefa, ambiente de aprendizagem e linguagem − em diferentes contextos. Os resultados também apontam que o processo não é igual para todos os estudantes, mesmo que tenham vivenciado as mesmas situações de ensino.

Além da tarefa “linguagem probabilística”, outras possibilitaram a articulação entre a combinatória e a probabilidade, como o “jogo senha”, “corrida de cavalos”, “lançamento de dardos”, “jogo do lobo mal e da chapeuzinho”, “lançamento de moedas: situação-problema”, “lançamento de moedas: experimento”, “jogo de par ou ímpar” e “tarefas sobre probabilidade: de 1 a 5”.

Assim como apontando por Hiebert et al (1997), considero que esse momento de “avaliação” foi importante para buscar indícios sobre a aprendizagem dos alunos quanto à combinatória e à probabilidade e perceber que esse momento não significa o final do processo, mas o início de outro.

6 SIGNIFICAÇÕES DO TRABALHO REALIZADO

> A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria. (FREIRE, 1996).

Foi na busca de resposta para a questão "O que se evidencia no desenvolvimento do pensamento probabilístico com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental quando este se articula ao desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de um trabalho pedagógico na perspectiva da problematização?" que me envolvi nesta pesquisa e nas considerações que trago agora. Não apresento apenas os achados da pesquisa, mas (re)significações elaboradas na boniteza e na alegria do processo de ensino e de aprendizagem desenvolvido em contexto de sala de aula.

A análise realizada me possibilitou observar que a interpretação dos termos do vocabulário probabilístico não são compartilhadas por todos os alunos. Mas, a partir de um ambiente de aprendizagem em que a comunicação de ideias é permitida, eles desenvolvem um movimento de construção de significações para os termos, chegando a um consenso entre os que são adequados aos contextos.

Os alunos possuem conceitos sobre combinatória e probabilidade, mesmo que espontâneos, mas ao se depararem com uma proposta de ensino problematizadora, articulada à linguagem e a uma cultura de aula de Matemática adequada, são capazes de se envolver em um processo de elaboração conceitual, (re)significando conceitos, chegando a outros mais elaborados.

Os conceitos espontâneos, quando utilizados como ponto de partida no processo de ensino de combinatória e probabilidade, possibilitam que os alunos os (re)signifiquem. Essa ação é importante para o desenvolvimento do pensamento científico, uma vez que os próprios alunos vão coordenando a relação entre seus conceitos e os elementos mediadores, possibilitando o desenvolvimento do pensamento combinatório e probabilístico.

As situações relacionadas à probabilidade são passíveis de equívocos, pois envolvem a interpretação dos enunciados, e muitas vezes as concepções desenvolvidas na vida cotidiana não se aproximam dos conceitos científicos. Assim, a articulação entre os conceitos espontâneos e os científicos no processo de ensino da probabilidade favorece o desenvolvimento de conceitos mais elaborados, evitando também que conceitos equivocados sejam desenvolvidos. Daí a importância de uma cultura social de aula de Matemática

(HIEBERT et al, 1997) que possibilite que essas concepções sejam explicitadas, constituindo um contexto favorável para o professor tomá-las como ponto de partida.

Os conceitos relacionados à combinatória e à probabilidade envolvem significações do "possível" e do "provável", que em diferentes contextos se articulam e em outros não. Dessa forma, não é possível pensar em um processo de ensino estático, sem que haja a comunicação e a circulação de ideias. É necessária uma prática de ensino dialógica (FREIRE, 1983, 1996).

Um ambiente de aprendizagem dialógico nas aulas de Matemática requer do professor uma participação ativa. Por meio desta, ele não apenas tem a intencionalidade de propor tarefas, mas também de promover estratégias de comunicação, reconhecer possibilidades de reflexão nas ações dos alunos, criar espaços de negociação de significados e, a partir deles, proporcionar articulações entre os conceitos e as vivências.

As diferentes concepções probabilísticas apresentadas pelos alunos no desenvolvimento das tarefas são um indicativo da necessidade de um trabalho de ensino que promova a reflexão entre as concepções probabilísticas em diferentes contextos e níveis de ensino. É importante para o aluno do 6º ano do Ensino Fundamental o uso de recursos representativos – objetos manipulativos, esquemas, desenhos, diagrama de árvore, quadro, registros diversos, etc. – para a construção e a significação do espaço amostral, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A tarefa "linguagem Probabilística" se mostrou potencializadora na produção de significações e de articulações entre a combinatória e a probabilidade, quando entrelaçada com os outros componentes mediadores – linguagem e ambiente de aprendizagem. Além disso, o movimento dos conceitos espontâneos e científicos − desencadeado no contexto de sala de aula, no processo de negociação de ideias entre a professora-pesquisadora e os alunos, mediados por elementos da perspectiva histórico-cultural (a palavra, as mediações, as interações, o movimento de significações) − foi fundamental para o desenvolvimento dessas ações.

A referida tarefa também possibilitou observar dados relevantes para o processo de ensino da combinatória e da probabilidade, como:

- A apresentação de diferentes conceitos sobre combinatória e probabilidade e variados níveis de generalização conceitual de alunos do mesmo ano de escolaridade;

- as possibilidades de problematizações desenvolvidas pelos alunos no decorrer do processo;
- a discussão de procedimentos de enumeração e contagem adequados para a situação de análise de possibilidades;
- a estimação das probabilidades a partir da análise das possibilidades;
- o movimento de significações dos termos probabilísticos para os diferentes contextos.

As tarefas "itinerários" e "o problema das cordas" se mostraram potencializadoras no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Possibilitaram que elaborações conceituais em diferentes níveis fossem desenvolvidas nas variadas fases de realização das tarefas.

