UNIVERSIDADE SÃO FRANCISCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM EDUCAÇÃO

Linha de Pesquisa:
MATEMÁTICA, CULTURA E PRÁTICAS PEDAGÓGICAS

Jorge Luís Costa

PROVAS E VALIDAÇÕES EM GEOMETRIA EM UM GRUPO DE DIMENSÃO COLABORATIVA

Itatiba
2008

371.399.514 C873p	Costa, Jorge Luís. Provas e validações em geometria em um grupo de dimensão colaborativa / Jorge Luís Costa. -- Itatiba, 2008. 166 p. Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco. Orientação de: Regina Célia Grando 1. Argumentações e provas. 2. Atividades exploratório-investigativas. 3. Geometria dinâmica. I. Grando, Regina Célia. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelas bibliotecárias do Setor de Processamento Técnico da Universidade São Francisco.

COSTA, Jorge Luís. **"Provas e validações em geometria em um grupo de dimensão colaborativa".** Dissertação defendida e aprovada no programa de Pós Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco em primeiro de agosto de 2008 pela Banca examinadora constituida pelos professores:

Profa. Dra. Regina Célia Grando.
Orientadora e Presidente.

Adair Mendes Nacarato

Profa. Dra. Adair Mendes Nacarato
Examinadora.

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica
Examinador.

Jorge Luís Costa

PROVAS E VALIDAÇÕES EM GEOMETRIA EM UM GRUPO DE DIMENSÃO COLABORATIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação *Stricto Sensu* em Educação, da Universidade São Francisco, sob orientação da Profª Drª Regina Célia Grando para obtenção do título de Mestre em Educação, na linha de Pesquisa: Matemática, cultura e práticas pedagógicas

Itatiba
2008

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que nos momentos certos me deu ânimo, serenidade, força e discernimento.

Aos meus pais e avó que compreenderam os momentos de ausência.

A minha esposa Cristina e minha filha Giovanna que compartilharam minhas dificuldades, ausências, atribulações e bagunças, mas que nunca deixaram de me incentivar.

Aos demais familiares que sempre me apoiaram.

A minha orientadora e incentivadora Dra. Regina Célia Grando, que se tornou amiga e companheira, modelo de pesquisadora que consegue balancear razão e sentimento.

Ao professor, mestre e amigo Pedro Mendes que compartilhou horas de conversas que eram entrelaçadas por Matemáticas, Geometria, provas, mas também de descontração.

Aos amigos Ronei, Claudia e Fábio que, além da inspiração acadêmica e incentivo, proporcionaram-me uma segunda casa, cercando-me de carinho e atenção.

Aos amigos Anderson, Andréa e Heitor; Willian e Cláudia; Léo e Andréa; Andréas, Cléia, Mariana e Felipe que durante este período acompanharam todo meu curso e que muitas vezes tiveram suas companhias preteridas pelas as dos livros.

Ao amigo Cláudio Motta que sempre me incentivou, veementemente.

Às Professoras Drª Adair Mendes Nacarato, Drª Alexandrina Monteiro, Drª Jackeline Rodrigues Mendes e Drª Elizabeth Santos Braga e Drª Maria Ângela Borges Salvadori, que contribuíram para minha formação profissional.

Aos queridos colegas e amigos de sala de aula que compartilharam ótimos momentos de apertos e descobertas, principalmente José Eduardo, Viviane Cardim e Amália.

Aos amigos do GRUCOGEO: Paulo Penha, Alice, Olga, Terezinha, Joyce, Henrique, Thiago, Kelly, Carina, Luana, Mirian , Simone, Daniela, Fabiana, Gabriela Renata e Valéria com quem convivi presencialmente durante as reuniões e virtualmente no período da análise e escrita do trabalho e que, durante todo este período, me ensinaram, inspiraram e deram a certeza de que vale a pena investir na educação.

Aos demais interlocutores, pelos diversos diálogos.

Aos colegas das diversas faculdades que compõem a Fundação de Ensino Superior de Passos.

À Fundação de Ensino Superior de Passos, à Universidade do Estado de Minas Gerais e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, que me proporcionaram condições para concluir esta empreitada.

COSTA, Jorge Luís. **Provas e validações em Geometria em um grupo de dimensão colaborativa**. 2008, 164p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós Graduação *Stricto Sensu* em Educação, linha de pesquisa: Matemática, Cultura e Práticas Pedagógicas. Itatiba, São Paulo; Universidade São Francisco.

RESUMO

Nesta pesquisa buscamos investigar os processos de provas e validações em matemática escolar com atividades de investigações geométricas em diferentes mídias, num ambiente de dimensão colaborativa. Tivemos como objetivos (1) analisar os processos de provas e validações em atividades de natureza investigativa, em diferentes mídias, mais especificamente, na utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica; (2)investigar as contribuições para professores e futuros professores de um trabalho de dimensão colaborativa que visa os processos de provas e validações em Geometria; e (3) entender a natureza das provas e validações para o contexto da matemática escolar, seja diretamente relacionado ao aluno ou relacionado à formação do professor.

Os dados analisados foram produzidos a partir dos registros do pesquisador e dos membros do grupo, de audiogravações e videogravações sobre as atividades desenvolvidas no Grupo Colaborativo em Geometria – GRUCOGEO, no período de março de 2006 a junho de 2007. Esta análise considera seis aspectos considerados relevantes: (1) a potencialidade da atividade como incentivadora de formulação de provas (Como as atividades de investigação incentivaram as provas); (2) o uso de diferentes mídias no contexto da Matemática Escolar (Quais mídias foram mobilizadas na atividade?); (3) a aproximação com o “fazer matemático”; (4) a importância do trabalho colaborativo para os participantes na realização da atividade; (5) a dupla dimensão da aprendizagem: para os professores escolares (conhecimento pedagógico) e para os futuros professores (conhecimento como conteúdo escolar); e (6) as provas/validações como mobilizadoras no processo de (re)siginificação do conhecimento no contexto da matemática escolar.

Os resultados da pesquisa evidenciam que os momentos de trabalho em um grupo de dimensão colaborativa tornam-se potencialmente propícios à formação docente, tanto na dimensão da prática docente quanto do conhecimento matemático, e que as atividades exploratório-investigativas associadas ao uso dos programas de Geometria Dinâmica favoreceram a construção de um conhecimento matemático mais significativo, por meio da estruturação de um pensamento argumentativo baseado na experimentação, na análise, na estruturação de provas e/ou validações, no registro escrito, na socialização e na discussão em grupo.

Palavras-chave: Argumentações e provas; Atividades exploratório-investigativas; Geometria Dinâmica.

COSTA, Jorge Luís. **Provas e validações em Geometria em um grupo de dimensão colaborativa**. 2008, 164p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós Graduação *Stricto Sensu* em Educação, linha de pesquisa: Matemática, Cultura e Práticas Pedagógicas. Itatiba, São Paulo; Universidade São Francisco.

ABSTRACT

In this research we sought to investigate the processes of proofs and validations in mathematics education with activities of geometric investigations with different medias in a collaborative dimensions environment. It had as objectives(1) to analyze the procedure of proofs and validations in activities of investigative nature, in different medias, more specifically, in the use of Dynamic Geometry's software, (2) to investigate the contributions to teachers and future teachers of a work with collaborative dimensions that aims the processes of proofs and validations in geometry, and (3) to understand the nature of proofs and validations to the context of school mathematics, or directly related to student or related to the teacher's formation. The analyzed data were produced from the records of the researcher and members of the group, from audio-recordings and video-tapes about the activities performed in the Collaborative Group on Geometry - GRUCOGEO in the period from March 2006 to June 2007. This analysis considers six aspects took as relevant: (1) the potentiality of the activity as stimulant for the formulation of proofs (how the activities of research encouraged the proofs), (2) the use of different media in the context of Scholar Mathematics (Which medias were mobilized in the activity?), (3) the approximation with the "math doing"; (4) the importance of collaborative work for participants in the accomplishment of the activity, (5) the double dimension of learning: for school teachers (pedagogic knowledge) and for future teachers (known as scholar content) and (6) the proofs / validations as mobilizer in the process of (re)meaning of knowledge in the context of school mathematics. The research results show that the moments of work in a group of collaborative dimension become potentially propitious to teacher training, both in the dimension of the teacher's practice, and that the exploratory-investigative activities associated to the use of the programs of Geometry Dynamics encourage the construction of a mathematical knowledge more meaningful through the structuring of an argumentative thinking based on experimentation, in the analysis, in the structuring of proofs and / or validations, on writing record, in the socialization and in the discussion in a group.

Palavras-chave: Proof and proving; exploratory-investigative activities; Dynamic Geometry.

É impossível ser feliz sozinho.

Tom Jobim

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

O INÍCIO DO CAMINHAR

Iniciar o processo de escrita de qualquer trabalho é uma tarefa árdua. Minha opção foi por inserir o leitor no meu contexto, disponibilizando-lhe uma interface com minha formação como profissional, professor e/ou pesquisador, permitindo-lhe entender alguns dos meus pontos de vista e opções para este trabalho.

1 Trajetória

Entre os anos de 1980 e 1983, período em que cursei o ensino médio, era comum entre os jovens que vinham de famílias da consideradas "classe média" [1], a preocupação com uma formação técnica profissionalizante, uma vez que a escola formava para o trabalho.

Em nosso convívio social, raramente ouviam-se comentários sobre cursar uma graduação, pois isto não pertencia ao nosso contexto social e econômico, mesmo se tratando de universidades públicas.

Dentre as diversas opções, escolhi o curso "Técnico de Eletrônica". Nesta área, nossos sonhos eram ir para a ETE – Escola Técnica de Eletrônica, em Santa Rita do Sapucai, MG, o ITA – Instituto Tecnológico da Aeronáutica, em São José dos Campos, SP, e a Escola Técnica do CEFET – Centro Federal de Educação Tecnológica, em Belo Horizonte, MG. Porém tínhamos consciência de que essas escolas sempre possuíram um processo seletivo muito difícil e que nossas chances seriam mínimas, restando-nos as escolas particulares.

A partir do meu ingresso no curso Técnico de Eletrônica, do Colégio Padre Eustáquio, em Belo Horizonte (MG), meu senso pragmático aumentou, pois tudo que víamos no curso era aplicado à área de elétrica/eletrônica. Durante todo o curso, encantava-me a estrutura lógica do raciocínio, a análise dos circuitos eletrônicos, a teoria sempre voltada para a prática, o uso dos aparelhos de medição e as aulas de desenho técnico.

Nesta época, graças a algumas viagens de nosso professor à sua terra natal, a Holanda, e seu retorno com alguns *kits* eletrônicos baseados nos processadores Z80, tivemos o primeiro contato com computadores, que mais pareciam calculadoras rudimentares com seu teclado hexadecimal[2] e um visor de *display* vermelho. Hoje, percebo o quanto estas atitudes de experimentar o novo, até mesmo o desconhecido, deixaram marcas na minha formação. Não

[1] Usaremos esta denominação no seu senso comum, dado àquelas famílias cujo sustento era feito por operários muitas vezes sem formação específica, mas que mantinham certo conforto, como casa própria, carro e em condições de pagar uma escola particular para os filhos.
[2] Teclados que continham número de 0 a 9, as letras A, B, C, D, E e F e mais duas ou três teclas de funções.

posso dizer que isto foi unicamente por causa desse professor, mas posso afirmar, com certeza, que tive nas suas aulas alguns bons exemplos desta postura.

Depois de ter concluído o ensino médio, aproximei-me da área de informática atuando como técnico de manutenção, como programador e consultor de informática.

Em 1989, retornei aos estudos iniciando a licenciatura em Ciências. A escolha pelo curso não foi por aptidão ou vocação, mas por exclusão. Das diversas opções disponíveis na instituição de ensino na minha cidade, Passos, localizada na região sudoeste do estado de Minas Gerais, eu não queria Enfermagem, Engenharia Civil, Pedagogia, História e, assim restou o curso de Licenciatura em Ciências com a possibilidade de, posteriormente, fazer a complementação em Matemática.

No intuito de "aproveitar o tempo", depois de formado na licenciatura curta, em 1999 resolvi fazer a especialização *lato sensu* em **Informática em Educação** na UFLA - Universidade Federal de Lavras, onde pude conhecer um pouco mais sobre a área da educação. As disciplinas estudadas no último ano da licenciatura curta tiveram um "revivamento" e suas importâncias começavam a fazer sentido para mim. Outro item fundamental na minha concepção técnica educacional, foi a apresentação ao universo dos programas gratuitos para computadores com vistas à aplicações educativas.

Em 2000, após terminar a especialização, retornei à faculdade para fazer a complementação da licenciatura em Matemática.

Durante este curso tive a oportunidade de colecionar vários programas gratuitos com aplicações diretas em Matemática e pertencentes às diversas concepções como exercícios de repetição, tutoriais eletrônicos e micromundos[3].

Nessa complementação, a disciplina que mais me trouxe boas recordações do curso técnico e até mesmo do ensino fundamental foi a de **Desenho Geométrico e Geometria Plana**. Novamente me vi empolgado com o uso dos instrumentos (régua, compasso e o computador) e a abordagem lógica presente na Geometria Euclidiana[4], procurando entender porque determinadas construções davam certo e outras não. Era para mim um desafio muito grande resolver seus problemas com uma quantidade limitada de elementos. Como apoio e auxílio à aprendizagem deste conteúdo, tive meu primeiro contato com programas em Geometria: o meu interesse por computador me fez buscar por *softwares* de Geometria

[3] Micromundo são os *softwares* nos quais o aluno não tem direcionamento rígido do tipo ação-reação, como por exemplo, na maioria dos jogos. Suas ações são livres. O resultado que vai obter dependerá da forma como ele explorará o programa.
[4] Todas as vezes que usarmos o termo Geometria, estaremos nos referindo à Geometria Euclidiana.

Dinâmica que pudessem conter os mesmos instrumentos utilizados nas construções geométricas com outros recursos. Os dois mais usados por mim foram:

- o *Isopticon*, "...um programa para desenhar figuras de teoremas da Geometria Euclidiana Plana"[5] e que era usado somente para fazer o desenho das construções;
- o CaR, uma contração para *Compass and Ruler*, e que "basicamente, simula construções com compasso e régua no computador"[6] e que me levou a abandonar o *Isopticon.*

Com a conclusão da graduação em Matemática, fui convidado a pertencer ao corpo docente da Faculdade de Filosofia de Passos, trabalhando em 2002 com as disciplinas de **Introdução à Informática** e **Informática Aplicada à Matemática**, no curso de licenciatura em Matemática.

Em 2002, iniciei uma especialização em **Gestão do Ensino a Distância** na UFJF – Universidade Federal de Juiz de Fora, o que estreitou ainda mais meus laços com a área de educação e, principalmente, com a modalidade de curso a distância.

Porém, o que posso considerar como um marco divisório no meu percurso acadêmico e profissional foi o ingresso no mestrado em Educação na USF – Universidade São Francisco, pois foi nesse ambiente que minhas concepções foram alterando-se e/ou se solidificando.

2 Concepções norteadoras

Durante o meu curso de licenciatura, principalmente no período da complementação em Matemática, era permanente a sensação de insegurança sobre o futuro trabalho como docente. Tanto o domínio do conteúdo quanto a desenvoltura pedagógica deixavam, em minha opinião, a desejar. Sentia uma distância muito grande entre o que estudava e o que iria ensinar. A idéia de que ao final do curso eu estaria "formado professor" chegava a ser angustiante.

Ao assumir a disciplina de **Iniciação à Informática** na faculdade senti-me mais aliviado, pois nesta área possuo um bom domínio técnico. Apesar de ter adotado inicialmente um enfoque operacional, mais voltado à preparação para o uso dos softwares, sentia-me tentado a experimentar outras práticas, como as estudadas superficialmente no curso de **Informática em Educação**.

[5] "…a program to draw figures of theorems of plane Euclidean Geometry" (PAMFILOS, 2004)
[6] "Basically, it simulates compass and ruler constructions on a computer." (GROTHMANN, 2007)

Esta necessidade tornou-se mais evidente quando comecei a lecionar a disciplina **Informática Aplicada à Matemática**, onde optei por trabalhar com Geometria Dinâmica.

Este início, permeado por dúvidas, inseguranças e procuras de alternativas, me conduziu ao mestrado. E neste caminhar, as experiências formaram muitas das minhas crenças permitindo, assim, a construção do meu ideário pedagógico, sobre o qual firmaram-se alguns pilares para a estruturação deste trabalho.

Foi pela sensação de insegurança com os conteúdos específicos e pedagógicos que me vi mobilizado a procurar um aperfeiçoamento no mestrado e assim, fui apresentado a um grupo de estudos que se transformou em meu ambiente de investigação e em referência de formação continuada.

Encontrei nos estudos de vários pesquisadores, pontos em comum sobre a insuficiência da formação inicial do professor para cobrir várias especificidades da profissão sendo, portanto, necessário entender sua formação como um processo contínuo (FREITAS *et al*, 2005; JARAMILLO, FREITAS, NACARATO, 2005; FERREIRA, 2006). Neste sentido, os grupos cooperativos/colaborativos podem tornar-se ambientes fundamentais para os professores e futuros professores, pois nas trocas de experiências e nas discussões seus participantes constroem, compartilham e solidificam conhecimentos.

O grupo onde trabalhamos e pesquisamos é denominado Grupo Colaborativo de Geometria – GRUCOGEO.

Ele foi constituído "em agosto de 2003 com o objetivo inicial de criar um ambiente propício para o desenvolvimento de pesquisa na e sobre a prática pedagógica" (NACARATO *et al*, 2006, p.198). Sua opção de conteúdo matemático foi pela Geometria, utilizando-se da exploração das diversas mídias, incluindo a informática que é um dos nossos interesses de investigação nessa pesquisa.

Ele é constituído por professoras da Universidade, alunos do curso de pós-graduação, professores universitários, professores da rede pública do ensino fundamental e médio, e alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade São Francisco, campus de Itatiba, onde o grupo se reúne semanalmente às segundas-feiras, das 17 às 19 horas.