Os procedimentos de enumeração e contagem e as reflexões (re)elaborados na execução das tarefas da sequência de pesquisa, envolvendo os diferentes problemas de combinatória – existência, enumeração, reconto, classificação, otimização e propriedade dos números combinatórios e manipulação algébrica –, possibilitaram que os alunos desenvolvessem raciocínio e procedimentos adequados aos diferentes problemas.

Ademais, os registros produzidos pelos alunos são recursos importantes para que possam ser feitas generalizações. Isso porque as regularidades podem ser observadas e regras podem ser elaboradas, promovendo, assim, o desenvolvimento do pensamento combinatório.

O uso de procedimentos sistemáticos de enumeração, ou seja, de elaboração de registro das possibilidades de forma organizada, conduz os alunos, diante de problemas de combinatória e probabilidade, às respostas adequadas. A organização dos registros precisa ser construída com os alunos na realização das tarefas para que eles percebam os sentidos dessa ação na prática de resolução de problemas. Novamente se destaca o papel do professor, o quanto ele precisa estar atento ao nível de desenvolvimento conceitual em que os alunos se encontram, criando estratégias que os ajudem a avançar na elaboração conceitual. Nesse sentido, quando percebi que os alunos necessitavam de modelos de organização do espaço amostral, fiz as intervenções, ajudando-os a organizarem seus registros, partindo das sugestões dadas por Valéria.

A produção escrita dos alunos não pode ser considerada apenas como uma forma de registro ou de expressão, mas também deve ser tratada como uma potencialidade na formação de conceitos. Assim, ao me preocupar com essa produção e valorizar as ideias dos alunos, possibilitei que eles se sentissem seguros para compartilhar suas concepções e suas estratégias de resolução das situações propostas.

Os registros produzidos na tarefa “o problema das cordas” possibilitaram que os alunos desenvolvessem conceitos da combinatória a partir da análise de padrões numéricos evidenciando a possibilidade de articulação entre áreas de estudos da Matemática.

As tarefas de combinatória “linguagem probabilística”, “itinerários” e “o problema das cordas” possilitaram que conceitos sobre combinatória e probabilidade fossem elaborados ao ser desenvolvidas. Isso se deu em um processo em que a linguagem e as interações entre professora-pesquisadora e alunos permeavam as problematizações em contexto de situação real de ensino e de aprendizagem.

Considero a proposta de ensino elaborada por Christiansen e Walther (1986) importante para o trabalho na perspectiva histórico-cultural em sala de aula, uma vez que as fases indicadas favorecem a linguagem, possibilitam as interações entre os sujeitos e a sistematização de conceitos e problematizações dessa sistematização. Além disso, possibilita que o professor compreenda o curso de desenvolvimento de conceitos de seus alunos na complexidade da sala de aula.

As situações relacionadas à combinação de vários elementos não constituem tarefa fácil para os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Mas, por meio de um processo de ensino dialógico, os sentidos são desenvolvidos e apropriados pelos alunos na interação e na operação mental, conduzindo-os ao processo de significação.

O professor nesse processo tem um papel importante. É ele que, a partir de um trabalho intencional, organiza as tarefas e o ambiente de aprendizagem e, por meio de uma prática problematizadora, possibilita que conceitos espontâneos e científicos, permeados pela linguagem, se movimentem como uma espiral, desenvolvendo conceitos em níveis mais elaborados.

As respostas dadas pelos alunos nas tarefas sobre probabilidades evidenciaram que a maioria deles consegue perceber as pecularidades presentes em situações que envolvem diferentes conceitos probabilísticos e estimar a probabilidade. As justificativas dadas às respostas indicam que conceitos sobre combinatória estão presentes no ideário dos alunos ao fazer estimativas probabilísticas, assim como palavras do vocabulário probabilístico, significadas na primeira tarefa desenvolvida na pesquisa.

A concepção clássica das probabilidades é muito forte no ideário dos alunos, conduzindos-os, em alguns momentos, a equívocos na estimação das probabilidades, uma vez que consideram o espaço amostral de alguns eventos como equiprováveis, quando não são. Creio que essa problemática ficou em aberto, e uma pesquisa específica sobre essa questão seria importante para o ensino e a aprendizagem da combinatória.

A resposta dada pelos alunos no problema que envolve o conceito lógico das probabilidades apontou dificuldades em sua resolução. Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), o conceito lógico das probabilidades é desenvolvido a partir de uma relação lógica entre o enunciado e as hipóteses, conduzindo o sujeito ao desenvolvimento de generalizações de implicações e contradições disponíveis. Considero que a lógica probabilística, assim como as demais, permeia as situações cotidianas dos alunos. Dessa forma, acredito que uma pesquisa nessa área seja interessante para o desenvolvendo de concepções probabilísticas dos alunos, pois os conceitos de lógica estão relacionados aos demais.

Como afirmado, iniciei esta pesquisa com o objetivo de investigar o que se evidencia no desenvolvimento do pensamento probabilístico com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental quando este se articula ao desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de um trabalho pedagógico na perspectiva da problematização. Compreendo que durante a trajetória escolar os alunos são envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem da combinatória, nesse processo, entre outros fatores, visa-se que os conceitos desenvolvidos sejam articulados aos do ensino e da aprendizagem da probabilidade. No entanto, a forma como são desenvolvidos nem sempre possibilita a aprendizagem com compreensão.

O pensamento por complexo, uma das três fases básicas do desenvolvimento do pensamento científico apresentadas por Vygotsky, evidenciado em diversos momentos da pesquisa, os espontâneos e os científicos são indicativos da importância das interações escolarizadas para o processo de elaboração conceitual.

Considero que, ao articular a combinatória e a probabilidade com elementos mediadores – linguagem, tarefas e ambiente de aprendizagem –, o raciocínio combinatório e o pensamento probabilístico são imbricados por meio de significações, possibilitando a aprendizagem com compreensão. Para que os alunos desenvolvam conceitos sobre probabilidade e consigam adequá-los aos diferentes contextos, é necessário que eles sejam estudados na escola em uma dinâmica adequada. Para que isso ocorra, os conceitos subjetivista, frequentista, lógico, clássico e formal precisam fazer parte do currículo de Matemática da Educação Básica.

Acredito que as considerações apresentadas nesse momento final de pesquisa são relevantes para o processo de ensino e de aprendizagem da combinatória e da probabilidade na Educação Básica. Mas quero ressaltar que a perspectiva histórico-cultural, na qual me orientei para realizar este trabalho, foi fundamental para que os objetivos da pesquisa fossem atingidos.

Da mesma forma como os alunos, também estive envolvida na pesquisa. Desde o início, vi-me em um processo de (re)significações constantes nas questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da combinatória e da probabilidade, no desenvolvimento da pesquisa em contexto real, no duplo papel por mim assumido – professora-pesquisadora –, mas principalmente no processo de elaboração conceitual na perspectiva vygotskyana.

Desde o Magistério, tinha conhecimento das contribuições de Vygotsky no plano educacional; porém, desenvolver, a partir de sua perspectiva, um trabalho nas aulas de Matemática, no qual eu, assim como meus alunos, estaria inserida, não parecia ser possível. Ao realizar estudos mais específicos sobre essa perspectiva teórica, por sugestão da banca de qualificação, percebi que características dessa perspectiva estavam presentes em minha prática docente, como o fato de promover a interação entre os alunos e eu, ao dar “ouvido” ao que diziam, e o de adotar uma prática problematizadora. Dessa forma, também fui envolvida em um processo de elaboração conceitual.

Acredito que o presente trabalho deixou marcas significativas da importância do outro – da professora-pesquisadora e dos alunos – no processo de significação singular e dele e dos elementos mediadores – linguagem, tarefa e ambiente de aprendizagem– no desenvolvimento e no movimento de conceitos. Assim, creio que o potencial da intencionalidade do professor no processo de ensino da Matemática também se evidenciou neste trabalho de pesquisa. Todavia, ressalto que seu desenvolvimento em sala de aula requer certo conhecimento pedagógico por parte do professor. Dessa forma, considero que é um fator relevante a ser discutido nos cursos de formação de professores.

Iniciei a seção com dizeres de Paulo Freire. Novamente recorro a suas palavras, desta vez para encerrar o texto, pois as considero adequadas para este momento.

O homem, como um ser histórico, inserido num permanente movimento de procura, faz e refaz constantemente o seu saber. (FREIRE, 1983).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Adriana. **Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática**: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio. 2010. 166f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática)−Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

BATANERO, Maria Carmen; GODINO, Juan D.; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento combinatório**. Madrid: Síntesis, 1994.

BIGODE, Antonio José Lopes. **Projeto Velear**: matemática. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2012.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sári K. **Investigação qualitativa em Educação.** Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: SEF, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: SEF, 1998.

CHRISTIANSEN, Bent; WALTHER, Gerd. Tarefa e actividade. In: CHRISTIANSEN, Bent; HOWSON, Geoffrey; OTTE, Michael (Org.)**. Perspectives on mathematicseducation.** Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 243-307. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/mestrado-bibliografia.htm>. Acesso em: 6 mar. 2015.

CORACINI, Maria José Rodrigues Faria. **Um fazer persuasivo**: o discurso subjetivo da ciência. Campinas: Pontes, 1991.

D'AMBRÓSIO, Beatriz Silva; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Formação de professores de matemática: professor-pesquisador. **Atos de pesquisa em educação**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 75-85, jan.-abr. 2006.

DELMAS, Robert. Statistical literacy, reasoning, and learning: a commentary. **Journal of Statistics Education**, Alexandria, v. 10, n. 3, 2002. Disponível em:

<http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/delmas_discussion.html>. Acesso em: 07 mar. 2015.

FERNANDES, José Antônio. **Intuições e aprendizagem de probabilidades**: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.o ano de escolaridade. 1999. 461 f. Tese (Doutorado em Educação)−Universidade do Minho, Braga, 1999.

FERNANDES, José; CORREIA, Paulo; ROA, Rafael. Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 13, n. 2, p. 215-242, 2010. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362010000200005&script=sci_arttext>. Acesso em: 07 mar. 2015.

FISCHBEIN, Efraim. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children.** Dordrecht: Reidel, 1975.

FREIRE, Paulo. **Extensão e comunicação**. Tradução Rosiska Darcy de Oliveira. 8. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1983. Disponível em: <http://forumeja.org.br/files/Extensao_ou_Comunicacao1.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2015.

______. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à pratica educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREITAS, Maria Teresa de Assunção. A pesquisa de abordagem histórico-cultural: um espaço educativo de construção de sujeitos. **Teias**, Rio de Janeiro, v. 10, p. 1-12, 2009. Disponível em: <http://www.periodicos.proped.pro.br/index.php/revistateias/article/download/381/362>. Acesso em: 7 jul. 2015.

______. Discutindo sentidos da palavra intervenção na pesquisa histórico-cultural. In: Freitas, Maria Teresa; Ramos, Bruna Sola (Org.). **Fazer pesquisa na abordagem histórico-cultural**: metodologias em construção. Juiz de Fora: Ed. UFJF, 2010.