Podemos entendê-lo como sendo um grupo de dimensão colaborativa, dentro da perspectiva assumida por vários pesquisadores (BOAVIDA E PONTE, 2002; FIORENTINI, 2004; NACARATO, 2005; NACARATO *et al*, 2006), podendo caracterizá-lo como aquele tipo de grupo que "representa uma forma particular de cooperação que envolve trabalho conjuntamente realizado de modo a que os actores envolvidos aprofundem mutuamente o seu conhecimento"(BOAVIDA, PONTE, 2002, p.4).

A participação no grupo é livre: aqueles que participam o fazem por desejo próprio. O GRUCOGEO é reconhecido por seus participantes como um ambiente de aprendizagem onde existem trocas e construção de conhecimento, onde todos contribuem para isto de uma forma muito natural. Além disso, pode-se observar o compromisso dos participantes, sendo comum, mesmo após a reunião, durante a semana, que continuam trabalhando nas atividades ou em questões que não ficaram muito claras para que na próxima reunião o trabalho seja compartilhado. Segundo Fiorentini (2004, p.52-55) voluntariedade, identidade e espontaneidade são características dos grupos colaborativos. Notamos no GRUCOGEO que essas três dimensões são contempladas.

As atividades desenvolvidas no grupo, durante o período de minha participação, eram baseadas em tarefas próximas às que eu vinha tentando implementar em minhas aulas: tarefas exploratório/investigativas.

Consideramos tarefas exploratório/investigativas em uma perspectiva na qual temos uma situação aberta, que permite ao participante

> [...] envolver-se na actividade desde o seu primeiro momento. De igual modo, na elaboração de estratégias, na generalização de resultados, no estabelecimento de relações entre conceitos e áreas da Matemática, na sistematização de idéias e resultados (PONTE *et al*, 2000, p.1).

Diante desse contexto, foi possível evidenciar momentos propícios para a produção e (re)significação de conceitos em Geometria haja vista o envolvimento dos participantes do GRUCOGEO, bem como a dinâmica de discussão e investigação.

No grupo, aquelas atividades, sempre que possível, eram trabalhadas com o suporte de diferentes mídias, como por exemplo, compasso, régua, papel, quadro, palitos e informática. Dentre estas, a informática foi a que mais me chamou a atenção pela sua proximidade com a minha experiência pessoal e profissional .

Alguns autores (VALENTE, 1995; SILVA, MOREIRA, JUNIOR, 2000) utilizam uma classificação do uso do computador na educação baseada em Taylor (1980), onde ele é tido como ferramenta, tutor e tutelado. Nesta perspectiva, nas duas últimas classes, tutor e tutelado, o computador é um agente do processo educativo.

Baseando-me nas experiências como discente e agora como docente, entendo-o mais como um instrumento, uma mídia que pode assumir três funções distintas, mas que se imbricam em determinados momentos.

Na primeira função, temos o computador como uma ferramenta para a produção de materiais, no nosso caso específico, em Matemática. Nesta, podemos produzir textos específicos como apostilas, projetos ou provas, com fórmulas, gráficos e imagens. Portanto, o domínio dos programas de desenho (plotagem) de gráficos a partir de funções, de desenhos geométricos, captura de arquivos da *internet* e a convergência de todos para o programa de edição de texto ou de natureza similar, é fundamental.

Na segunda função, usamos o computador para a aprendizagem matemática. Assim, ao estudarmos determinado assunto, procuramos no computador os recursos complementares que nos permitam compreendê-lo de forma mais clara. É assim que o aluno usa um programa de Geometria Dinâmica para confirmar determinada propriedade geométrica de uma construção, que usa um plotador para traçar o gráfico de uma determinada função para facilitar o entendimento de pontos de máximo e mínimo ou, ainda, que usa um interpretador algébrico no auxilio da resolução de determinados sistemas.

Por fim, na terceira função, pode-se usar o computador para o ensino da matemática. Desta forma, muda-se o olhar para o plano didático/pedagógico e o computador é transformado em ferramenta de apoio. Seus recursos são mobilizados para que determinados conteúdos sejam apresentados e trabalhados pelos alunos nos programas específicos de Matemática, de forma a permitir uma (re)significação e uma construção do conhecimento. Dentro dessa função, não basta o domínio dos programas pelo professor, ele deverá atentar-se para as adequações necessárias das tarefas e dos conteúdos trazendo-os não somente ao nível escolar apropriado, mas também à forma como deverá ser trabalhada no laboratório ou sala de aula. Assim, entendemos o computador como um instrumento de investigação e uma possibilidade de ser uma das mídias favoráveis à produção de argumentações e provas.

A inclusão dessa nova mídia na Educação, e mais especificamente na Educação Matemática, não ocorrerá sem algumas mudanças que abrangem o sistema escolar. Segundo Zulatto (2002)

> [...] é necessário que vários fatores estejam em sintonia: as escolas terão que possuir os suprimentos necessários (máquinas, softwares,...); os professores precisarão de formação adequada, para que não haja apenas ‘troca’ de mídia, transformando o computador num ‘lápis e papel’ mais veloz; há a necessidade de cursos de formação continuada, para que os mesmos possam se atualizar sobre os novos recursos tecnológicos disponíveis, aprendendo a utilizá-los; e também haver suporte para o docente, tanto técnico, no sentido de possibilitar uma manutenção dos laboratórios de Informática, como pedagógico, para que ele possa trocar experiências, discutir sobre suas dificuldades e sentir-se seguro na sala de aula, ao trabalhar com a Informática (p.9).

Como desdobramentos da reflexão sobre o assunto, podemos levantar as seguintes questões:

1. Uma vez disponibilizados os equipamentos (computadores, impressoras etc.), como as escolas públicas poderão adquirir *softwares* específicos para o trabalho dos conteúdos matemáticos?
2. Entendendo que o professor precisa se convencer de que o computador pode ser um aliado para sua prática pedagógica e que, na maioria das vezes, os cursos de capacitação oferecidos pelas Secretarias de Educação são apenas momentos disparadores de um processo de aprendizagem, como esperar que este trabalho seja continuado sem disponibilizar aos professores cópias dos *softwares* usados nos cursos e que serão também usados na escola? Quem custeará esses *softwares*?
3. Uma vez superadas as dificuldades acima e adotada a informática como mais uma mídia educacional, como os alunos poderão usar os programas que estão presentes nas suas aulas fora da escola?

Estas questões levam-nos não somente a uma análise financeira e educacional, mas também ética. Uma das soluções poderia ser encontrada pela cópia ilegal destes *softwares*, e uma outra, que foi a minha opção, foi trabalhar com *softwares* livres, sejam eles no sistema operacional *Windows* ou no *Linux*.

Particularmente, venho defendendo o *software* livre na educação, pois acredito que só por ele poderemos ter uma inclusão digital na escola e nos diversos pontos de acesso da população à informática.

No grupo tive a informação de que o governo do estado de São Paulo disponibilizou em todas as escolas públicas, *kits* com diversos *softwares*, inclusive o *Cabri Géomètre*. Apesar de valorizar a iniciativa não pude privar-me de apresentar ao grupo o *software* gratuito equivalente - o CaR[7] -, uma vez que o fato do aluno e professor terem acesso ao *Cabri*, somente na escola, não garante a possibilidade de continuidade de um trabalho em casa, na empresa ou em *lan house*[8].

Além de todos estes elementos que formam o pano de fundo de minha pesquisa, soma-se outro: o interesse pelo pensamento dedutivo na Geometria.

Em agosto de 2005, iniciamos na Faculdade de Filosofia de Passos um curso de especialização em Matemática do Ensino Médio. Neste, eu lecionei as disciplinas de **Informática Aplicada à Matemática I** e **Informática Aplicada à Matemática II**, sendo que

[7] O site oficial do CaR – Compass and Ruler é http://www.z-u-l.de
[8] Empresas que locam, em suas dependências, computadores para uso pessoal e oferecem alguns outros serviços como acesso à *internet* e impressão.

a segunda foi simultânea à **Introdução à Geometria Plana** ministrada pelo professor Pedro Mendes, doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Esta disciplina teve uma abordagem clássica da Geometria Euclidiana. Durante este período pudemos confirmar a dificuldade dos alunos, a maioria professores atuantes, na abordagem formalista de uma estruturação de argumentações e provas. Novas dúvidas foram agregadas às iniciais e com elas a oportunidade de aprofundar o olhar sobre um tema que relaciona todos os elementos: Geometria, formação do professor, novas metodologias para o ensino da matemática, uso do computador no ensino e aprendizagem da matemática, e as provas e validações na Geometria.

3 A pesquisa

A partir de minha trajetória profissional, bem como de minha inserção no GRUCOGEO, configuramos uma pesquisa de natureza qualitativa que busca investigar os processos de provas e validações em matemática escolar com atividades de investigações geométricas em diferentes mídias, num ambiente de dimensão colaborativa. Entendemos que a mídia computacional mereceu destaque, uma vez que essa pesquisa estava inserida num projeto maior que buscava "investigar em que medida o trabalho colaborativo na Universidade possibilita a produção de saberes docentes e sobre a docência em Geometria, mediado pela utilização de ambientes computacionais" (NACARATO, 2005).

Os objetivos da presente pesquisa são:

1. Analisar os processos de provas e validações em atividades de natureza investigativa, em diferentes mídias, mais especificamente, na utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica;
2. Investigar as contribuições para professores e futuros professores de um trabalho de dimensão colaborativa que visa os processos de provas e validações em Geometria.
3. Entender a natureza das provas e validações para o contexto da matemática escolar, seja diretamente relacionado ao aluno ou relacionado à formação do professor.

Entendemos que o GRUCOGEO assume um papel relevante merecendo ser analisado, uma vez que a dimensão colaborativa existente nele, bem como os aspectos sócio-culturais possibilitam que professores, alunos da graduação e professores universitários se interessem em discutir, por mais de quatro anos, sobre o ensino de Geometria na Educação Básica, os saberes docentes e sobre a docência em Geometria.

Para tanto, estruturamos nosso trabalho trazendo no capítulo 2 uma trama de conceitos, tendências e olhares que fundamentam teoricamente as nossas discussões em relação à aprendizagem em Geometria. No capítulo 3, discutimos a importância das provas matemáticas e como a ampliação do entendimento sobre suas funções pode propiciar sua valorização no ensino da Matemática. No capítulo 4, apresentamos a metodologia de pesquisa e finalmente no capitulo 5, trazemos uma análise dos dados obtidos no entrecruzamento de idéias, informações e teoria.

CAPITULO 1 – CONCEITOS, TENDÊNCIAS E OLHARES EM RELAÇÃO À APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA

Propõe-se nesse capítulo, discutir o ensino da Geometria por meio de reflexões e apropriação de alguns subsídios teóricos que nos orientem e dêem uma (re)significação para a sua aprendizagem.

1.1 Descompasso entre a pesquisa em ensino de Geometria e as práticas em sala de aula

Em vários documentos que orientam a estruturação do currículo escolar, a Geometria aparece como um dos elementos de grande importância. Por exemplo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN do Ensino Fundamental de Matemática, encontramos que

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL, 1998, p. 51)

e nos *Standards* do *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM/USA, esta idéia é reforçada

> A Geometria é uma área natural da matemática para o desenvolvimento das habilidades do raciocínio e da justificação dos estudantes que são construídas através dos anos. Enquanto o estudo dos relacionamentos entre as formas e suas propriedades se torna mais abstrato, os alunos vão compreendendo o papel das definições e dos teoremas e constroem suas próprias provas. (NCTM, 2007) [Tradução feita pelo pesquisador] [9]

Podemos observar que além da preocupação com identificação das "formas geométricas e suas propriedades" existem outros pontos que podem ser desenvolvidos por meio da Geometria: a observação, a estética, estruturação de raciocínio, a argumentação e a prova. Apesar de não podermos garantir que as habilidades desenvolvidas em Geometria possam ser aplicadas diretamente em outras áreas, reconhecemos sua importância.

Ainda que esta importância seja notória, observa-se que o conhecimento geométrico não está sendo apropriado por nossos alunos. Baseando-nos na literatura e na nossa experiência pedagógica, podemos inferir sobre duas vertentes que convergem para este fato.

---

[9] Geometry is a natural area of mathematics for the development of students' reasoning and justification skills that build across the grades. As the study of the relationships among shapes and their properties becomes more abstract, students should come to understand the role of definitions and theorems and be able to construct their own proofs.

A primeira delas diz respeito a pouca importância atribuída à Geometria em relação às outras áreas da Matemática no ensino fundamental e médio.

É senso comum entre os alunos e professores que o ensino de Geometria seja relegado, dando-nos a impressão, conforme escreve o professor Sérgio Lorenzato (NACARATO, PASSOS, 2003, prefácio), de que a Geometria é a "parte da matemática cujo o ensino tem sido boicotado pelos professores".

Este descaso é tido, dentre outros fatores, como conseqüência do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, que se baseou no ensino da Matemática em uma perspectiva de Teoria dos Conjuntos. Apesar de Duarte e Silva (2006), referenciando Soares (2001), escreverem que

> na verdade, mesmo antes da consolidação das idéias da Matemática Moderna no Brasil, certo descaso com relação à geometria já era notado e detectado como um problema, como constatou o professor Omar Catunda, na primeira Conferência Interamericana sobre Educação Matemática que se realizou na Colômbia em 1961. (p.91)

Nacarato e Passos (2003, p.23-32), apontam, ainda, outros fatores que contribuíram para esta situação, como por exemplo, a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º graus (5692/71) que deu ao professor a possibilidade de adaptar o conteúdo segundo a necessidade do público a ser atendido; o término dos cursos de Magistério onde as professoras dos primeiros anos do ensino fundamental recebiam uma formação mais específica e que, segundo a LDB (Lei 9394/96), passou a ser de responsabilidade dos cursos superiores que, muitas vezes, não garantem o tempo suficiente para trabalhar os conteúdos de Geometria.

Apesar deste cenário, a quantidade de pesquisas na área da Geometria tem se mostrado significativa. Tomando como objeto de pesquisa os trabalhos apresentados nos Encontros Nacionais de Educação Matemática – ENEMs, no período de 1997 a 2001, Andrade (2004) destaca que

> os trabalhos em Geometria se mantiveram na média de 20% do total de trabalhos apresentados nos sete encontros. Se distribuíssemos o total de trabalhos publicados nas três áreas do conhecimento matemático – Aritmética, Álgebra e Geometria –, e considerando que existem ainda outras temáticas discutidas no âmbito da Educação Matemática, podemos considerar esse percentual de trabalhos em Geometria extremamente relevante, concluindo-se que, ao menos na esfera da produção, houve um resgate do Ensino de Geometria. (p.15)

Infelizmente, como o próprio pesquisador conclui no seu trabalho, a "Geometria ainda está bastante ausente das salas de aula" (ibidem, p.15).

Este problema, que também é apontado por vários pesquisadores (NACARATO, 2000; PONTE, 2003; CRESCENTI, 2005), foi sentido por mim, como professor-formador, nas aulas da graduação e especialização, corroborando com os resultados de pesquisa feita por Gravina (1996, p.3-5) onde a autora apresenta o resultado de uma avaliação diagnóstica aplicada aos alunos ingressantes no curso de licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, no ano de 1995.

Gravina afirma que

> Constata-se nesta disciplina que os alunos chegam à universidade sem terem atingido os níveis mentais da dedução e do rigor. Raciocínio dedutivo, métodos e generalizações - processos característicos e fundamentais da Geometria- os alunos pouco dominam. Até mesmo apresentam pouca compreensão dos objetos geométricos, confundindo propriedades do desenho com propriedades do objeto. (GRAVINA, 1996, p.2)

Apesar desta afirmação ter mais de 10 anos, continuamos observando na prática de formação a mesma situação.

Vários autores identificam na forma de ensino tradicional uma das maiores causas da dificuldade encontrada pelos alunos. Podemos sintetizar isto nas palavras de Gravina:

> Parte desta problemática tem origem nos programas e práticas de ensino de nossas escolas: é o tratamento estereotipado dados aos objetos geométricos, é a apresentação de demonstrações com argumentos ordenados e prontos. Os livros escolares iniciam com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos (Ibidem).

Assim, o aluno não é levado a construir os conceitos e nem a relacioná-los com os entes e as construções geométricas, interferindo, portanto nas suas imagens mentais (PAIS, 1996, p. 71-70). A associação desenhos, objetos geométricos e conceitos fica de tal forma prejudicada que ele não os identifica em outras situações.

A segunda vertente que acreditamos contribuir para a situação atual do ensino da Geometria é a importância dada a ela pelo aluno. Segundo Charlot (2000),

> Os alunos para quem o saber tem, ao que parece, "um sentido e um valor como tal", são os que conferem um sentido e um valor ao saber objeto sob sua forma substancializada; o que supõe relações de um tipo particular com o mundo, consigo e com os outros. (p. 64)

Ou seja, o aluno pode ter estudado o conteúdo, ter lido, resolvido exercícios e realizado provas, porém a informação não faz sentido para ele. Ele não se relaciona com ela e, por isso, é rapidamente esquecida. Ou mesmo, é possível que o aluno atribua um sentido próprio a um conceito, muito diferente do que aquele que o professor desenvolveu. Assim, a memorização e reprodução em provas e avaliações não garantem a aprendizagem do conceito de forma adequada. Como afirmam Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999)

> Independentemente do que o professor diz, os alunos dão um sentido aos termos e aos conceitos que pode ser muito diferente daquele que o professor lhes atribui. Muitas vezes, o professor não se chega a aperceber dos sentidos

> que os alunos constroem ou só contacta com eles quando surge um erro inesperado ou uma afirmação surpreendente (p. 24).

De toda esta reflexão podemos concluir que os alunos pouco sabem, ou não sabem tanto quanto o necessário em relação aos conteúdos de Geometria. Conforme relata Crescenti (2005):

> Percebemos, assim, que professores atribuíam aos alunos a "culpa" de não aprenderem os conteúdos ensinados e os alunos atribuíam à escola e aos professores a quase ausência – senão a ausência – de alguns tópicos matemáticos relevantes para sua formação. (p.20)

Todo este panorama torna-se mais complexo quando aplicado ao contexto de formação de professores de Matemática, pois se torna uma espiral onde a cada volta a Geometria pode ser colocada mais à margem.