FRIEDRICH, Janette. **Lev Vigotski**: mediação, aprendizagem e desenvolvimento: uma leitura filosófica e epistemológica. Tradução Anna Rachel Machado e Eliane Gouvêa Lousada. Campinas: Mercado de Letras, 2012.

FONTANA. Roseli A. A elaboração conceitual: a dinâmica das interlocuções na sala de aula. In: SMOLKA, Ana Luíza; GÓES, Maria Cecília (Org.). **A linguagem e o outro no espaço**

escolar: Vygotsky e a construção. Campinas: Papirus, 1993. (Coleção Magistério, formação e trabalho pedagógico)

______. **Mediação pedagógica na sala de aula.** Campinas: Autores Associados, 2005. (Coleção Educação contemporânea)

GAL, Iddo. Towards probability literacy for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: Jones, Graham. (Ed.). **Exploring probability in school**: challenges for teaching and learning. Nova York: Springer, 2005. p. 39-63.

GODINO, Juan; BATANERO, Maria Carmen; CAÑIZARES, Maria José. **Azar y probabilidad.** Madrid: Síntesis, 1996.

GÓES, Maria Cecília. As relações intersubjetivas na construção de conhecimentos. In: GÓES, Maria Cecília; SMOLKA, Ana Luiza. (Ed.), **A significação nos espaços educacionais**: interação social e subjetivação. Campinas: Papirus, 1997. p. 11–28.

GOLDENBERG, Miriam. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de janeiro: Record, 1997.

GÓMEZ-GRANELL, Carmem. A aquisição da Linguagem Matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Liliana. (Org.) **Além da alfabetização fonológica, textual e material.** Tradução Stela Oliveira. São Paulo: Ática, 1996. p. 257-295.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. 2. ed. São Paulo: Paulus, 2008.

GRANDO, Regina Célia; MARCO, Fabiana F. O movimento da resolução de problemas em situações com jogo na produção do conhecimento matemático. In: MENDES, Jaqueline Rodrigues; GRANDO, Regina Célia (Org.). **Múltiplos olhares**: matemática e produção de conhecimento. São Paulo: Musa Editora, 2007. (Musa Educação matemática, v. 3).

GREEN, David**.** A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In: Grey, David. et al (Ed.). In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 1., 1982, Sheffield. **Proceeding**…. Sheffield: University of Sheffield, 1982. p. 766-783.

HAWKINS, Anne; KAPADIA, Ramesh. Children's conceptions of probability: a psychological and pedagogical review. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v.15, n.4, p. 349-377, 1984.

HIEBERT, James et al. **Making sense**: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth: Heinemann, 1997.

IMENES, Luiz; LELLIS, Marcelo. **Matemática:** Imenes & Lellis. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

JULIANELLI, José Roberto; DASSIE, Bruno Alves; LIMA, Mário Luiz Alves. **Curso de combinatória e probabilidade:** aprendendo com a resolução de problemas. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

LOPES, Antonio José (Bigode). **Matemática agora é feita assim**: 7ª séries. São Paulo: FDT, 2000.

LOPES, Celi E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na Educação Infantil**. 2003. 281 f. Tese (Doutorado em Educação)−Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 2003.

______. Reflexões teórico-metodológicas para a Educação estatística. In: LOPES, Celi; CURI, Edda (Org.). **Pesquisas em Educação Matemática**: um encontro entre a teoria e a prática. São Carlos: Pedro e Pontes Editores, 2008. p. 67-86.

LOPES, Celi; COUTINHO, Cileda. Leitura e escrita em Educação Estatística. In: LOPES, Celi; Nacarato, Adair (Org.) **Educação Matemática, leitura e escrita**: armadilhas, utopias e realidades. Campinas: Mercado das Letras, 2009.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACEDO, Lino; PETTY, Ana Lúcia; PASSOS, Norimar. Jogos de Senha. In: ______ (Org.). **Quatro cores, senha e dominó**: oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997. p. 51-92.

MAROCCI, Lia. **O movimento das significações probabilísticas proporcionado pela resolução de problemas e pela prática colaborativa numa turma de 1º ano do ensino**

médio. 2011. 233f. Dissertação (Mestrado em Educação)–Universidade São Francisco, Itatiba, 2011.

MOURA, Manuel et al. A atividade orientadora de Ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. In: MOURA, Manuel Orisvaldo (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber livro, 2010.

NACARATO, Adair; GRANDO, Regina. Aprendizagens compartilhadas a partir do trabalho colaborativo tendo a estocástica como objeto de investigação. In: ______ (Org.). **Estatística e probabilidade na educação básica**: professores narrando suas experiências. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria**. 1994. 652 f. Tesis (Doctorado)−Universidad de Granada, Granada, 1994.

NÚÑEZ, Isauro Beltrán. **Vygotsky, Leontiev, Galperin**: formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009.

OLIVEIRA, Martha. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. 4. ed. São Paulo: Scipione, 2004.

PENHA, Paulo. Mobilizando os alunos do ensino fundamental para o pensamento probabilístico. In: NACARATO, Adair; GRANDO, Regina. **Estatística e probabilidade na educação básica**: professores narrando suas experiências. Campinas: Mercado das Letras, 2013.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **A origem da ideia do acaso na criança**. Tradução Ana Maria Coelho. Rio de Janeiro: Record, 1951.

PONTE, João. Investigar a nossa própria prática. In: GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002. p. 5-28.

POWELL, Arthur; FRANCISCO, John; MAHER, Carolyn. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. Tradução de Antonio Olímpio Junior. **Bolema**, Rio Claro, ano 17, n. 21, p. 81-140, 2004.

RIGON, Algacir et al. O desenvolvimento psíquico e o processo educativo. In: MOURA, Manuel Orisvaldo (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.** Brasília: Liber livro, 2010. p. 45-66.