Observemos as falas das graduandas Kelly[10] e Valéria, licenciandas em Matemática, participantes do GRUCOGEO, registradas em trecho da entrevista concedida à Viviane Cardim (2007)[11] em 03 julho de 2006

> Graduanda Kelly. [a aluna completa a fala da entrevistadora quanto a sua formação em geometria] *que não tenho nada! Eu* [...] *sempre estudei em escola pública, desde o prezinho e de geometria não tive quase nada, quase nada!* [...] *No ensino médio, na época era o colegial, voltado para biologia, então não tinha nada, tinha matemática básica, não tinha geometria, não tinha nada disso. No ensino fundamental é o básico né, figuras, nome das figuras e só, o que é um polígono e só.*

> Graduanda Valéria. *Eu também não tenho nada.* [interrompe a fala para pensar] *Eu não me lembro. Eu lembro de ter visto, assim, o quadrado, o retângulo e o losango, e quando eu cheguei aqui* [refere-se ao curso de licenciatura], *que me disseram que um era o outro. Eu não entendi nada. Olha, eu lembro que [...] a gente fez alguma coisa no caderno de desenho, algumas figuras, foi só! Eu não lembro de mais nada, nada, nada, nada.* [No magistério] *No primeiro ano eu lembro que só vi função, aí no segundo acho que ainda tive alguma coisa, ou já virou específica da matemática? Eu acho que foi, mas eu não vi nada, nada, nada.*

Essas falas evidenciam que o abandono do ensino de Geometria também é uma realidade percebida no processo de formação matemática na Educação Básica, principalmente pelas falas das licenciandas do grupo.

[10] Para identificar os sujeitos que participaram das diversas atividades, usarei seu *status* acompanhado pela primeira letra de seu nome.

[11] A pesquisa de Cardim(2007) tem o mesmo ambiente de pesquisa que a nossa e também faz parte do projeto de pesquisa junto ao CNPQ, vinculado ao GRUCOGEO.

Diante de tais situações, faz-se necessário encontrar novas formas de abordar o conteúdo e a própria Geometria, para que, assim, seja possível romper com essa lógica de abandono e, até mesmo, redimensionar e (re)significar seu ensino.

Esta mudança necessita ser também de natureza didático-pedagógica[12] e não acontecerá automaticamente apenas por adotarmos novas mídias, como o computador e/ou o material concreto. As concepções dos professores devem ser condizentes com a intenção de mudança, tentando criar as estratégias necessárias para mobilizar[13] os alunos.

Assim, podemos considerar que as atividades exploratório-investigativas, nas quais nos deteremos adiante, são tendências no ensino da Geometria. Elas se destacam por atuarem numa perspectiva significativa para o aluno e que, ao mesmo tempo possibilita a ele "colocar-se em movimento intelectual" (Charlot, 2007).

1.2 Tarefas exploratório-investigativas

Reconhecemos que o fazer pedagógico dos professores são permeados por suas concepções de aprendizagem, de ensino e de Matemática.

Além disso, compartilhamos com Ponte (2003) o entendimento de que a aprendizagem escolar da Matemática,

> é o desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando idéias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo.(p. 3)

Cabe ao professor tentar mobilizar recursos didáticos, estratégias e metodologias que permitam envolver o aluno de tal forma que este mobilize ao máximo seus conhecimentos.

Para que isto aconteça, são necessárias tarefas que extrapolem as do tipo "resolva" ou "calcule", ou seja, que tenham uma abordagem mais aberta.

Dentro desta perspectiva encontramos as atividades exploratório-investigativas[14], que podem ser definidas por aquelas que têm estrutura aberta, contextualizadas por uma situação matemática. Em alguns casos são apresentadas perguntas, não totalmente definidas (PONTE,

[12] Entendemos por mudanças de natureza didático-pedagógica aquelas nas quais estão envolvidos aspectos metodológicos, filosóficos, ideológicos e epistemológicos.
[13] Vamos nos apropriar do sentido atribuído por Charlot (2000): "mobilizar é pôr em movimento; mobilizar-se é pôr-se em movimento"(p.54).
[14] Adotamos esta nomenclatura por compartilharmos com Fernandes, Fiorentini e Cristóvão (2006) que afirmam que "há atividades que, apesar de apresentarem um caráter exploratório, propiciam também o aparecimento de questões investigativas" (p. 229).

2003), mas que representam orientação para a exploração-investigação. A solução ou soluções não devem ser "imediatamente acessíveis, ao aluno" (OLIVEIRA, SEGURADO, PONTE, 1999, p.2). Durante o processo de exploração/investigação, os participantes, levantam várias conjecturas que depois de testadas ou "perante contra-exemplos, poderão ser desde logo abandonadas. Outras, sem se revelarem inteiramente correctas, poderão ser aperfeiçoadas" (PONTE, 2003, p.2). Neste processo de busca, novas questões podem ser levantadas gerando, assim, um novo ciclo. Após todo este processo, as idéias são registradas e apresentadas para o grupo no qual o participante, ou seu grupo, estão inseridos.

Pretende-se com este tipo de tarefa aproximar o aluno do "fazer matemática" do matemático, resguardando as devidas proporções e, com isto, mostrar-lhe que a matemática é uma ciência que extrapola "um corpo de conhecimento construído dedutiva e cumulativamente, com rigor absoluto" (FONSECA, BRUNHEIRA, PONTE, 1999, p. 2), ou seja, que a partir de um problema, da criação de perguntas sobre este problema, de levantamento de hipóteses, das experimentações para aceitá-las ou refutá-las, da estruturação do resultado por meio de argumentações lógicas, da comunicação as seus pares e por fim, da validação deste resultado, o aluno estará mobilizando todo um conjunto de conhecimentos que possibilitará a produção de outros.

Assim como Ponte (2003) destaca que este tipo de tarefa atende as diretrizes do NCTM e dos currículos oficiais de vários países, podemos afirmar que o mesmo acontece com relação aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio.

Nos PCN de Matemática do ensino fundamental, encontramos que

> A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.
>
> Esta visão opõe-se àquela presente na maioria da sociedade e na escola que considera a Matemática como um corpo de conhecimento imutável e verdadeiro, que deve ser assimilado pelo aluno (BRASIL, 1998, p.24).

Nos PCN de Matemática do ensino médio encontramos que

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (BRASIL, 2000, p.40).

Vários autores (PONTE, BROCADO, OLIVEIRA, 2005; PONTE, 2003; ABRANTES, 1999; OLIVEIRA *et al*, 1999) apresentam uma estrutura similar para a implementação de uma atividade exploratório-investigativa e que se resume em: (1) introdução da tarefa, onde ela é apresentada e tem suas dúvidas iniciais discutidas; (2) o desenvolvimento, etapa em que é executado o trabalho na tarefa com as explorações, criação de novas questões, formulação e experimentação de conjecturas e estruturação de justificativas e (3) o encerramento, com as discussões em grupo, as validações e sistematizações finais. Entendemos que essas orientações não podem ser consideradas como "receitas" para a resolução de uma tarefa, mas que os diferentes momentos de investigação, prova e validação podem ocorrer no grupo da forma como o professor considerar mais apropriado.

Consideramos necessário fazer, neste momento, uma distinção entre os termos "tarefa" e "atividade" e a relação existente entre eles. Recorrendo ao dicionário encontramos "tarefa" como sendo "Obra ou porção de trabalho que tem de ser concluído num determinado prazo." (DIC MICHAELIS), portanto assumindo o sentido de "algo proposto a alguém", enquanto que para "atividade" encontramos "Ocupação a que se dedica uma pessoa: Homem de muita a." (DIC MICHAELIS), portanto trazendo-nos a idéia de "ação sendo desenvolvida".

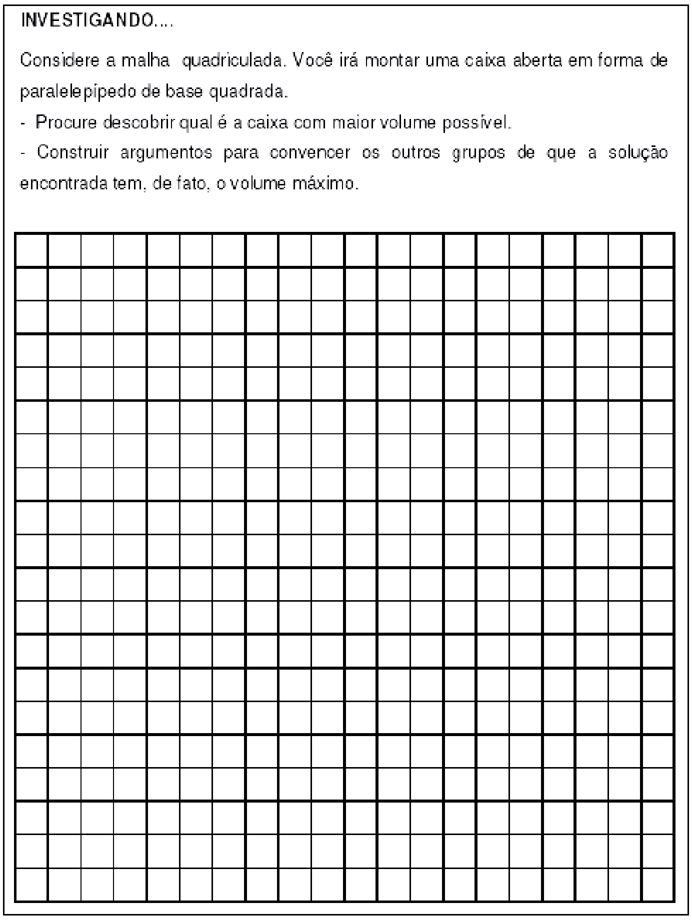
Encontramos estes mesmos sentidos atribuídos por Ponte *et al* (1997)

> As tarefas são, na maior parte das vezes, propostas pelo professor; mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a actividades muito diversas (ou a nenhuma actividade), conforme a disposição do aluno e o ambiente de aprendizagem da sala de aula. (p.73-74)

Em nossa pesquisa usaremos com maior freqüência o termo atividade, pois este assume um sentido de "tarefa que foi executada" ou que "colocou os alunos em ação".

Para exemplificar como as tarefas vêm sendo propostas no ambiente do GRUCOGEO bem como o movimento atribuído a elas pelos participantes, vamos recorrer a uma das atividades desenvolvidas. Esta tarefa foi proposta ao grupo pela professora formadora Adair, embora tenha sido sugerida pela professora Olga, também pertencente ao grupo.

Para sua introdução, foi distribuída uma folha com a proposta da tarefa, que era construir uma caixa aberta, em forma de paralelepípedo, usando uma área de 20 x 20 unidades, representada por uma malha quadriculada, e que estava, também, nesta folha, conforme mostrado na figura 1.1. Essa malha quadriculada poderia ser manipulada (cortada, dobrada ou colorida) pelos participantes da forma que eles achassem melhor. Foi realizada a leitura e discussão das dúvidas iniciais.



INVESTIGANDO....

Considere a malha quadriculada. Você irá montar uma caixa aberta em forma de paralelepípedo de base quadrada.

- Procure descobrir qual é a caixa com maior volume possível.
- Construir argumentos para convencer os outros grupos de que a solução encontrada tem, de fato, o volume máximo.

Figura 1.1: Orientação da tarefa da caixa

A atividade foi desenvolvida em grupo. Estávamos todos ao redor de um conjunto de mesas de forma que podíamos trocar informações com qualquer participante sem muita dificuldade.

No desenvolvimento, cada participante foi criando e testando suas hipóteses iniciais. À medida que isto acontecia, novas dúvidas quanto às condições de execução da tarefa foram aparecendo, sendo discutidas e negociadas.

A cada configuração de caixa apresentada, eram anotadas as informações da base, altura e volume da caixa. A primeira hipótese veio do graduando Henrique que propôs a configuração de 18x18x1[15], obtendo-se um volume de 324 u^2, baseando seu raciocínio numa área máxima para a base. Uma segunda configuração foi sugerida pela graduanda Kelly: 12x12x4, obtendo-se um volume de 576 u^2. Neste processo, foram sendo consideradas outras sugestões e novas dúvidas foram discutidas: “Podemos fazer qualquer configuração?”; “Podemos dividir os quadrinhos?”; “Uma aba pode ser menor que a outra?”. Foi feita uma nova leitura e foram elencadas as condições básicas da atividade.

[15] Esta notação refere-se a uma base quadrada de 18x18 unidades (quadrinhos) e uma altura de 1 unidade (quadrinho).

As regularidades foram discutidas e quando a estratégia não era compreendida por alguém, quem a propôs tinha que explicá-la. Por exemplo, o graduando Henrique, observa que poderia se usar a diagonal da base como referência. Como esta proposta não foi entendida, ele teve que explicá-la para o grupo simulando a construção na malha quadriculada. Pudemos observar que naqueles momentos, a negociação de idéias e a argumentação foram imprescindíveis para a resolução do problema. A discussão reproduzida a seguir evidencia esse fato:

> ***Formadora Adair:*** *Então a medida do lado do quadrado tem que ser um número par...*
>
> ***Formadora Regina:*** [falando para graduanda Kelly] *Ai vai formar paralelepípedo?* [...] *Se um for um lado com a aba maior que a outra eu posso montar um paralelepípedo?*
>
> ***Graduanda Kelly:*** *Não...*
>
> ***Formadora Regina:*** *Mas por que não?*
>
> ***Graduanda Kelly:*** *Por que o paralelepípedo tem lados paralelos* [...] *faces paralelas.* [...]
>
> ***Graduando Henrique:*** *Isto por que você esta se pegando aos cálculos.* [...] *Mas agora se você pegar no visual dela, você pode considerar a diagonal dela. Se se pegar no visual...*
>
> ***Formadora Adair:*** *Como assim?*
>
> ***Graduando Henrique:*** *Não... Se a pessoa... ela não tem nada pra calcular... ela vai se prender no visual... Aqui* [mostrando na malha] *em vez dela falar "vai ser par", ela vai se prender na diagonal, por causa, que aqui ela [mostrando a diagonal da malha] vou ter 18 por 18, 16, 14...*
>
> ***Formadora Regina:*** *Ah, entendi... Entendi o que ele quis dizer.*
>
> *Nossa, muito legal... É... Como é que eu sei que só dá quantidades pares? Porque na verdade, ele vai olhar pra diagonal: "Por que é 18? Porque eu tirei 2, um de cada lado.". Daí o próximo tenho que tirar 4. Ai o próximo, tenho que tirar 6...*
>
> [...]
>
> *Então se a gente tiver fazendo uma análise desta condição que eu falei de ser par* [...] *se eu fizer esta mesma análise só pelo aspecto geométrico, e não por ele* [...] *pelo número ser par ou impar, eu poderia tomar a referência pela diagonal.*
>
> ***Graduanda Kelly:*** *Como você enxergou Henrique? Eu não consigo enxergar... Pela diagonal?*
>
> [O graduando Henrique mostra para graduanda Kelly na malha]
>
> [...]
>
> ***Formadora Regina:*** *Na verdade, eu construo, é a coisa da moldura* [exemplifica com as mãos a moldura]. [Transcrição da vídeo-gravação]

Na continuidade da atividade, foram comuns várias “configurações de caixa”. Uma sempre refutada por outra, seja diante de novas estruturas, novos questionamentos ou novas interpretações do problema.

> ***Formadora Regina:*** *O máximo, na verdade foi 14x14x3? Por quê?* [...] *Por quê é o máximo?* [...]
>
> ***Graduanda Kelly:*** *Sabia que a Regina ...* [risos, fazendo referência à “mania de ‘por quê?’ da formadora Regina”]
>
> [...]
>
> ***Formadora Adair:*** *E ai gente? Vocês não me convenceram.* [...]
>
> *Só que vocês não me convencem que este é o maior volume... Eu acho que tem um volume maior.*[...]
>
> ***Professora Mirian:*** *Estão sobrando 36 quadrinhos...*[...] *Dentro da área...*
>
> ***Formadora Regina:*** *Por quê tá sobrando 36?! Esses aqui que você está falando?* [mostrando na malha]
>
> [...]
>
> ***Professora Mirian:*** *Com estes 36 que estão sobrando eu poderia aumentar na altura.*
>
> ***Formadora Adair:*** *Está escrito no enunciado que é pra cortar o cantinho e jogar fora? Vocês entenderam a pergunta da Mírian? Quer dizer, se eu descarto 3 daqui e 3 daqui dá 9, 9, 9 e 9 tá descartando 36 quadradinhos. Estou jogando fora. Eu não tenho mais a área de superfície de 400, eu vou ter uma área de 364.*
>
> *A pergunta da Mírian é esta: é possível pegar estes 36 quadrinhos aqui e acrescentar na altura?* [...]
>
> ***Formadora Regina:*** *Ai eu vou precisar saber o perímetro da caixa... Quanto é o perímetro daí?*
>
> ***Professor Paulo:*** *14 vez 4, 56...*
>
> ***Professora Adair:*** *Perímetro por quê?*
>
> ***Formadora Regina:*** *Por que você vai acrescentar um quadrinho a mais, não é?*
>
> ***Professora Mirian:*** *Um quadrado na altura*
>
> ***Formadora Regina:*** *Não é suficiente pra aumentar a altura. Então vai ter que fracionar obrigatoriamente o quadradinho. Entendeu Adair?* [referindo-se à formadora Adair]. [...]
>
> *Então sem fracionar o quadrado este deve ser o de maior volume mesmo* [referindo-se à configuração 14x14x3].
>
> [...]
>
> *Bom... E se nós sairmos deste material... E não for mais a malha quadriculada, se ela for milimetrada ou se ela não for nada e eu for trabalhar ai com todas as possibilidades...*

O quê que a gente já percebeu? Até onde vai aumentar? Até o 14, não é isto? Até o 14 tá crescendo [...] *Será que no intervalo de 14 a 12 não haveria um volume maior? Experimentem...*

Formadora Adair: *Aí considerando o fracionário?!*

Formadora Regina: *Isso!*

Pós-graduando Jorge: *Qual foi a relação que achou?* [...] *Se diminui 2 no lado, você aumenta 1 na altura? Tinha achado uma relação.*

Formadora Regina: *Isso!* [...]

Pós-graduando Jorge: *Então o 14x14x3*

Formadora Regina: *Dá o 588, já o 12x12x4 dá 576.* [...] *Minha pergunta é: será que o 14 realmente é o máximo?*

[Continuaram com os cálculos dos fracionários]

Pós-graduando Jorge: *Tem calculadora? Tenta ai: 12x12x4*

Professor Paulo: *12x12x4, vai dar 576*

Pós-graduando Jorge: *Vão sobrar 64 quadrinhos. [...]*

Formadora Adair: *Ah tá! Você está pensando no inteiro... Tudo bem...*

Pós-graduando Jorge: *Você subtrai isso, vai conseguir colocar mais um na altura. Isso?*

Professor Paulo: *Vai dar 5 aí. E sobra ainda...*

Pós-graduando Jorge: *Sobram 16.*

Professor Paulo: *12x12x5. 720. Ah... [...]*

Formadora Regina: *Então espera ai: 12x12x4 dá 576 [...] vai me sobrar 64 quadradinhos [...]*

Formadora Adair: *Então eu consigo aumentar um de altura[...] aumento uma fileira na altura. [...] Então eu passo a ter 12x12x5 que vai dar isso.*

Formadora Regina: *E como é que você tem certeza que não tem nenhum maior?*

Graduando Henrique: *Pensando em 10x10x5*

Formadora Regina: *10x10x5... 10x10x5 é... 10... 100 quadradinhos, [...] 40 ... 80... já subiu 2 dá 10x10x7 ... 10x10x7 dá menor.* [fazendo referência a um volume de 700] [Transcrição da vídeo-gravação]

Neste ambiente investigativo as respostas à questão inicial assumiam o *status* de “verdade provisória” (LOPES, 1990, 1999) podendo ser refutada a qualquer momento por um contra-exemplo.

O uso da mídia “papel quadriculado”, como recurso didático, foi fundamental na parte inicial da atividade, quando estávamos ainda entendendo sua lógica e estruturando um raciocínio que resolvesse a situação-problema.

Ainda durante seu desenvolvimento, tivemos a oportunidade de discutir a aplicabilidade desta tarefa segundo o nível da turma, podendo-se trabalhar o volume de forma mais simples, o volume com o aproveitamento parcial dos quadradinhos recortados conforme o relato acima, com o aproveitamento total fracionando os quadrinhos ou ainda, trabalhando com os números racionais.

Continuamos a atividade trabalhando dentro deste último universo, o dos números racionais. E, por experimentação, chegamos a valores de intervalos cada vez menores. Pode-se acompanhá-los pelo quadro a seguir.

Tentativas	**Configurações testadas**	**Observações**
1	1) 10x10x5=500 2) 12x12x4=576 3) 14x14x3=588 4) 16x16x2=512	Pudemos afirmar que a melhor configuração estava entre a configuração 3 e 2
2	1) 13x13x3,5=591,5	Com esta tentativa , pudemos afirmar que a melhor configuração estava entre 13x13x3,5=591,5 e 14x14x3=588.
3	1) 13,5x13,5x3,25=592,3125	Com esta tentativa, pudemos afirmar que a melhor configuração estava entre 13,5x13,5x3,25=592,3125 e 13x13x3,5=591,5.
4	1) 13,3x13,3x3,35=592,5815	Com esta tentativa, pudemos afirmar que a melhor configuração estava entre 13,3x13,3x3,35=592,5815 e 13,5x13,5x3,25=592,3125.
5	1) 13,33x13,33x3,335=592,5924815	Com esta tentativa, pudemos afirmar que a melhor configuração estava entre 13,33x13,33x3,335=592,5924815 e 13,3x13,3x3,35=592,5815.

A professora formadora Adair chamou a atenção para a tendência apresentada para o valor do lado da base da caixa na 5ª tentativa, 13,33 (treze inteiros e trinta e três centésimos), indicando uma dízima e, por isso, ela sugeriu que passemos a trabalhar com frações, relembrando com o grupo como fazer esta conversão.

Encerrada a fase dos trabalhos com as tentativas com valores, passou-se para a etapa final: a formalização matemática.

Os participantes passaram para a dedução de uma fórmula geral que atendesse a todos os nossos experimentos anteriores. Na finalização desta etapa, chegou-se a duas funções:

Função 1	**Função 2**
$f(n) = n^2 \times \left(\frac{20-n}{2}\right)$ Para 20>n>0 Onde *n* é o valor do lado da base da caixa	$f(x) = (20-2x)^2 \times (10-x)$ Onde *x* é o valor do lado da base da caixa

Ambas foram apresentadas ao grupo, que reconheceu na primeira uma maior proximidade com o raciocínio usado durante a atividade.

A partir dela foram feitas novas discussões de como chegar ao resultado de volume máximo. Nesta discussão, foram relembrados conceitos de máximo e mínimo de uma função, derivada e cálculo de raízes de função do segundo grau. O professor Paulo estava com sua calculadora gráfica e mostrou para o grupo como usá-la para gerar o gráfico da função.

A descrição dessa atividade auxilia-nos a refletir sobre as características das atividades exploratório/investigativas, seu potencial de mobilização e as formas de produção de conhecimento matemático possibilitadas por elas. Inicialmente o grupo discutiu a proposta da tarefa procurando entender os detalhes para sua execução. As primeiras explorações foram no papel quadriculado levantando várias configurações das caixas até encontrar a de maior volume dentro deste domínio. Em seguida, saiu-se do limite imposto pelo papel quadriculado passando-se a fazer as experimentações no domínio dos números reais até achar, novamente, o maior volume. Baseado nessas experimentações passou-se para a generalização, sendo que as propostas apresentadas traziam as particularidades do seu proponente. Estas propostas foram discutidas pelo grupo, sendo selecionada aquela que mais se aproximou da estratégia adotada por ele nas experimentações. Com a generalização, o grupo passa a discutir, criar estratégias e chega a uma validação do resultado obtido na experimentação. Puderam-se observar nesta curta descrição, as etapas propostas para as tarefas exploratório/investigativas sendo desenvolvidas de maneira não linear.

Além disso, exemplificou-se o movimento interno em um grupo de dimensão colaborativa com a participação voluntária dos integrantes que, trabalhando num processo cooperativo, aprofundam o seu conhecimento matemático e, portanto, podendo ser considerado um potencial espaço de formação continuada.

Segundo o relato apresentado acima, podemos encontrar fortes semelhanças entre este ambiente e a caracterização feita por Lopes (1999, p.21) do "ambiente de inspiração lakatosiana", baseando-se em estudos da obra de Inre Lakatos "A lógica do descobrimento matemático. Provas e refutações". Dentre várias características desse ambiente, podemos citar:

(a) a facilitação do processo de criar conjecturas;

(b) a estimulação à geração de provas e refutações;

(c) a possibilidade do desenvolvimento de postura flexível, tanto nas certezas quanto nas incertezas;

(d) o incentivo ao desenvolvimento de pensamento lógico-dedutivo;

(e) a possibilidade da construção de um conhecimento novo;

(f) o trabalho com situações que se adaptem aos níveis de conhecimento dos participantes.

Esse ambiente possibilita ainda a mudança do *status* da Matemática Escolar, conforme comentado anteriormente, de uma ciência pronta, acabada, "esquelizada e fossilizada" (DAVIS, HERSH,1985, p. 388) , em algo vivo, dinâmico, que é construído "a partir de um problema e uma conjectura, com uma teoria adquirindo forma sob nossos olhos, no calor do debate e da discordância, a dúvida cedendo lugar à certeza e em seguida a novas dúvidas" (ibidem).

Podemos dizer que a manipulação da malha quadriculada, no início dessa atividade foi fundamental. A partir dela se desenvolveu e estruturou todo o raciocínio que permitiu uma mudança de domínios dos números naturais para os reais sem a perda de sentido para a resolução da situação-problema proposta.

Por isso, dedicaremos o próximo tópico à relação entre os elementos que podem dar este suporte ao pensamento matemático no processo de ensino e aprendizagem.

1.3 Mídias: elementos de suporte ao pensamento matemático

O termo mídia normalmente é entendido como um suporte ou meio para uma mensagem. Daí, a encontrarmos associadas aos meios de comunicação, como por exemplo, a televisão, rádio ou Internet.

Porém, em nossa pesquisa, vamos assumir o termo mídia no mesmo sentido atribuído por Benedetti (2003, p.11), ou seja, como algo que vai além da simples idéia de suporte. Vamos incorporar ao seu universo os elementos materiais (concretos) que estão à nossa volta, tais como os materiais didáticos (calculadora, materiais manipulativos, papel, caneta, compasso, régua, computador, programas de informática etc) e os elementos mais sutis, como a oralidade e a escrita.

Precisamos, ainda, afirmar que comungamos com a opinião de Borba e Vilarreal (2005) e Borba e Penteado (2005) na qual eles afirmam que formamos um “coletivo pensante” transformando-nos assim em “seres humanos-com-mídia” e que nossos pensamentos são reorganizados a partir desta interação. Esta visão diferencia-se da que as mídias são meros instrumentos ou ferramentas que usamos para expressar nossas idéias ou que nos auxiliam no entendimento de algo novo. O pensar como um coletivo (humanos-com-mídias) implica em incluir a mídia como um recurso, um elemento “do pensar” capaz de mudar a forma como criamos o conhecimento.

Vamos recorrer novamente à atividade da caixa para exemplificar nossa posição. Vimos que iniciamos com a mídia papel (com o papel quadriculado), passamos para o papel, lápis e calculadora (usada para testar as várias configurações) e no final o professor Paulo mostra ao grupo a calculadora gráfica. Poderíamos ainda agregar outras mídias como, por exemplo, o computador e um programa de “plotagem” gráfica, onde poderíamos analisar o gráfico das funções, construir tabelas e continuar a discussão daquelas representações dentro do contexto.

Esta nova mídia provavelmente nos permitiria fazer outros apontamentos, tecer outras reflexões e gerar novos conhecimentos. Nos exemplos das figuras 1.2 e 1.3, a seguir, temos as telas do programa *Graph*[16], com as duas funções criadas na atividade com seus gráficos, a derivada primeira e a tabela. Com a disponibilização dessas informações, fazem-se necessárias novas habilidades interpretativas como, por exemplo, a leitura da tabela e a identificação do valor que seja significativo para o contexto, e o reconhecimento, na curva da função e de sua derivada primeira, dos pontos que são solução para o problema. Não basta,

[16] O programa Graph foi desenvolvido pelo engenheiro dinamarquês Ivan Johansen, é distribuido gratuitamente no site http://www.padowan.dk/graph

portanto saber operar o programa, é necessário entender e dar significados aos resultados apresentados por ele.

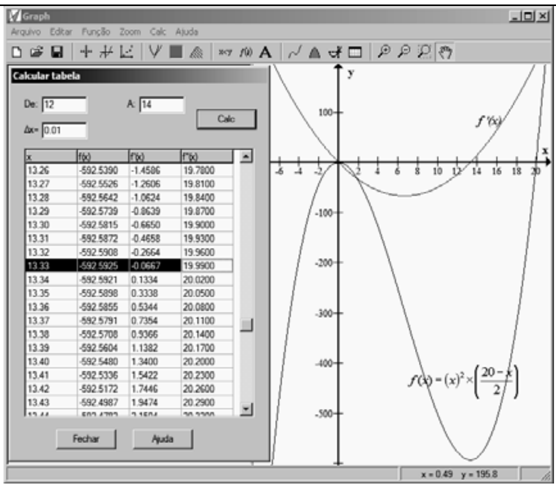


Figura 1.2: Tela do Graph com informações sobre a Função 1

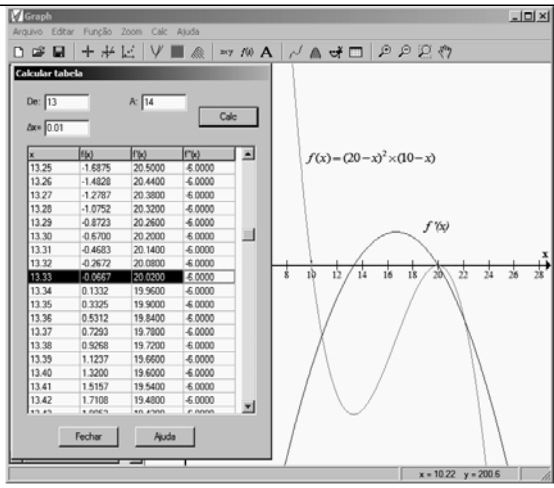


Figura 1.3: Tela do Graph com informações sobre a Função 2

Outra situação que nos permitiria uma outra estruturação de pensamento seria se usássemos, na mesma atividade, um programa de Geometria Dinâmica de duas dimensões[17], onde pudéssemos observar a área da base da caixa, as abas e o corte desprezado. Esta seria uma imagem bem próxima da situação trabalhada. Pela possibilidade de movimentar pontos, nesse nosso exemplo o ponto P sobre uma das diagonais da base (seguindo a idéia do graduando Henrique), o programa nos dá um retorno (*feedback*) imediato alterando toda a figura.

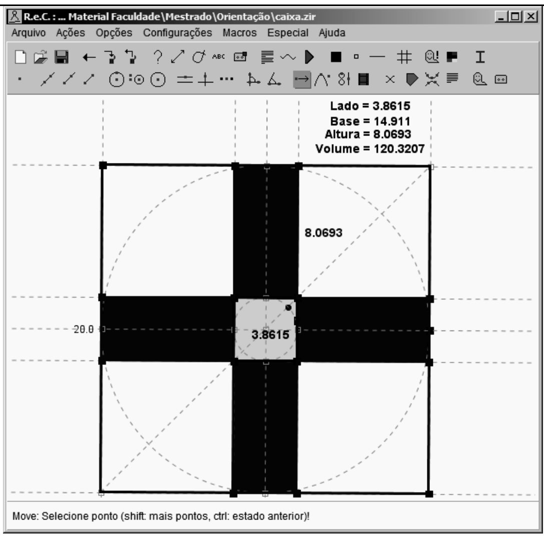


Figura 1.4: Tela do CaR com a base pequena e abas grandes

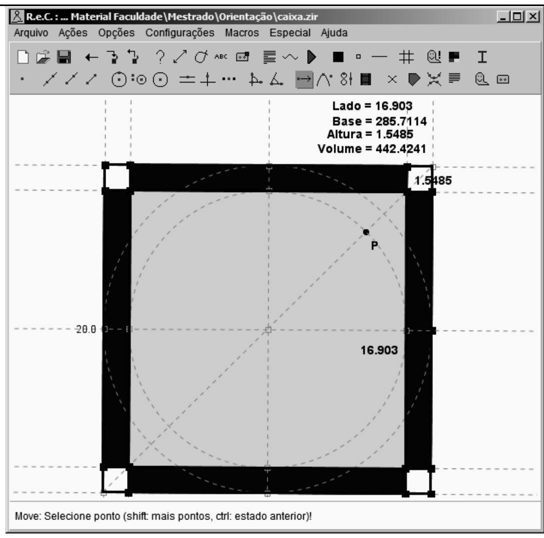


Figura 1.5: Tela do CaR com a base grande e abas pequenas.

[17] Nestes exemplos, usou-se o programa CaR.

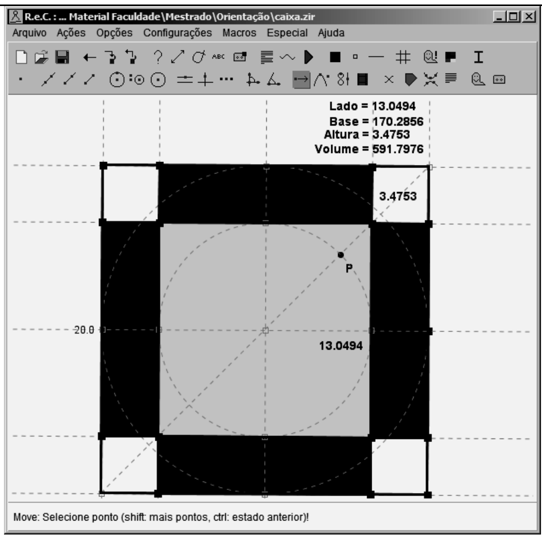


Figura 1.6: Tela do CaR com a aproximação do valor ideal (1)

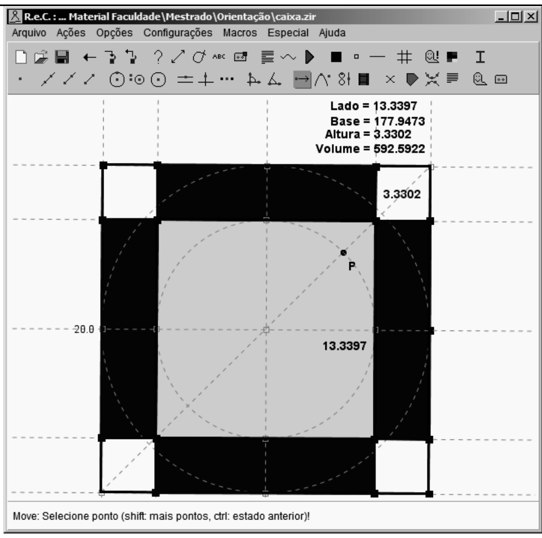


Figura 1.7: Tela do CaR com a aproximação do valor ideal(2)

Para esta construção, além do conhecimento operacional do programa, é necessário o domínio de um conjunto de conceitos que envolvem as propriedades (paralelismo, perpendicularismo, lugar geométrico, dependência entre os objetos etc.) dos elementos geométricos (circunferência, retas, segmentos de reta, ângulos etc.) e dos possíveis arranjos entre estes, no plano, para se obter a construção desejada.

Uma nova mudança de mídia, ainda dentro do mesmo contexto, poderia ser um programa de Geometria Dinâmica de três dimensões[18].