ROA, Rafael. **Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.** 2000. 184 f. Tese (Doutorado)−Departamento de Didática da Matemática da Universidade de Granada, Universidad de Granada, Granada, 2000.

ROCHA, Cristiane; FERRAZ, Cristiane. **Ensino de problemas combinatórios:** aspectos teóricos e práticos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., Salvador, 2010. **Anais**... Salvador: SBEM, 2010. Disponível em: < http://www.lematec.no-ip.org/CDS/ENEM10/artigos/MC/T2_MC1135.pdf>. Acesso em: 9 mar. 2015.

ROSA, Josélia; MORAES, Silvia; CEDRO, Wellington. As particularidades do pensamento empírico e do pensamento teórico na organização do ensino. In: MOURA, Manuel Orisvaldo (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.** Brasília: Liber livro, 2010. p. 67-80.

SADOVSKY, Patrícia. **O ensino matemático hoje:** enfoques, sentidos e desafios. Tradução Antonio de Paula Danesi. São Paulo: Ática, 2007.

SÁENZ, César C. **Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades**: propuesta de um modelo didáctico. Madrid: Universidad Autônoma de Madrid, 1999.

SANTOS, Jaqueline. **O desenvolvimento do pensamento probabilístico e combinatório no contexto de sala de aula.** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME), Recife, Brasil, 2011. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1468.pdf>. Acesso em: 8 mar. 2015.

______. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.** 2010. 183f. Dissertação (Mestrado em Educação)–Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências matemáticas**: 7ª série. São Paulo: SEE/CENP, 1998.

______. Secretaria da Educação. **Currículo do estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias. Coordenação geral de Maria Inês Fini. Coordenação da área de Nilson José Machado. 1. ed. atual. São Paulo: SEE, 2011.

______. Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do estado de São Paulo: Matemática.** Coordenação de Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008.

SHAUGHNESSY, Michel. Research in probability and statistics: reflections and directions. In: GROUWS, Douglas (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** USA: NCTM, 1992. p. 465-494.

SIRGADO, Angel Pino. O Conceito de mediação semiótica em Vygotsky e seu papel na explicação do psiquismo humano. **Caderno CEDES,** Campinas, n.24, p.38-51, 1991.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Campinas: Papirus, 2008.

SMOLKA, Ana Luiza. Ensinar e significar: as relações de ensino em questão ou das (não)coincidências nas relações de ensino. In: SMOLKA, Ana Luiza; NOGUEIRA, Ana Lúcia (Org.). **Questões de desenvolvimento humano**: práticas e sentidos. Campinas: Mercado de Letras, 2010. p. 107-128.

SMOLKA, Ana Luiza. O (im)próprio e o (im)pertinente na apropriação das práticas sociais. **Caderno CEDES**, ano XX, n. 50, abr. 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v20n50/a03v2050.pdf>. Acesso em: 5 jul. 2015. p. 26-40.

SOUZA, Antonio Carlos. Educadores da infância ensinando combinatória. In: Lopes, Celi Espasandin (Org.). **Os movimentos da educação estatística na escola básica e no ensino superior**. Campinas: Mercado das Letras, 2014. p. 19-38.

SOUZA, Antonio Carlos. **O desenvolvimento profissional de educadoras da infância**: uma aproximação à Educação Estatística. 2013. 220 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática)−Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2013.

VAN DE WALLE, John, A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, Gérard. La teoría de los campos conceptuales. In: FUNDE SUPERIOR. **Artículos de Educación.** Bogotá, 2012. Disponível em:

<http://fundesuperior.org/Articulos/Pedagogia/Teoria_campos_conceptuales.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2015.

VIGOTSKY, Lev. **A construção do pensamento e da linguagem**. Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

______. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

WATSON, Jane M. **Statistical literacy at school**: growth na goals. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2006.

ANEXO A − Linguagem

Tarefa 1 – Linguagem probabilística Considerando os possíveis resultados de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas – em que cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos –, classifique com uma das palavras do quadro abaixo os acontecimentos citados:
Impossível - *pode ser* – *possível* - *bastante provável* - *certo* - *se espera que* – *seguro*- *há alguma possibilidade* - *há alguma probabilidade* - *incerto*
a) A soma ser um número ímpar: b) A soma ser um número menor do que 10: c) A soma ser o número 12: d) A soma ser um número maior do que 0: e) A soma ser o número 0: f) Os colegas apresentarem números de dedos distintos: g) Os colegas apresentarem números de dedos iguais:

ANEXO B – Tarefas de combinatória[59]

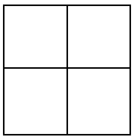
Tarefa 2 – Criação de bandeiras

Temos que escolher as cores de uma bandeira para nossa escola. A bandeira será formada por faixas de cores diferentes, que devem ser escolhidas entre três cores: azul, vermelho e branco. Para decidir qual nós gostamos mais, precisamos desenhar todas as possíveis bandeiras.

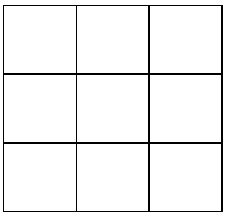
- Quantas bandeiras desenharam? Qual o procedimento que utilizaram para ter certeza de que desenharam todas as bandeiras possíveis, de acordo com as características solicitadas?
- Classifique as bandeiras que vocês desenharam de diferentes modos, por exemplo, segundo a cor da faixa anterior.
- Invente uma maneira de desenhar todas as bandeiras de três faixas utilizando as cores amarelo, branco, vermelho e verde para estar seguro de que não esqueceu nenhuma. As faixas que estão do lado da outra não podem ser da mesma cor.

Tarefa 3 – Quadrados

- Quantos quadrados há na figura 3.1? E na figura 3.2?