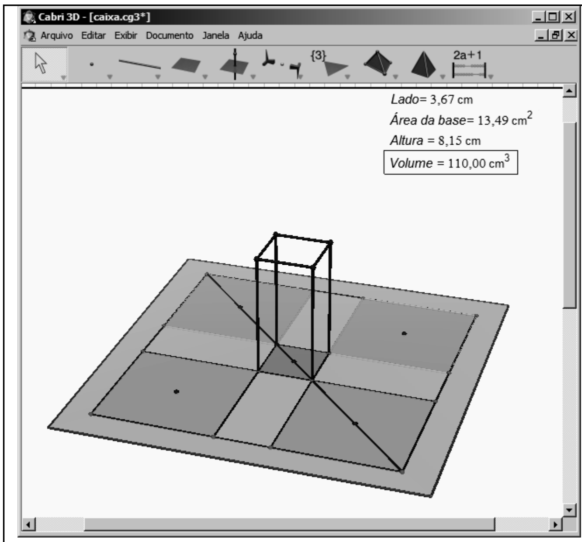


Figura 1.8: Tela do Cabri 3D - Base pequena e abas grandes.

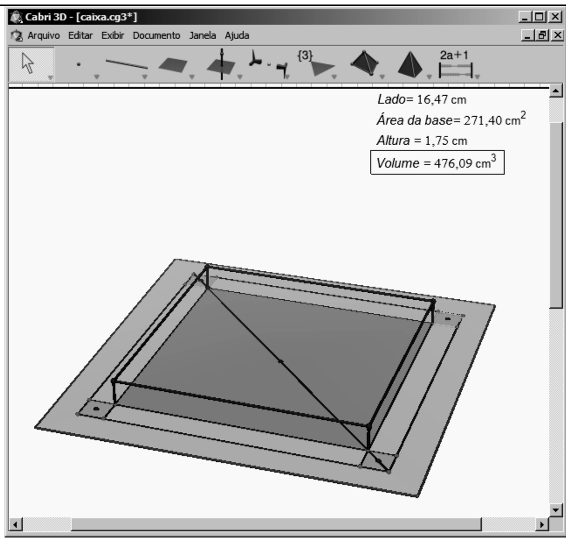


Figura 1.9: Tela do Cabri 3D - Base grande e abas pequenas.

18 Usou-se neste exemplo, o Cabri 3D, programa da empresa Cabrilog. http://www.cabri.com/v2/pages/en/index.php

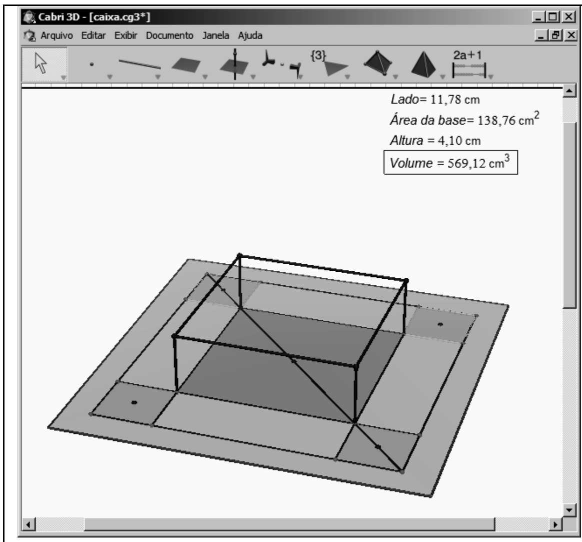


Figura 1.10: Tela do Cabri 3D aproximando-se do valor ideal (1)

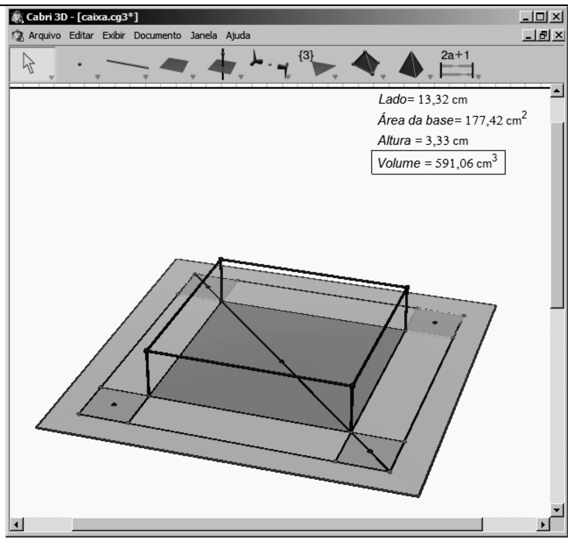


Figura 1.11: Tela do Cabri 3D aproximando-se do valor ideal (2)

Para essa construção, exigem-se além daquelas habilidades anteriormente apontadas, para a construção no programa de Geometria Dinâmica no plano, outras específicas para a manipulação do espaço como, por exemplo, o trabalho com os planos (concorrência, interseção etc.).

Assim, nestes quatro exemplos teríamos os coletivos pensantes (BORBA, VILLARREAL, 2005): 1) Humanos-com-Calculadora, Papel e Lápis; (2) Humanos-com-Computador e Graph; (3) Humanos-com-Computador e CaR; e (4) Humanos-com-Computador e Cabri3d.

O uso de cada uma dessas mídias mobiliza um conhecimento matemático existente na criação de novos conhecimentos. Como aponta Levy (1997)

> Toda criação equivale a utilizar de maneira original elementos preexistentes. Todo uso criativo, ao descobrir novas possibilidades atinge o plano da criação. [...] Criação e uso são, na verdade, dimensões complementares de conexão, com seus efeitos de reinterpretação e construção de novos significados. (p.58)

Estas relações humanos-com-mídias têm uma especial relação com a Geometria a partir do momento que cria novas possibilidades para a aprendizagem.

1.4 Experiência, intuição e teoria: sensibilidade e racionalidade na construção do pensamento matemático

Para Pais (2006) a “aprendizagem da Matemática envolve o desafio de elaborar articulações entre as dimensões teórica e experimental, valorizando generalidade, abstração, particularidade e a materialidade dos recursos didáticos" (p. 93). Assim, este autor, analisando a influência das mídias na aprendizagem de Geometria, discorre sobre alguns elementos envolvidos neste processo.

Segundo ele, um desses elementos é o **objeto**. Ele o relaciona com a parte material, facilmente identificável no mundo físico. Podemos entendê-lo como os "materiais didáticos" ou "modelos físicos" que podem ser manipulados pelo aluno. Porém, como o próprio autor alerta, não podemos crer que pelo simples fato de manipular o objeto o aluno seja capaz de apreender o conceito, por isso, faz-se necessário a intervenção pedagógica do professor transformando, assim, esse processo, numa "experiência raciocinada" [19] (idem, p.67).

Outro elemento é o **desenho**, que é classificado pelo autor como sendo ainda de natureza concreta. Este recurso didático representa uma figura geométrica e podemos considerá-lo como uma representação conceitual mais complexa do objeto, porém ainda concreta.

Ao referirmos à introdução da informática como mídia neste contexto, podemos mudar algumas características do desenho. Usando programas de Geometria Dinâmica, o desenho passa a ser mais do que a representação da figura geométrica, pois ele incorpora as propriedades dessa figura e, por meio do movimento de pontos, podemos verificar a garantia de manutenção de tais propriedades, por exemplo, a perpendicularidade ou paralelismo entre retas, o ponto sobre um objeto, ou a congruência de ângulos e/ou segmentos. Por achar que esse recurso é um diferencial significativo, acrescentamos nos dois elementos propostos por Pais, este novo que denominaremos de **desenho dinâmico**. Apesar de Gravina e Santarosa (1998, p. 8 apud HEBENSTREINT, 1987) definirem estas figuras como objetos concreto-abstratos: concretos, pois podem ser manipulados na tela do computador e abstratos, pois foram feitos a partir de construções mentais, optamos por mantê-los na classe dos concretos.

A partir da manipulação dos objetos, das figuras e/ou das figuras dinâmicas é possível criar outro elemento relacionado à aprendizagem geométrica que são as **imagens mentais**. "Se por um lado, tais imagens estão mais próximas da abstração, por outro lado distanciam-se dos conceitos pelo seu aspecto subjetivo" (PAIS, 2000, p. 4) faltando-lhe, portanto a estruturação do pensamento dedutivo e a garantia de definições e conceitos. O aspecto subjetivo das imagens mentais é associado à forma como cada indivíduo interpreta e se

[19] Entende-se como experiência raciocinada aquela que utiliza materiais didáticos e que extrapolam a sua simples manipulação lúdica, estabelecendo uma relação entre a natureza sensorial destes materiais com a natureza teórica do assunto trabalhado (PAIS, 1996 apud BKOUCHE, 1989).

relaciona com suas experiências matemáticas, permitindo que cada um crie sua própria galeria, e ainda, que essas imagens sejam continuamente modificadas e depuradas.

Com o estabelecimento de uma relação entre os elementos do objeto, desenho e desenho dinâmico (representantes do mundo físico) e a imagem mental (representante do mundo abstrato), por meio de uma "experiência raciocinada", pode-se construir o **conceito** geométrico, que só passa a ter sentido se tiver "um certo formalismo".

Segundo Pais (1996),

> é evidente que do ponto de vista científico, o conceito não pode ser algo susceptível a modificações subjetivas que permitam diferentes significados. Mas, enquanto conhecimento é construído pelo homem, existe uma série de particularidades que acabam determinando níveis de conceitualização diferentes (p. 71).

Partindo destes pressupostos e da estrutura apresentada por Pais (1996, p. 71-72) apresentamos na figura 1.12 um diagrama interpretativo relacionando os três aspectos do conhecimento geométrico: experiência, intuição e teoria.

Para ele, a **experiência** é aquela na qual a pessoa usa os objetos e os desenhos para verificar uma proposição geométrica.

O outro aspecto do conhecimento geométrico é a **intuição**. Uma forma de conhecimento que não requer "uma dedução racional", pois ela está no "espírito da pessoa". Porém, ela é "relativa aos conhecimentos acumulados pelo sujeito portador dessa intuição" (PAIS, 2006, p. 101). Um exemplo dessa forma de conhecimento são os axiomas, que numa definição geral, são considerados uma verdade evidente por si mesma. Essa forma de conhecimento tem uma forte ligação com as imagens mentais. Segundo Davis e Hersh (1995), a intuição "é o efeito da mente de certas experiências de actividade ou manipulação de objetos concretos (mais tarde, de marcas num papel ou mesmo de imagens mentais)" (p. 366).

Além da **experiência** e da **intuição**, finalmente temos a **teoria** que se utilizará dos aspectos conceituais para o convencimento ou verificação da proposição.

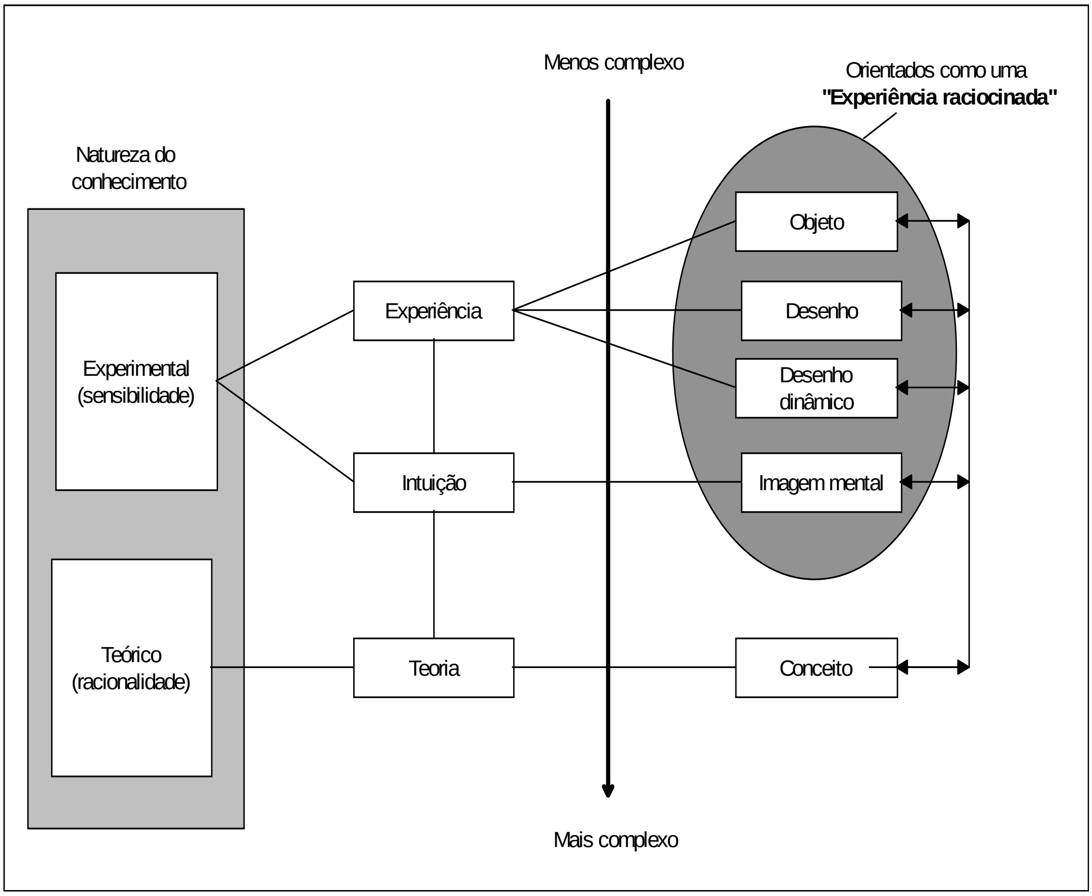


Figura 1.12: Esquema ampliado a partir de Pais (1996, p.72) mostrando a relação entre os aspectos do conhecimento geométrico e seus elementos

Podemos ilustrar esses conhecimentos por meio de uma situação-problema:

> ***Dados dois quadrados Q1 e Q2, de forma que Q2 esteja inscrito em Q1. Pergunta-se: qual a relação entre a área do quadrado inscrito com a área do quadrado circunscrito, sabendo-se que os vértices do quadrado inscrito estão sobre os pontos médios dos lados do quadrado circunscrito?***

Algumas pessoas, usando a **intuição,** podem afirmar que a área do quadrado inscrito é a metade da área do quadrado circunscrito. Para isso, podem usar suas imagens mentais formadas a partir de experiências com proporcionalidade e/ou teorema de Thales.

Aquelas que dispõem de um computador com o *software* de Geometria Dinâmica podem fazer uma construção e a partir de experiência com as diversas ferramentas deste programa, chegar à mesma resposta, conforme mostramos na figura a seguir.

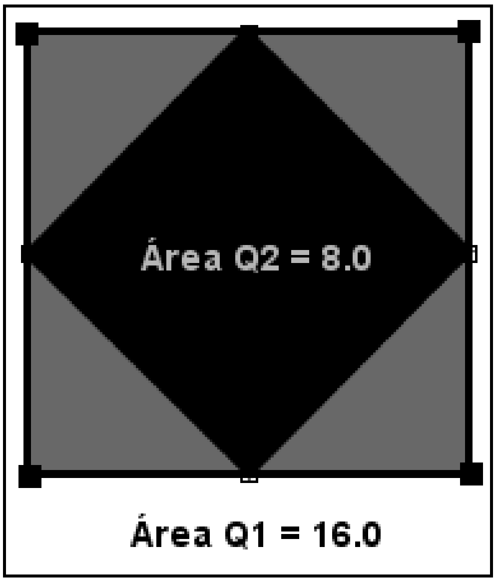


Figura 1.13: Construção feita no programa CaR e que mostra a relação entre as duas áreas

Ainda como experimento, poderíamos usar a dobradura para buscarmos a solução. Assim, partimos um papel quadrado, figura 1.14, o dobramos ao meio, marcando os pontos médios sobre os lados, figura 1.15, e posteriormente, unimos seus vértices no ponto central, figura 1.16. Pode-se, ainda, usar a régua e conferir as medidas do quadrado original (figura 1.14) com o dobrado (figura 1.16).

Figura 1.14: Foto 1 da dobradura

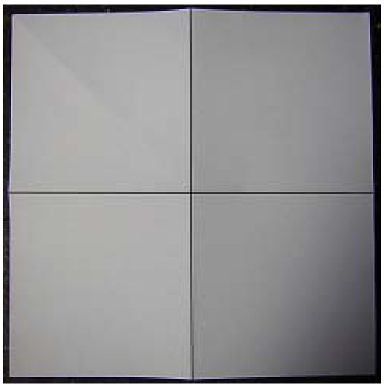


Figura 1.15: Foto 2 da dobradura

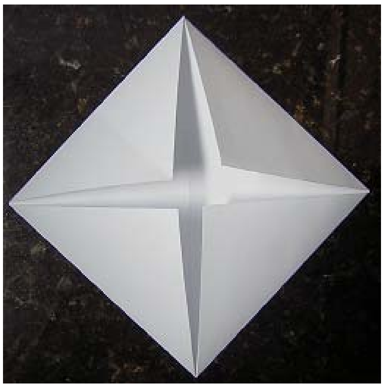


Figura 1.16: Foto 3 da dobradura

Para os que se apropriam da teoria, poderiam resolvê-lo assim:

Tomemos L_1 como lado do quadrado circunscrito e L_2 o lado do quadrado inscrito, então:

1) Achando a relação entre L_2 e L_1

$$(L_2)^2 = \left(\frac{L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{L_1}{2}\right)^2$$

$$(L_2)^2 = 2\times\left(\frac{L_1}{2}\right)^2$$

$$L_2 = \sqrt{2\times\left(\frac{L_1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\times\sqrt{\left(\frac{L_1}{2}\right)^2}$$

$$L_2 = \frac{L_1\sqrt{2}}{2}$$

2) Achando as áreas

$$A_{Q1} = (L_1)^2$$

$$A_{Q2} = (L_2)^2 \Rightarrow A_{Q2} = \left(\frac{L_1\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$A_{Q2} = \frac{2(L_1)^2}{4} = \frac{(L_1)^2}{2}$$

Como $A_{Q1} = (L_1)^2$ então

$$A_{Q2} = \frac{A_{Q1}}{2}$$

Neste exemplo, o primeiro caso foi intuitivo, ou seja, baseou-se nas experiências que sinalizou alguma relação com a situação-problema proposta, mas não houve um pensamento dedutivo, nem qualquer outra estruturação. Nas experimentações, seja ela no computador, com dobradura ou com a medida com régua, o empirismo predominou. E no último exemplo, o conceitual, a resolução foi por meio algébrico usando uma seqüência lógica estruturada.

Nos tópicos anteriores, apontamos a situação do ensino e da aprendizagem da Geometria no cenário educacional, pontuamos sobre uma das tendências indicadas como potencialmente alternativa para isto, as tarefa exploratório/investigativas, e finalmente discorremos sobre a relação entre as mídias e a (re)estruturação do pensamento matemático e geométrico. Desta forma, entendemos que constituímos os subsídios teóricos para análise de um movimento ocorrido no grupo (GRUCOGEO) para a aprendizagem da Geometria numa perspectiva de múltiplas mídias.

Interessa-nos discutir o foco principal que elegemos para a análise frente a esse cenário: o contexto das provas em Geometria.

CAPITULO 2 – PROVA: UMA QUESTÃO POLÊMICA[20]

Neste capítulo, além de abordarmos alguns conceitos polissêmicos fundamentais para nossa pesquisa, discutimos mudanças significativas que entendemos serem necessárias para nos apropriarmos do conceito de provas nas aulas de Geometria. Discutimos, também, suas funções e como elas podem assumir um novo papel num contexto de sala de aula.

2.1 Prova e demonstração

Num contexto genérico, ou até mesmo da matemática acadêmica, provas e demonstrações têm assumido o mesmo significado. Nessa pesquisa, apropriamo-nos das definições feitas por Nicolas Balacheff e estudadas por vários autores (GARNICA, 1995; FILOMENA, 1998; CURY, HACK, 2002; FONSECA, 2005; PIETROPAOLO, 2005; ALMOULOUD, 2007; DORO, 2007; PEREIRA, 2007; SERRALHEIRO, 2007) e que fazem distinção entre esses termos.

Iniciaremos as definições e distinções, pelo termo **Explicação**. Segundo o dicionário Houaiss (2007) da Língua Portuguesa, explicação é o "ato de explicar(-se), de tornar claro ou inteligível; esclarecimento". Dentro do nosso contexto, vamos entendê-lo como um recurso usado pelo locutor para comunicar, convencer os seus pares sobre uma proposição matemática, que para ele tornou-se verdadeira. "A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição 'verdadeira' ou 'não' " (ALMOULOUD, 2007, p. 2-3).

As **Provas**, que têm como uma de suas funções garantir a validade do raciocínio, serão entendidas como uma "explicação aceita por uma dada comunidade em um dado momento, podendo ser debatida, refutada ou aceita" (GARNICA, 1995, p.12-13). Ela será dividida em duas categorias: (1) as **provas pragmáticas**, que são aquelas que "se apóiam em ações, em que o conhecimento necessário não é formulado explicitamente" (PEREIRA, 2007, p. 32) e (2) as **provas conceituais ou intelectuais**, que são aquelas "que envolvem formulações, propriedades matemáticas e as relações estabelecidas entre essas propriedades" (JAMELLI, 2007, p. 32).

As provas pragmáticas são subdivididas em três categorias:

[20] Este título é uma paráfrase do título do artigo Demonstração – uma questão polêmica de Cristina Loureiro e Rita Bastos

- **Empirismo ingênuo ou *naif*** : são aquelas provas que se baseiam em testes de alguns casos e a partir dos resultados destes, assumem uma posição quanto à proposição em estudo.
- **Experiência crucial**: assim como a anterior, esses tipos de provas se baseiam em testes, a partir de uma experiência que seja significativa (em termo de complexidade ou por sua particularidade) para a proposição.
- **Exemplo genérico:** "Consiste na explicitação da validade de uma proposição pela realização de operações ou transformações sobre um objeto presente, não por ele mesmo, mas como representante característico de uma classe. Da formulação são extraídas propriedades características e estruturas de uma família vinculada ao nome próprio e à exibição de um de seus representantes" (PIETROPAOLO, 2005, p. 94). Segundo Jamelli (2007), nesse tipo de prova pode-se observar o princípio de mudança do nível pragmático para o conceitual.

As provas intelectuais ou conceituais são algumas vezes subdivididas em uma ou duas categorias, dependendo do autor. Nós adotaremos a subdivisão em duas:

- **Experimento de pensamento ou experiência mental**: são aquelas provas em que as ações não são expressas externamente como as da categoria pragmática. Essas ações acontecem internamente, no pensamento. "Consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos" (ALMOULOUD, 2007, p. 4).
- **Cálculo nas afirmações**: este tipo de prova usa o sistema de axiomas e a dedução. Conforme Pereira (2007), "exemplos de cálculos nas afirmações são as demonstrações formais normalmente encontradas no contexto da Matemática do Ensino Superior" (p. 35).

Para dar um significado ao termo **Demonstrações**, dentro do contexto de Balacheff, recorremos ao Garnica (1995). Segundo o referido autor,

> No interior da comunidade Matemática, [...], só são aceitas como provas as explicações que adotam uma forma particular, um conjunto de enunciados válidos organizados segundo certas regras, sendo que um enunciado ou é reconhecido como verdadeiro ou é deduzido a partir do precedente por regras de dedução válidas e pré-fixadas, do domínio da Lógica (GARNICA, 1995, p. 13)

Sinteticamente, o quadro a seguir explicita os diferentes entendimentos sobre provas:

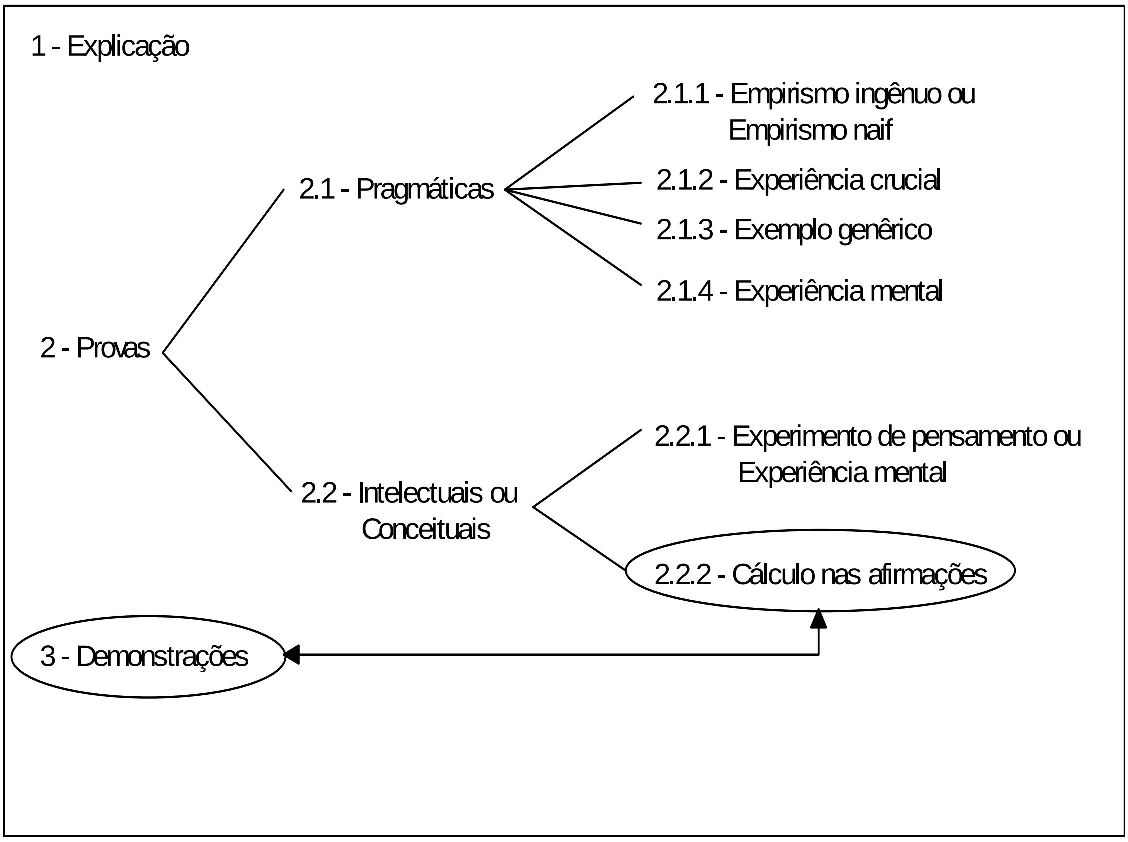


Figura 2.1 – Diagrama de estrutura das provas

Não pretendemos defender nesta nossa proposta investigadora uma categorização das provas uma vez que outros pesquisadores, partindo também do trabalho de Nicolas Balacheff, propõem outras tipologias de prova, como por exemplo, Rezende e Nasser (1994) citadas por Nasser e Tinoco (2001, p.4-6) que analisam as provas como “Justificativa pragmática”, “Recorrência a uma autoridade”, “Exemplo crucial” e “Justificativa gráfica”.

Dentro das concepções apresentadas anteriormente, podemos observar que as provas podem variar em níveis de rigor[21] indo do empirismo ingênuo à demonstração, adaptando-se perfeitamente ao ensino da Matemática nos diferentes níveis escolares (do ensino básico ao superior) justificando-se, assim, a nossa opção por adotar essa concepção de prova em nossa pesquisa.

Acreditamos que não basta definirmos o que entendemos por prova para dar significado ao seu uso. O que fizemos foi mostrar que, alterando seu rigor, podemos trabalhar com provas em todos os níveis do ensino.

[21] Na nossa concepção, o conceito de rigor também sofre alterações em função de um momento histórico.

2.2 Funções das provas

Durante minha formação docente (da época de aluno do ensino fundamental até a graduação) minha concepção quanto à atividade do "matemático" era envolta por um desconhecimento profundo. Poderia listar algumas dezenas de nomes dos mais famosos matemáticos, ignorando, porém, totalmente os seus trabalhos: o contexto histórico, quais as teorias que lhe serviram de subsídios e quais suas *praxis*[22]. Com isso, sempre considerei os matemáticos como pessoas onde a inspiração era bem maior que a exaustão, criando uma "divinização do conhecimento matemático, pela identificação de todo o processo investigativo com os produtos finais totalmente depurados" (OLIVEIRA, 2002, p.145). Esta visão, que ainda é comum nas escolas (sejam elas do ensino fundamental, médio ou superior), contribuiu, e ainda contribui, para que a matemática não seja entendida/construída, mas apenas aplicada em casos semelhantes aos estudados, assumindo, assim, um caráter prescritivo[23] e não descritivo[24] .

Ponte (2005, p.14) citando Poincaré (1996, p.9) traz um exemplo do "fazer matemática", quando Poincaré tentava demonstrar que não existiam funções de um determinado tipo:

> Havia já quinze dias que me esforçava por demonstrar que não podia existir nenhuma função análoga às que depois vim chamar de função fuchsianas. Estava, então, na mais completa ignorância; sentava-me todos os dias à minha mesa de trabalho e ali permanecia uma ou duas horas ensaiando um grande número de combinações e não chegava a nenhum resultado. Uma tarde, contra meu costume, tomei um café preto e não consegui adormecer; as idéias surgiam em tropel, sentia que escapavam, até que duas delas, por assim dizer, se encaixaram formando uma combinação estável. De madrugada tinha estabelecido a existência de uma classe de funções fuchsianas, as que derivam da série hipergeométrica. Não tive mais que redigir os resultados, o que apenas me levou algumas horas.
>
> Quis, em continuação, representar estas funções pelo quociente de duas séries: esta idéia foi completamente consciente e deliberada, era guiada pela analogia com as funções elípticas. Perguntava a mim mesmo quais seriam as propriedades destas séries, se é que existiam, e logrei sem dificuldade formar as séries que chamei tetafuchsianas.

---

[22] "'Praxis', neste contexto refere-se a tudo o que tenha a ver com a actividade científica do matemático, nomeadamente, os seus modos de acção, de intervenção, de pensamento, etc., legítimos perante a comunidade matemática em que se insere"(OLIVEIRA, 2002, p.145)
[23] "... diz como deve ser a matemática por analogia com os produtos matemáticos conhecidos." (ibidem)
[24] "... como é a matemática real feita pelos matemáticos."(ibidem)

Neste relato, podemos notar o trabalho de Poincaré. Somente após um período relativamente longo de trabalho é que teve um *insight* [25] que o auxiliou na resolução de sua proposta.

Outro exemplo do envolvimento do matemático com/em seu trabalho, foi a obstinação de Andrew Wiles em demonstrar a afirmação que Fermat deixou anotada na borda de um livro de Diofanto.

> Desde que pela primeira vez encontrei o Último Teorema de Fermat, em criança, ele tem sido minha maior paixão... Tive um professor que realizara investigações em Matemática e que me emprestou um livro sobre Teoria dos Números, que me deu algumas pistas sobre como começar a atacá-lo (PONTE, 2005, p.18 apud SINGH, 1998, p.93)

Todavia, somente em 1993 foi que Wiles apresentou à comunidade matemática uma primeira demonstração, que ainda não foi aceita, levando-o a trabalhar por mais um ano, com a colaboração de um ex-aluno, para só assim conseguir sucesso na sua empreita.

A partir destes exemplos, o de Poicaré e o de Wiles, sobre a *práxis* do matemático, faremos uma discussão quanto ao trabalho de demonstração do matemático. Se olharmos para esses exemplos, podemos entender o sentido que tem a demonstração para o trabalho do Matemático, ou seja, o de provar a verdade de uma proposição, fruto de um trabalho intelectual, normalmente de anos de empenho a uma comunidade a qual pertence.

Não é nossa intenção discutir os mecanismos aceitos por essa comunidade, as suas relações internas, a filosofia da demonstração (como uma prova específica), sua relação com as diversas correntes epistemológicas (formalistas, logicista, fundamentalista etc.) ou ainda os critérios determinados por cada uma delas ao analisar uma nova prova. Queremos justificar o nosso reconhecimento quanto à importância da prova no contexto profissional da Matemática e o esmero que ela merece do seu autor.

Ao mudarmos de contexto, saindo do profissional de matemática para o escolar, esbarramos com alguns problemas que a maioria dos professores já enfrentou: os alunos não sentem a necessidade e nem vêem sentido em provar algo que já sabem ser verdadeiro. De Villiers (1990, p. 17) traz uma citação de Gonobolin (1954, p.61) que ilustra o problema

[25] Com relação aos *insights*, Oliveira (2002) destaca que eles "resultam de pensamento inconsciente que o matemático não controla e pelo qual não é diretamente responsável"(p.146), porém estes *insights* não ocorrem sem uma preparação anterior que envolve trabalho experimental, estudo de analogias, análise de casos particulares, reflexões, tentativas, etc. Neste sentido, entendemos *insights* como intuição.

> ... os alunos ... não ... reconhecem a necessidade da prova lógica de teoremas geométricos, principalmente quando essas provas são de características visivelmente óbvias ou podem ser facilmente estabelecidas empiricamente.

Além disso , a forma como a demonstração ou a prova é apresentada ao aluno [isso se é apresentada], muitas vezes, não faz o menor sentido para ele, pois ela acaba exigindo muito mais a capacidade de memorização do que de compreensão. Acredito que todos nós, em algum momento escolar compartilhamos dos sentimentos expressos por Lourenço (2002):

> Ao meditar sobre isso [demonstrações], voltam à memória acontecimentos ocorridos em meu tempo de estudante, principalmente quando aluno da escola hoje chamada de fundamental e média e, em especial, observando os professores - professores de Matemática – que demonstravam com mestria, teoremas e corolários que eu, como todos os outros, não conseguíamos entender. Para demonstrar teoremas, em geral, o professor concebia idéias e artifícios extraordinários, tirados de não sei onde, e, magicamente, concluía, escrevendo c.q.d.
>
> Colegas que considerávamos muito inteligentes e dedicados, com grande sucesso em todas as disciplinas, quase sempre esbarravam nas demonstrações de teoremas, enquanto que outros, medíocres em quase tudo, freqüentemente se destacavam, pois reproduziam as argumentações e cálculos contidos nos livros e fielmente repetidos pelos professores nas aulas. (p. 82-83)

Por isso, compartilhamos com De Villiers a proposta de dar às provas outras funções além da função de verificação. Essas novas funções da prova, com vistas a aplicações em sala de aula, foram discutidas por De Villiers (1990) e, posteriormente, por outros autores como Hanna e Jahnke (1996), tornando-se, assim, referências para pesquisas sobre o assunto. Interessa-nos discutir como essas funções podem mobilizar os alunos em uma atividade matemática.

A seguir, discutiremos as diferentes funções da prova apresentadas por De Villiers (1990, 2001, 2002) trazendo situações produzidas historicamente e/ou no GRUCOGEO que possibilitam entender a interpretação que adotamos para essas funções.

2.2.1. Prova como meio de verificação/convicção

Para a maioria dos professores a verificação é a principal função da prova, ou seja, atestar a verdade sobre uma conjectura matemática, convencendo a si e a outros cépticos.

De Villiers (1990, 2001) afirma que para o matemático profissional isto nem sempre é verdade, pois ele utiliza também de outros métodos para convencer-se da validade de uma conjectura como, por exemplo, a verificação quase-empírica[26], a intuição e uma prova lógica

---

[26] Uma verificação quase-empírica é aquela que considera alguns fatores importantes como as "provas informais, desenvolvimentos históricos, possibilidade de erro matemático, explicações matemáticas (em contraste com

que não precisa ser necessariamente uma demonstração. Segundo ele, na maioria das vezes os matemáticos têm primeiro a convicção sobre a verdade da conjectura antes de iniciar o trabalho do desenvolvimento de uma prova e quando verificam uma

> nova conjectura, não observam apenas as demonstrações, mas tentam ao mesmo tempo encontrar contra-exemplos por meio de testes quase-empíricos, dado que tais testes podem revelar contradições encobertas, erros ou hipóteses não assumidas. Deste modo podem ser criados contra-exemplos, obrigando os matemáticos a reconstruir demonstrações antigas ou a construir novas demonstrações (DE VILLIERS, 2001, p. 22-23).

Conforme o mesmo autor destaca, o que foi apresentado acima não tira o mérito da demonstração para a verificação ou convencimento, próprio ou de outrem, apenas alerta quanto à preocupação de entendê-la apenas dentro desta função.