3.1



3.2

- Crie um procedimento para estar seguro de que contou corretamente.

Tarefa 4 – Construção de torres

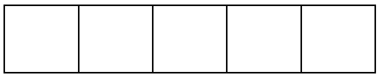
Construa torres encaixando três tiras de cartolina (amarela e azul) uma sobre a outra.

[59] As tarefas de 2 a 10 foram desenvolvidas a partir dos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994). Algumas delas foram adaptadas para o contexto. A tarefa 11 foi retirada da coleção "Experiências Matemáticas: 7ª série", produzida pela Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 1998).

- Quantas torres diferentes podem ser formadas? Registre um procedimento (esquema, desenho, gráfico, etc.) que mostre todas as possibilidades de formação das torres.
- Sem fazer torres com tiras é possível determinar quantas torres diferentes podem ser construídas utilizando quatro tiras? Registre sua ideia.
- Quantas torres de três tiras podem ser construídas com quatro cores diferentes? Justifique sua resposta.

Tarefa 5 – Padrões de cores

a) Tendo uma tira formada por cinco retângulos, podendo cada um ser colorido de branco ou preto, quantas tiras diferentes podem ser feitas utilizando essas duas cores?



b) Alguns dos padrões produzidos são simétricos, como o da figura abaixo:

Quantas formas distintas há para colorir a tira de cinco retângulos com as cores branca e preta, de modo que se obtenha um padrão simétrico?

Tarefa 6 – Prisioneiros

a) Em uma prisão há somente seis celas. Escreva todas as formas em que se podem distribuir dois prisioneiros em cada uma delas.

b) Se há 4 prisioneiros, de quantas formas diferentes você pode organizá-los?

Tarefa 7 – Árvore genealógica[60]

- Observe parte do diagrama de árvore feito por João e construa sua árvore genealógica.

[60]Para realizar essa tarefa os alunos realizaram previamente uma pesquisa com seus familiares sobre os nomes de avós e bisavós paternos e maternos.

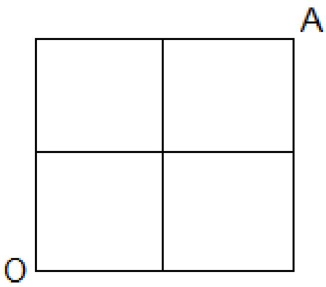
JÚLIO (PAI) ANA (MÃE)

JOÃO

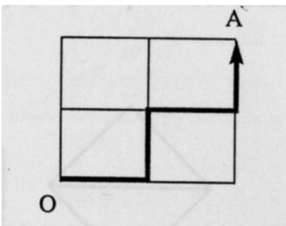
- Observando o diagrama de árvore que produziu é possível saber quantos trisavós (pais dos bisavós) e tetravós (pais dos trisavós) uma pessoa possui?

Tarefa 8 – O problema do táxi

A figura abaixo mostra os diferentes percursos que um táxi pode fazer, em uma “cidade quadriculada”, de O a A.



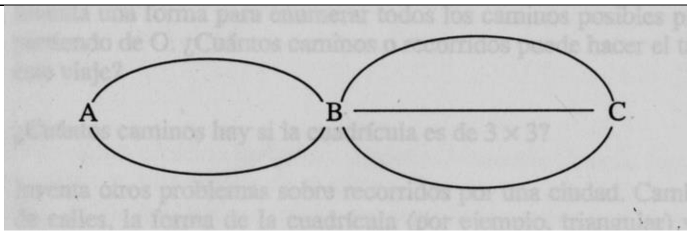
Em todas as ruas só é permitido seguir uma direção e os únicos caminhos a percorrer são a quadrícula da direita e a de cima, como mostra o exemplo a seguir:



- Crie uma forma de numerar todos os caminhos possíveis para chegar a **A** partindo de **O**. Quantos caminhos ou trilhas pode fazer o táxi para chegar a seu destino?
- Quantos caminhos há em um quadrado 3x3?

Tarefa 9 – Itinerários

- Quantos itinerários há para ir de A a C?



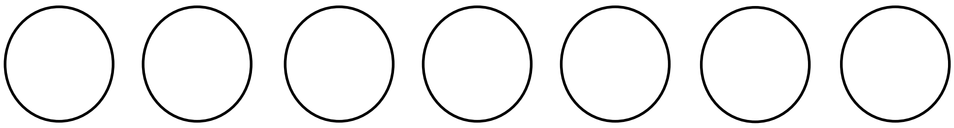
- Quantos itinerários há para ir e para voltar?
- E se não puder ir e voltar pelo mesmo caminho?

<u>Tarefa 10 – Números de telefones</u>

- Quantos números de telefones de quatro algarismos podem ser formados com os dígitos 0 a 9?
- Sabendo que na cidade de Amparo os telefones fixos começam com os prefixos 3807, 3808, 3817, 3839, e que os outros quatros números são formados pelos algarismos de 0 a 9, descubra o número de linhas telefônicas que pode haver em nosso município.

<u>Tarefa 11 – O problema das cordas</u>

Marque nas circunferências abaixo, respectivamente, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 pontos.



- Verifique o número de cordas que podem ser traçadas em cada circunferência, unindo dois pontos.
- Organize os resultados obtidos e faça um registro relacionando os números de pontos e o número de cordas.
- É possível determinar, sem traçar, o número de cordas de uma circunferência com 10 pontos? Justifique sua resposta.

ANEXO C – Jogos de combinatória e probabilidade[61]

<u>Tarefa 12 – Jogo: Senha</u>

Neste jogo são necessários dois participantes, o *desafiante* e o *descobridor*.