Para justificar esta última colocação, podemos recorrer ao exemplo da atividade desenvolvida no GRUCOGEO e discutida parcialmente no capítulo anterior[27].

Após os testes com os valores reais e o grupo chegar à conclusão que o valor do lado da base da caixa para o maior volume era 13,333... ou melhor, $\frac{40}{3}$, a professora formadora Adair, dirige-se ao grupo com uma pergunta: "Pois bem. Agora a pergunta é: como é que vocês me convencem que este é o maior volume?" .

Foi a partir desta colocação que o grupo mobilizou-se para achar o valor, partindo para a generalização do raciocínio, o cálculo da derivada primeira da função e em seguida o cálculo das raízes, assim chegando à comprovação do valor obtido empiricamente.

2.2.2. Prova como meio de explicação

Conforme De Villiers (2001)

> Embora por meio de verificações quase-empíricas (por exemplo, construções e medições rigorosas, substituições numéricas, e outras) seja possível atingir de facto um alto nível de confiança na validade de uma conjectura, estes processos não fornecem em geral uma explicação satisfatória da razão pela qual pode ser verdadeira. Apenas confirmam que é verdadeira, e embora a consideração de mais e mais exemplos possa aumentar ainda mais a nossa confiança, não obtemos uma sensação psicológica satisfatória de esclarecimento – a compreensão ou percepção de como a conjectura é conseqüência de outros resultados conhecidos (p. 33).

---

provas), comunicação entre os matemáticos, a utilização de computadores e muitos outros" (PONTE *et al*, 1999, p.31).

[27] Fazemos referência aqui à atividade da construir uma caixa aberta, em forma de paralelepípedo, usando uma área de 20 x 20 unidades. Para maiores detalhes ver capítulo 1 a partir da página 17.

Com a inserção do computador e os programas de Geometria Dinâmica essas verificações ficaram ainda mais plausíveis. Vamos ilustrar este caso usando um exercício proposto por Serrão (1968, p. 57):

> Demonstrar que em um triângulo isósceles *ABC* (*AB*=*AC*), baixando de um ponto *P*, sôbre a base, perpendiculares aos lados iguais, a soma dos segmentos *PM*+*PS*=constante=*BH*.

Com os recursos acima citados, pode-se facilmente construir a figura proposta e, movimentando-se o ponto *P*, comprovar a igualdade, conforme ilustramos nas figuras 2.2 e 2.3.

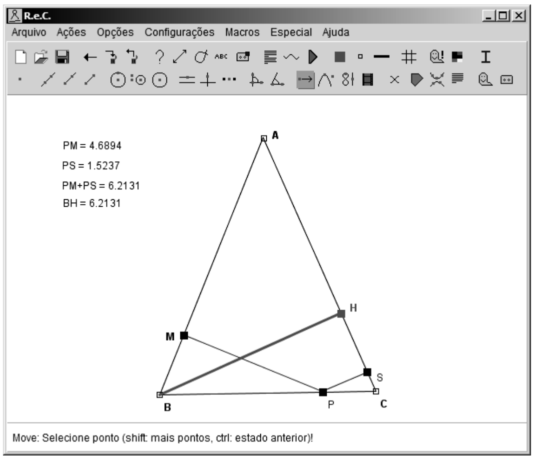


Figura 2.2 – Tela do CaR com exemplo de construção da prova como explicação

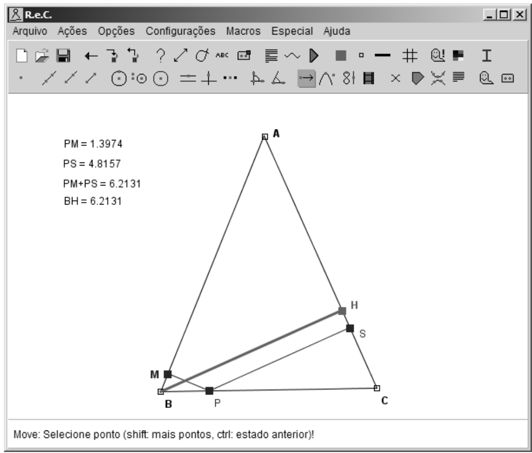


Figura 2.3 – Tela do CaR com exemplo de construção da prova como explicação

Podemos considerar que o computador e o programa de Geometria Dinâmica são recursos para as explorações quase-empíricas e como tais, podemos ver que conseguimos fazer a verificação, mas não obtvemos o porquê do resultado. Falta-nos a explicação que pode ser obtida pela prova.

2.2.3. Prova como meio de descoberta

De Villiers atribui a essa função da prova a geração de novos conhecimentos, teoremas, conjecturas e até teorias a partir da análise e do pensamento dedutivo. "Para o matemático profissional, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas também muitas vezes um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados" (DE VILLIERS, 2001, p. 33).

Com um exemplo da prova como meio de descoberta, podemos considerar o quinto postulado de Euclides:

> Dado um segmento de reta que cruze duas retas de modo que a soma dos ângulos internos do mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então as duas linhas, quando prolongadas, acabarão por se encontrar (naquele lado do segmento de reta) (MLODINOW, 2004, p. 102-103)

Durante muito tempo, este postulado trouxe incômodo aos matemáticos que o reconheciam mais como um teorema do que como postulado e, portanto, deveria ser demonstrado a partir dos primeiros axiomas. A primeira tentativa foi creditada à Ptolomeu no século 2 d.C. Outros o sucederam, também sem sucesso. Dentre a lista de nomes que se dedicaram a estudá-lo, três nomes se destacam na seqüência por terem criado as geometrias não-euclidianas: Johann (Janos) Bolyai, Nikolay Ivanovich Lobachevsky e Carl Friedrich Gauss. (MLODINOW, 2004, p. 101-154)

2.2.4. Prova como meio de sistematização e de comunicação

Apesar de serem tratadas separadamente por De Villiers, estamos unindo-as por entendermos que elas possuem muitos pontos em comum, num contexto escolar.

Oliveira (2002, p.146) escreve que “o trabalho investigativo dos matemáticos está muito longe da linearidade e transcendência que os não matemáticos lhe atribuem”. Mas, apesar de reconhecermos que o seu trabalho não é desta forma, há um momento em que ele deve reorganizar suas conjecturas, seus dados e informações.

Quando propomos uma tarefa investigativa esperamos que os participantes consigam uma aproximação com o “fazer matemática” do matemático, ou seja, que ele explore, gere conjecturas, as investiguem e que consigam chegar a um “produto final” mobilizando todo seu conhecimento matemático. E, assim como o matemático, chega um momento em que eles deverão organizar-se e apresentar os resultados a seus pares. Neste momento a prova desenvolverá sua função de sistematização e comunicação.

2.2.5. Prova como desafio intelectual

Parafraseando De Villiers (2001, p.35), podemos dizer que para aqueles que têm apreço pelo pensamento matemático, a prova é um desafio intelectual tão apelativo quanto os *puzzles*, outras ocupações ou projetos criativos são para as outras pessoas.

Esta sensação de prazer e de satisfação pessoal pode ser observada também nos alunos que conseguem realizar uma prova dentro do contexto de uma atividade, principalmente quando esta é construída e não simplesmente relembrada. Pode-se notar o quanto isto eleva sua auto-estima.

O objetivo de apresentar as várias categorizações sobre provas é de evitarmos restringir os variados tipos de provas e suas funções à idéia de verificação/convicção, pois dentro de um processo de ensino-aprendizagem, muitas vezes, essa idéia não é a que estimulará nossos alunos.

No quadro a seguir, baseado numa tabela apresentada por De Villiers (1990, p. 24), sintetizamos as relações entre as diversas funções apontadas e os métodos dedutivo, intuitivo e o quase-empírico.

Funções para a prova	**MÉTODOS**		
	Dedutivo	**Intuitivo**	**Quase-empírico**
Verificação de resultados	X	X	X
Explicação de resultados	X	X	---
Descoberta de novos resultados	X	X	X
Sistematização de processos para a obtenção dos resultados	X	---	---
Comunicação dos resultados e dos processos	X	---	---
Desafio intelectual[28]	X	---	X

2.3. A Matemática no contexto escolar

Vários autores (CHEVALLARD, 1991; D'AMBRÓSIO, 1993; D'AMBRÓSIO, 2003; MOREIRA, 2004) têm defendido a idéia de que a Matemática deve ser tratada de forma múltipla, daí, adotarem o termo "Matemáticas". Tendo em vista os objetivos do nosso trabalho vamos ater-nos à caracterização da Matemática Científica e da Matemática Escolar.

Nos PCN de Matemática do terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental, encontramos uma referência inicial a esta distinção entre elas, quando eles tratam da relação entre o professor, o aluno e o saber matemático.

> Tornar o saber matemático acumulado um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a idéia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência (BRASIL, 1998, p.36).

Identificamos nesta citação a preocupação de fazer chegar ao aluno um conhecimento matemático diferente daquele conhecimento dos matemáticos, fazendo uma distinção entre o

[28] Por entendermos que os programas de Geometria Dinâmica podem permitir experiências no método quase-empírico, atribuímos a ela também a possibilidade de envolver as pessoas na construção de figuras (ou construções) dinâmicas que atendam a determinados problemas ou proposições.

objeto escolar e o científico. Em outro trecho, o mesmo documento torna-se mais explícito com relação a essa distinção,

> Esse processo de transformação do saber científico em saber escolar não passa apenas por mudanças de natureza epistemológica, mas é marcado significativamente por condições de ordem social e cultural que resultam na elaboração de saberes intermediários, como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras. (BRASIL, 1998, p.36)

Reforçamos a idéia dessa diferenciação entre essas matemáticas trazendo um trecho do trabalho de Vilela (2007)

> As diferenças que extraímos dos textos de Moreira evidenciam as técnicas, o método lógico-dedutivo e a linguagem própria do saber dos matemáticos profissionais em contraposição ao saber dos professores de matemática que envolve a gama de conhecimentos, tomados de Shulman (MOREIRA & DAVID, 2003, p. 69).
>
> De modo geral, as matemáticas científica e escolar seriam diferentes quanto:
>
> • aos objetos que constroem e com que lidam;
>
> • às práticas que desenvolvem;
>
> • ao poder de legitimação para influenciar as prescrições curriculares;
>
> • aos fins visados nas práticas que desenvolvem;
>
> • à importância e determinação lógico-formal;
>
> • aos valores essenciais que buscam promover;
>
> • às definições;
>
> • à natureza das provas ou dos processos de validação do conhecimento;
>
> • ao modo como o erro é visto e tratado.

Nessa pesquisa, nos apropriaremos dos termos Matemática Acadêmica e Matemática Escolar no sentido adotado por Vilela (2007) baseando-se em Moreira e David (2003). Assim sendo, entendemos a Matemática Acadêmica ou Científica como aquela desenvolvida pelos matemáticos e cuja

> prática [...] se caracteriza pela produção de resultados originais “de fronteira”. Os níveis de generalidade e de abstração em que se colocam as questões em todos os ramos da matemática científica atualmente fazem com que a ênfase em estruturas abstratas, o processo rigorosamente lógico–dedutivo e a extrema precisão da linguagem sejam, entre outros, valores essenciais associados à visão que o matemático constrói em relação ao conhecimento matemático (MOREIRA, DAVID, 2003, p. 64 apud VILELA, 2007, p.68).

enquanto que a Matemática Escolar será entendida como aquela praticada na escola pelos professores na educação básica, “com intuito explícito de tornar os estudos sobre a matemática da escola mais autônomos e independentes da matemática acadêmica” (VILELA, 2007, p.5)

Devemos ainda reforçar a idéia de que não temos a Matemática Escolar como uma Matemática Acadêmica diminuída ou “afrouxada”, pois cada uma trata o objeto matemático e os propósitos dados a ele de forma diferenciada e específica. Enquanto na Matemática Científica o objeto exige abstração e generalidade para aplicação axiomática e lógica, na Matemática Escolar ele deve ser claro e dentro do possível contextualizado para um propósito pedagógico (VILELA, 2007, p. 68).

Segundo Vilela (2007), estas especificidades influenciam as provas. Baseando-se em Moreira (2004), ela apresenta distinções quanto ao tipo e os objetivos da prova em cada uma delas. Na Matemática Científica as provas são “lógico-dedutivas [com] formulações extremamente precisas, apoiadas em definições e teoremas anteriormente estabelecidos [com uma] seleção rigorosamente econômica dos elementos primitivos e postulados” (VILELA, 2007, p. 69). Na Matemática Escolar elas “são justificativas menos formais mais ‘livres’, que se desenvolvem tomando postulados e elementos primitivos tácitos certos conhecimentos provenientes da vida cotidiana” (MOREIRA, 2004, p. 27 apud ibidem).

Quanto aos objetivos da prova podemos observar que há mudança do foco. Na Matemática Científica o foco está na prova uma vez que ela é essencial “para a aceitação ou não da teoria” (Ibidem), enquanto na Matemática Escolar ele está no processo, pois “o objetivo é a aprendizagem do conceito e não da forma; a prática visa à compreensão em que justificativas mais livres ajudam a: desenvolver a convicção da validade do resultado; levar à compreensão mais profunda das relações em discussão” (MOREIRA, 2004, p. 27 apud ibidem).

2.4. Provas no contexto das atividades exploratório/investigativas

Conforme a estrutura que apresentamos anteriormente sobre as atividades exploratório/investigativas (introdução, desenvolvimento e encerramento) é notório o emprego constante das provas, incluindo as explicações, nas duas últimas etapas.

No desenvolvimento da atividade, os participantes estão em constante diálogo, necessitando expressar e tentar convencer o grupo dos seus raciocínios e conjecturas. Nestes momentos, a explicação é usada com muita freqüência.

Caminhando-se para a fase de encerramento, faz-se necessária a estruturação dos resultados obtidos com as atividades e a preparação para a comunicação desses resultados aos pares.

Retornando ao exemplo da atividade com a caixa[29], identificamos estas aplicações em dois momentos muito claros: (1) durante o desenvolvimento da atividade quando o aluno Henrique tenta explicar ao grupo a idéia de usar a diagonal da caixa como facilitadora para o cálculo dos valores da base e das abas, apesar da dificuldade que teve de fazer-se entender; e (2) Quando a professora formadora Adair solicita que o grupo a convença de que aquele é o maior volume da caixa, disparando, assim, todo o movimento do grupo no sentido de validar o resultado obtido pelas explorações.

Entendemos que as diferentes funções da prova apontadas por De Villiers puderam ser identificadas em atividades do tipo exploratório/investigativas o que possibilita a nossa opção teórica por aproximar essas discussões apontadas pelo autor com as atividades desenvolvidas no GRUCOGEO.

Nesse capítulo, buscamos mostrar uma relação entre a Matemática Profissional e a Matemática Escolar. Em determinado momento nos aproximamos do matemático buscando trazer o seu "fazer matemático" para nossa sala de aula enquanto flexibilizamos a concepção de prova e nos afastamos da forma específica do seu trabalho com ela. Nosso interesse é tentar entender como trazer a prova para o contexto escolar, seja diretamente relacionado ao aluno ou relacionado à formação do professor, aproveitando o que a matemática tem de mais atraente: sua capacidade criativa.

[29] Fazemos referência aqui à atividade da construir uma caixa aberta, em forma de paralelepípedo, usando uma área de 20 x 20 unidades. Para maiores detalhes ver capítulo 1 a partir da página 17.

CAPITULO 3 – METODOLOGIA

A presente pesquisa foi desenvolvida em um enfoque qualitativo, uma vez que ela dialoga diretamente com algumas características desse tipo de pesquisa apresentada por Lüdke e André (1986, p.11) baseando-se em Bogdan e Biklen (1982), por Garnica (1995, p.86) e Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 106), que são:

- a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento;
- a não neutralidade do pesquisador, uma vez que este analisará os eventos pelo prisma de suas experiências e concepções;
- os dados coletados são predominantemente descritivos;
- a impossibilidade de estabelecer previamente regulamentos rígidos, sistemáticos, estáticos e generalistas.
- a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto;
- o "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador;
- a impossibilidade de se ter uma hipótese *a priori* e que a pesquisa irá confirmar ou refutar.

Como pesquisa qualitativa, ela aproxima-se do que André (2005) classifica como estudo de caso, pois ela "é o estudo profundo e exaustivo de [...] poucos objetos com contornos claramente definidos, permitindo seu amplo e detalhado conhecimento". Dessa forma, o ambiente do GRUCOGEO e seus participantes constituem um caso.

3.1 O ambiente de investigação

Optamos por realizar nossa pesquisa num grupo de trabalho de dimensão colaborativa. Pensamos em criar um grupo, porém concluímos que não disporíamos do tempo (2 anos) para todas as ações necessárias (constituição do grupo, estruturação e sistematização dos trabalhos, fortalecimento dos laços entre os participantes, a coleta dos dados e sua análise). Decidimos trabalhar no GRUCOGEO e iniciamos nossa participação no grupo também como pesquisador. Isto ocorreu em maio de 2006. Assim, o GRUCOGEO passou a ter dupla importância para mim: como ambiente de estudo e de pesquisa.

O GRUCOGEO foi criado em agosto de 2003 (portanto, ele possuía cinco semestres[30] de existência), pelas professoras formadoras Adair Mendes Nacarato e Regina Célia Grando.[31]

O grupo é composto pelas professoras formadoras, alunos do curso de pós-graduação, professores universitários, professores da rede pública do ensino fundamental e médio, e alunos do curso de licenciatura em Matemática da Universidade São Francisco, campus de Itatiba/SP.

> Esse espaço [o GRUCOGEO] vem se tornando privilegiado para a formação docente. Os graduandos sentem-se motivados a dele participarem para, principalmente, suprirem as lacunas no aprendizado da geometria; os pós-graduandos sentem-se instigados a verem acontecer na prática, muitas das discussões teóricas que realizam durante o curso; os professores da rede vêm em busca de seu desenvolvimento profissional e as professoras formadoras reconhecem nesse espaço a possibilidade de realização de pesquisas sobre a formação e prática docentes. Para todos, esses encontros semanais representam a possibilidade de troca de experiências e aprendizagens compartilhadas. (Grando *et al*, 2005, p.1).

Acreditamos que essa diversidade de experiências e de olhares, a liberdade de expressão e o respeito mútuo são alguns fatores determinantes para que o grupo tenha momentos ricos para a produção e (re)significação de conceitos em Geometria.