Modalidade "ABC" – instruções do jogo

O desafiante escreve, em seu papel, as letras A, B e C em certa ordem, sem que o descobridor veja. Este, por sua vez, deverá escrever em seu papel as letras na ordem que supõe correta. Em seguida, o desafiante compara sua ordem com a do descobridor, informando-lhe – pelos números 0, 1 ou 3, escritos ao lado da sequência proposta por esse jogador – quantas posições acertou. Se acertar a ordem de todas as letras e, portanto, tirar 3, a partida termina. Se tirar 0 ou 1, o descobridor fará uma nova proposta e o desafiante indicará novamente quantas posições acertou. Essa situação prossegue até que o descobridor descubra a senha criada pelo desafiante.

Exemplo:

- CBA são as letras escondidas (senha).

Jogadas	Proposta	Resultado
1	CBA	1
2	BCA	0
3	CAB	3

Situações-problema do jogo senha – modalidade ABC

- O que é melhor o *descobridor* propor na segunda jogada, quando o *desafiante* informa-lhe, pela indicação do resultado 0, que todas as posições das letras em sua primeira jogada estão erradas?

[61](MACEDO; PETTY; PASSOS, 1997, p. 53-58).

- O que é melhor o *descobridor* propor na segunda jogada, quando o *desafiante* informa-lhe, pela indicação do resultado 1, que acertou a posição da letra na primeira jogada?
- Qual dos dois resultados – 0 ou 1 – oferece mais informação para a próxima jogada?
- Enumere todas as combinações possíveis para as três letras na primeira jogada.
- Na primeira jogada, o *descobridor* propõe BAC e é informado pelo *desafiante* que errou a posição de todas as letras (resultado 0). Com essa informação, quantas combinações pode, por antecipação, eliminar na segunda jogada?
- Na primeira jogada o *descobridor* propõe BAC e é informado pelo *desafiante* que acertou apenas uma letra (resultado 1). Com essa informação, quantas combinações pode, por antecipação, eliminar na segunda jogada?

Modalidade "acerte o número" – instruções do jogo

O desafiante esconde um número composto por três algarismos não-repetidos, escolhidos entre os números 1, 2, 3, 4 e 5. O descobridor deverá descobrir o número escondido, escrevendo também números de três algarismos não-repetidos. A cada jogada, receberá duas informações do desafiante: (a) quantos algarismos acertou (1, 2 ou 3) e (b) quantas posições acertou. A partida termina quando o número proposto pelo descobridor coincidir com o número escondido pelo desafiante.

Exemplo:

134 é o número escondido (senha).

Proposta	Algarismos	Posições
521	1	0

453	2	0
342	2	0
134	3	3

Problematização do jogo

- Faça a última aposta levando em conta as informações sobre as posições e os algarismos relativos às duas primeiras jogadas:

Proposta	Algarismos	Posições
123	3	0
312	3	0
	3	3

- Apoiado nas informações contidas no quadro, você acha que a segunda jogada foi a melhor possível? Por que?

Proposta	Algarismos	Posições
435	3	1
543	3	1

- É possível errar todos os algarismos na primeira jogada, ou seja, ter resultado 0 na coluna? Por que?
- O que produz mais informação na coluna algarismos para a segunda jogada?

(   ) acertar um algarismo na primeira jogada.

(   ) acertar dois algarismos na primeira jogada.

Por que?____

- Observe a situação abaixo:

Proposta	Algarismos	Posições
435	3	1

Considerando que são cinco os algarismos possíveis (1, 2, 3, 4 e 5) e que dos três propostos (1, 2 e 3) pelo *descobridor* apenas um está certo, o que se pode concluir sobre os dois números que não entraram na sequência?

Tarefa 13[62] – Jogo "corrida de cavalos"

Instruções do jogo:

- Os números do tabuleiro correspondem aos cavalos.
- Cada jogador pode apostar em três cavalos.
- A aposta pode ser em um único cavalo, em dois ou em três.
- A aposta deve ser registrada sob o(s) número(s) do(s) cavalo(s) escolhido(s).
- O cavalo avança quando a soma dos números extraídos do lançamento de dois dados for igual ao número do cavalo. O avanço é marcado com um x no diagrama em frente ao número obtido.
- Vence o cavalo que primeiro se colocar na linha da chegada.

Tabuleiro: jogo "corrida de cavalos"

CHEGADA													
LARGADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
REGISTRO DAS APOSTAS													

- Registre quantas "casas" cada cavalo avançou no jogo 1 e 2.
- Há algum cavalo que tem mais ou menos chances de vencer que o outro?

[62] Tarefa adaptada de Skovsmose (2008).

Justifique sua resposta.

- O registro feito no tabuleiro ajudou você a fazer uma análise do jogo? Por que?

Tarefa 14[63] - Jogo "lançamento de dardos"

Instruções do jogo:

Cada aluno deve jogar quatro dardos no alvo.

Vocês devem registrar onde os colegas acertaram e os pontos que ganharam: vermelha 200, amarela 100 e preta 50.

- Quais as possibilidades de acerto ao jogar os dardos?
- Onde a maioria dos alunos acertou?
- Qual é a probabilidade do jogador acertar a cor vermelha do alvo? E a amarela? E a preta? Há outras probabilidades?

Tarefa 15[64] – Jogo do lobo mau e da Chapeuzinho

Lobo mau propôs o seguinte jogo para Chapeuzinho Vermelho:

- Cada um lança alternadamente, 10 vezes, uma moeda para cima.

- Se as duas moedas apresentam cara, a Chapeuzinho ganha 1 ponto.

- Caso isso não ocorra, o lobo mau é quem ganha 1 ponto.

Ao final de 10 jogadas, quem obtiver o maior número de pontos ficará com os doces da vovó.

a) Você considera o jogo justo? Justifique.

b) Quem tem mais chances de ficar com os doces? Por que?

c) Então, o que é melhor? Ser a Chapeuzinho ou o lobo mau?

Tarefa 16[65] – Lançamento de moedas: problematização

[63] O jogo de dardos, além de ser um jogo de competição, também é utilizado como passa tempo entre amigos, o que possibilita variações nas regras. De maneira geral, o alvo é pendurado e é estipulada uma distância, a qual é marcada para que os jogadores se posicionem para atirar os dardos. Oficialmente há um valor de pontos que é subtraído de acordo com a pontuação do dardo fixado pelo jogador. Vence aquele que zerar a pontuação. O jogo foi adaptado para o contexto.

[64] Tarefas baseada em Lopes, A. J. (Bigode) (2000).

Se lançarmos uma moeda para cima, qual a face que terá mais chance de sair?

a) cara tem mais possibilidade

b) coroa tem mais possibilidade

c) as chances são as mesmas

d) não sei responder

Por que?____

Tarefa 17[66] – Lançamento de moedas: experimento

a) Façam o lançamento de uma moeda por 5 minutos, registrando quantas caras e coroas saíram.

b) Juntem todos os resultados dos experimentos da classe. O que acontece?

Tarefa 18[67] – Jogo de par ou ímpar

Decida com seu colega quem será par e quem será ímpar.

Em cada jogada vocês irão lançar dois dados e calcular o produto dos números de pontos que aparecem na face superior. Em seguida, registrem na tabela o produto e o resultado, ou seja, indiquem se o número é par ou ímpar.

Ao final de 10 jogadas será vencedor aquele que obtiver mais resultados favoráveis a sua escolha inicial, par ou ímpar.

Exemplo:

Jogada	Pontos obtidos/produto	Resultado (par ou ímpar)
1	2 X 3 = 6	PAR
2	1 X 5 = 5	ÍMPAR
3	⋮	⋮

Tabuleiro para registro: "jogo de par ou ímpar"

Jogada	Pontos obtidos/produto	Resultado
1		
2		

[65] Tarefa adaptada de Celi Lopes (2003).
[66] Tarefa adaptada de Celi Lopes (2003).
[67] Tarefa criada por mim, a partir de tarefas utilizadas na pesquisa de mestrado.

3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

- Quem venceu o jogo?
- Você acha que esse jogo é justo? Por que?
- O que é um jogo justo para você?

ANEXO D − Carta

Carta

Queridos alunos,

Esta etapa do nosso trabalho chegou ao fim. Foi muito bom contar e estar com vocês este ano. A opinião de vocês é muito importante para a pesquisa que realizamos e também para meu trabalho, por isso desejo que escrevam o que gostaram no trabalho, o que não os agradou, o que descobriram, o que ainda não sabiam até estudarmos juntos e outras coisas que queiram me contar.

Beijos e até a próxima,

Professora Jaqueline

ANEXO E – Tarefas de probabilidade

Tarefas sobre probabilidade[68]

1) Vou colocar uma ficha azul e uma amarela em um saco e pedir para você tirar uma sem olhar. Qual você pensa que será mais provável sair?

a) a azul

b) a amarela

c) ambas têm a mesma possibilidade

d) não sei responder

Por que?____

2) E se eu colocar duas fichas azuis dentro do saco e uma amarela; qual é a mais provável que saia?

a) a azul

b) a amarela

c) ambas têm a mesma chance

d) não sei responder

Por que?____

3) Com duas fichas azuis e uma amarela dentro do saco, a probabilidade de tirar uma vermelha:

a) é certa

b) pouco provável

c) impossível

d) não sei responder

Por que?____

4) Uma classe tem 19 alunos. Há 11 meninas e 8 meninos. Se você escrever o nome de cada um dos alunos em um papel, colocá-los em um saco e retirar um nome ao acaso, o que considera que seja mais provável? Assinale, dentre as alternativas abaixo, a que esteja de acordo com seu pensamento:

[68] As tarefas de 1 a 4 foram adaptadas da tese de doutorado de Celi Lopes (2003). A tarefa 5 foi adaptada dos trabalhos de Godino, Batanero e Cañizares (1996).

a) que o nome seja de um menino;

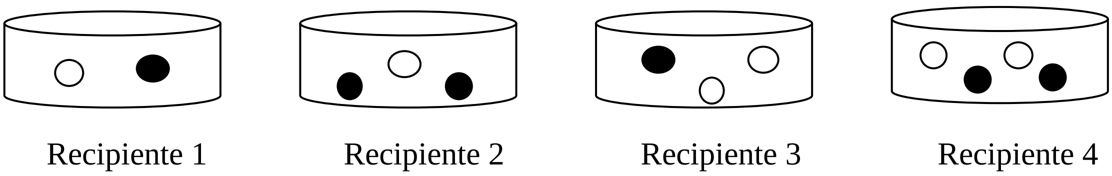
b) que o nome seja de uma menina;

c) a probabilidade de o nome ser de um menino é a mesma de o nome ser de uma menina;

d) não sei responder.

Por que?____

5) Em uma vitrine de uma loja de esportes há alguns recipientes transparentes com bolas brancas e pretas. Veja o desenho abaixo, que representa a vitrine.



a) Suponha que você fosse retirar, sem olhar, uma bola do recipiente 3. Qual a cor de bola que provavelmente você iria retirar? Por que?

b) De qual recipiente seria mais provável retirar (sem olhar) uma bola preta? Justifique sua resposta.

c) Seria mais fácil retirar uma bola branca do recipiente 2 ou do recipiente 1? Explique o porquê de sua resposta.