Uma característica do grupo é sua inserção num novo paradigma para o processo de ensino/aprendizagem de Geometria

> A trajetória do nosso grupo, coerente tanto com a idéia de trabalho colaborativo, quanto com a perspectiva de uma abordagem exploratória para a Geometria, insere-se nesse paradigma para o ensino de geometria dinâmica que considera os ambientes computacionais como ferramentas para o possível resgate do movimento na geometria, superando as abordagens estáticas, propiciando assim, diferentes formas de representação, analise e provas matemáticas. Acredita-se que uma perspectiva dessa natureza possibilita a produção e (re)significação de saberes docentes e sobre a docência (CARDIM, 2007, p. 96)

Iniciei minhas atividades no grupo em março de 2006 e o freqüentei até junho de 2007. Durante este período houve rotatividade entre os participantes, causada principalmente por questões de incompatibilidade de horários. Porém, vários permaneceram. Essa

[30] Optamos por colocar o tempo de sua existência em semestre, pois o ciclo de suas atividades está diretamente relacionado com o semestre acadêmico, inclusive determinando até a participação de seus integrantes.

[31] Do período de sua criação até o primeiro semestre de 2008 o grupo foi cenário de várias produções, dentre elas, Grando *et al* (2005), Nacarato *et al* (2006), Cardim e Grando(2006), Cardim(2008), Grando, Torriceli e Nacarato (2008) e Nacarato, Grando e Gomes (2008).

permanência, associada ao comprometimento com o grupo, garantiu uma continuidade na execução das atividades propostas e no emprego da metodologia de trabalho.

Naquele período, a dinâmica usada nas reuniões era a apresentação de uma tarefa exploratório/investigativa, de interesse comum, que normalmente possibilitava o uso de diferentes mídias, incluindo o computador. Na maioria das vezes, este trabalho era realizado em pequenos grupos que criavam suas conjecturas, estruturavam suas explicações e/ou provas e redigiam o registro que posteriormente era apresentado e discutido por todos.

Uma outra dinâmica era a aplicação de tarefas pelos professores em suas turmas escolares, muitas vezes, com o auxílio de alunos-estagiários também participantes do grupo. Esses professores retornavam com os dados da execução daquelas tarefas (plano de aula, cronograma de execução, fichas de registros, reflexões etc.) que eram analisadas em grupo.

Com muita freqüência as professoras formadoras faziam a pergunta “Por que?” provocando momentos de supressa e reflexão pois, muitas vezes, o assunto era de domínio geral e por isso não parávamos para um “olhar reflexivo” sobre ele. Alguns destes “estranhamentos” extrapolavam os momentos do encontro e eram remoídos, estudados, durante a semana voltando à pauta na próxima segunda-feira. Outra prática comum das professoras formadoras era a articulação entre as atividades e os “fundamentos teórico-epistemológicos e metodológicos para o ensino da Geometria” (NACARATO, 2006, p.201).

3.2 As atividades do grupo

No decorrer do período investigado (março de 2006 a junho de 2007) o grupo esteve envolvido com diversas atividades. Essas atividades não foram preparadas para atender à pesquisa, ou seja, elas foram atividades que o grupo desempenhou semanalmente dentro dos seus objetivos de trabalho.

Nessa pesquisa, foram consideradas quatro conjuntos de atividades para a análise: (1) A construção da reta perpendicular atribuída ao Apolônio; (2) Desigualdade triangular; (3) A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo e (4) Sólidos platônicos truncados. Suas datas de execução estão relacionadas no quadro a seguir.

ATIVIDADES	PERÍODO DAS ATIVIDADES
Atividade 1 - A construção da reta perpendicular atribuída a Apolônio	13/03/2006 a 22/05/2006
Atividade 2 - Desigualdade triangular	29/05/2006 a 21/08/2006
Atividade 3 - A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo	18/09/2006 a 06/11/2006
Atividade 4 - Sólidos platônicos truncados	12/03/2007 a 11/06/2007

Quadro 3.1 Relação de datas por atividades

Um quadro detalhado sobre todas as atividades desenvolvidas pelo grupo no período dessa pesquisa e que exemplificam seu movimento, está disponível no Anexo I.

Vale à pena destacar que o número de tarefas propostas não foi grande, visto que no GRUCOGEO não há a exigência de um currículo regular de ensino, possibilitando, assim, a exploração e o aprofundamento das atividades, sem uma preocupação com o tempo.

A sistematização dos dados foi feita a partir de notas de campo do pesquisador, anotações dos participantes, áudios-gravações e relatórios produzidos no grupo. No segundo semestre de 2006 e primeiro semestre de 2007, passamos a utilizar também as vídeos-gravações.

3.3 Opção de sistematização dos dados

Em nossa pesquisa, optamos por construir esquemas usando o programa *eMindMaps* versão 2.0.7 da empresa MindJet[32]. Esse programa tem como função apenas facilitar a visualização e manipulação dos dados inseridos nele. Dessa forma, fica mais fácil a reorganização desses dados, podendo ser "copiados", "recortados", "colados" e "apagados" conforme nossa necessidade. Ele não possui nenhuma função de categorização ou análise de forma automática ou mesmo parametrizada. Todos os dados são inseridos pelo pesquisador manualmente.

Esta organização foi feita inicialmente pela seqüência cronológica das reuniões, baseada nas anotações do pesquisador e dos integrantes do GRUCOGEO, nas audiogravações e nas vídeogravações. A partir desse material, fomos pinçando momentos, falas, ações que se destacaram, na nossa interpretação. Após este trabalho, identificamos seis aspectos que entendemos como relevantes para nossa pesquisa, que serão apresentados a seguir, e que nos permitiram reorganizar os dados para serem apresentados.

3.4 A pesquisa e seus objetivos

Dentro de todo este cenário, retomamos nosso problema de pesquisa que busca investigar os processos de provas e validações em matemática escolar com atividades de investigações geométricas em diferentes mídias, num ambiente de dimensão colaborativa.

Os objetivos da presente pesquisa se constituem em:

[32] Site oficial da empresa http://www.mindjet.com/us/.

1. Analisar os processos de provas e validações em atividades de natureza investigativa, em diferentes mídias, mais especificamente, na utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica;
2. Investigar as contribuições para professores e futuros professores de um trabalho de dimensão colaborativa que visa os processos de provas e validações em Geometria.
3. Entender a natureza das provas e validações para o contexto da matemática escolar, seja diretamente relacionado ao aluno ou relacionado à formação do professor.

3.5 Procedimento de análise

Analisamos cada uma das atividades separadamente. Em cada uma delas buscamos considerar alguns aspectos relevantes que estão diretamente relacionados com os objetivos dessa pesquisa. São eles:

1. A potencialidade da atividade como incentivadora de formulação de provas (Como as atividades de investigação incentivaram as provas);
2. Uso de diferentes mídias no contexto da Matemática Escolar (Quais mídias foram mobilizadas na atividade?);
3. A aproximação com o "fazer matemático";
4. A importância do trabalho colaborativo para os participantes na realização da atividade;
5. A dupla dimensão da aprendizagem: para os professores escolares (conhecimento pedagógico) e para os futuros professores (conhecimento como conteúdo escolar)
6. As provas/validações como mobilizadoras no processo de (re)siginificação do conhecimento no contexto da matemática escolar.

A seguir, apresentaremos uma visualização dos aspectos que são considerados e sua relação com os objetivos.

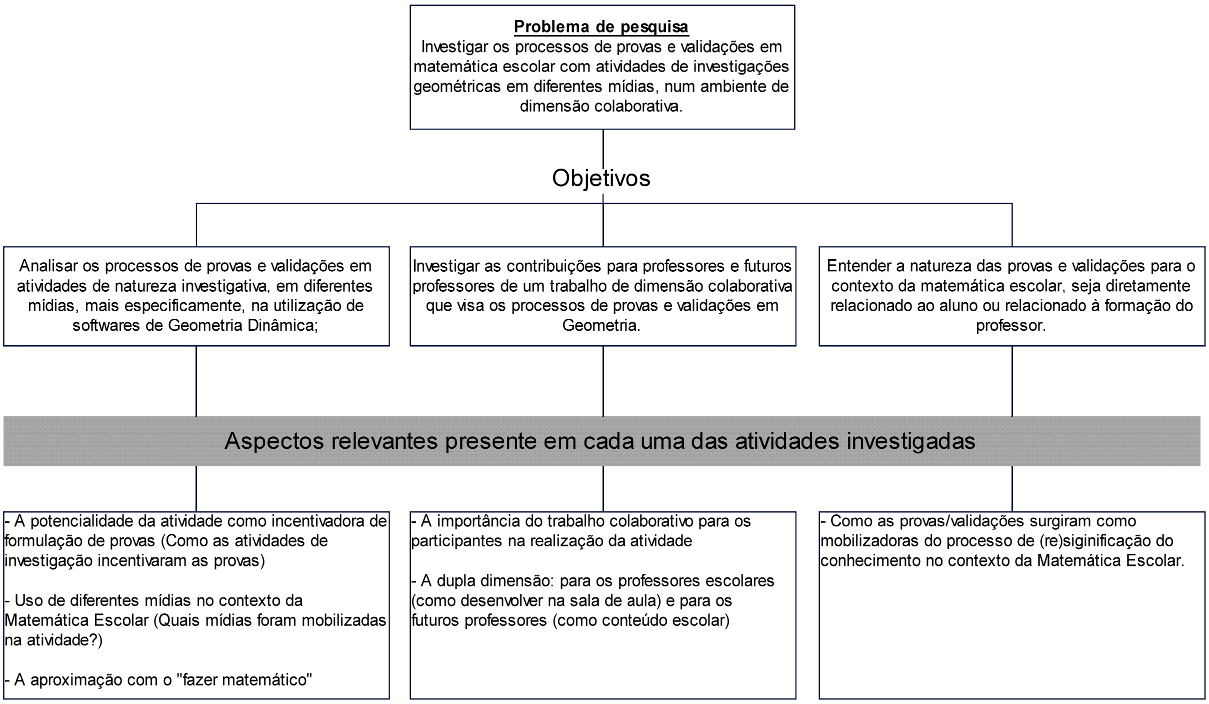


Figura 3.1 - Esquema representativo dos aspectos de análise e sua ligação aos objetivos da pesquisa

Para cada atividade destacamos alguns episódios. Entendemos episódio como um momento de interação entre os sujeitos e o pesquisador, com começo, meio e fim e que possa evidenciar o movimento de argumentação e provas na resolução das tarefas propostas.

Os episódios foram agrupados e discutidos dentro dos seis aspectos considerados na análise apresentados acima.

Assim sendo, apresentamos a seguir as quatro atividades analisadas:

3.5.1 Atividade 1: A construção da reta perpendicular atribuída a Apolônio

3.5.2 Atividade 2: desigualdade triangular

3.5.3 Atividade 3: adição das medidas dos ângulos internos do triângulo

3.5.4 Atividade 4: sólidos platônicos truncados

3.5.1 Atividade 1: A construção da reta perpendicular atribuída a Apolônio

“Para construir uma perpendicular a uma reta *AB* por um ponto *C* sobre ela, Apolônio (225 a.C.) sugere que se tome dois pontos *D* e *E* em *AB* de modo que o segmento *CE* tenha a mesma medida do segmento *DC*. Depois, que se tracem duas circunferências, uma com centro em *D* e raio *DE* e a outra de centro em *E* e mesmo raio. Obtém-se assim o ponto *F*, uma das interseções das duas circunferências. A reta *CF* será perpendicular à reta *AB*. Prove a validade dessa construção. Como você construiria, por outro método, a perpendicular a uma reta dada por um ponto sobre ela? Valide matematicamente a construção que você acabou de fazer.”

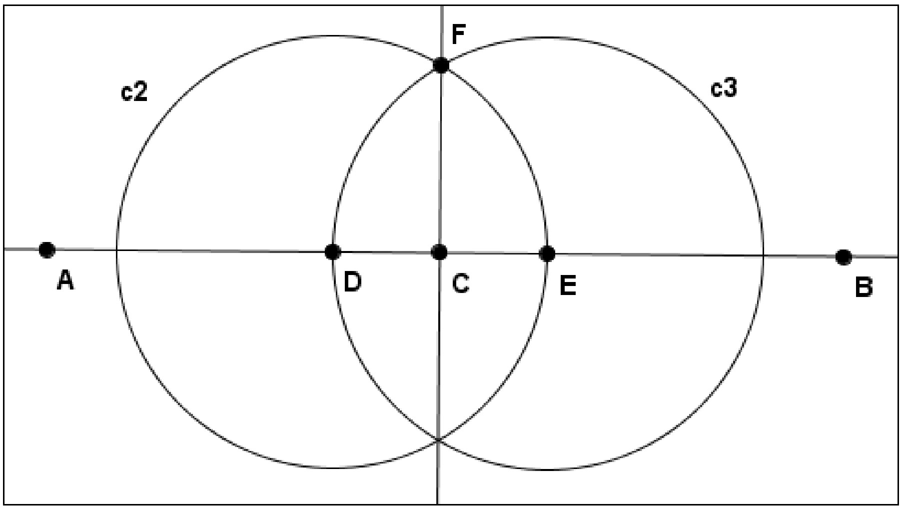


Figura 3.2 – Construção proposta por Apolônio

Os dados dessa atividade foram levantados a partir dos meus registros, registros dos participantes do grupo, relatórios dos grupos e transcrição de áudios-gravações de alguns encontros.

Ela precisou de nove encontros para ser finalizada, pois foram necessárias algumas interrupções para discussão de outros assuntos que exigiam soluções em curto prazo, como por exemplo, orientações sobre a preparação de material para oficina, de artigos e pôsteres de integrantes do grupo para apresentação em evento estadual.

3.5.2 Atividade 2: desigualdade triangular

Essa atividade iniciou-se na reunião do dia 29 maio de 2006 quando, depois de encerrada a atividade do Apolônio e feita uma discussão sobre a potencialidade do uso da informática no ensino da geometria, o grupo iniciou um debate na tentativa de criar uma nova atividade de tal modo que os professores pertencentes ao grupo pudessem aplicá-la com seus alunos. Inicialmente, foram propostas atividades sobre desigualdade triangular, relações trigonométricas e relação entre perímetro e área. Optou-se pela atividade da desigualdade triangular com a proposta de incluir-se o Cabri.

Na reunião do dia 05 de junho de 2006, levei uma construção feita no Cabri, ilustrada pela figura 3.3, na qual os alunos deveriam movimentar os pontos *A*, *B* e *C* que alteram o tamanho dos lados *L1*, *L2* e *L3* do triângulo, e observar o resultado na construção. Baseado nessa exploração esperava-se que os alunos chegassem ao caso geral.

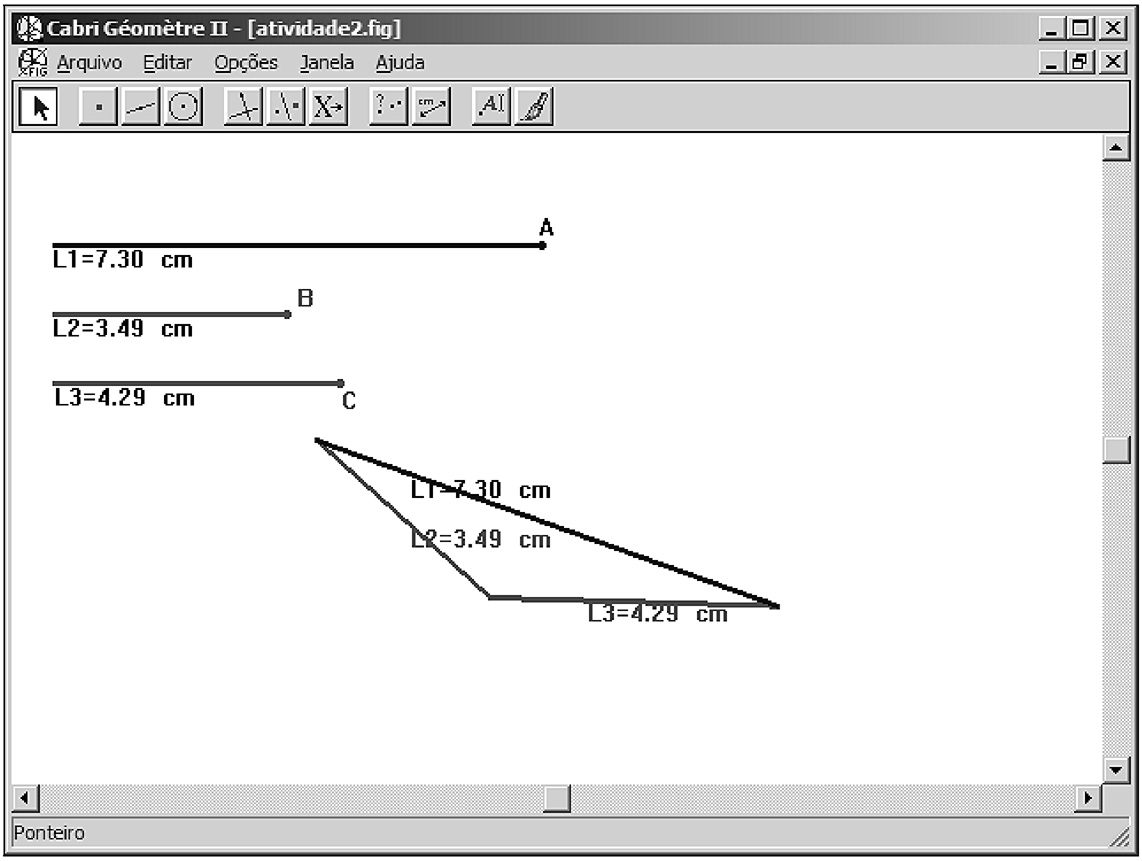


Figura 3.3 – Tela do Cabri com a construção para estudo da desigualdade triangular

No início do segundo semestre letivo de 2006, o professor Paulo aplicou a atividade usando material concreto com suas turmas de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental e nos dias 14 e 21 de agosto de 2006, trouxe os resultados ao grupo para discussão. Na apresentação, ele explicou:

> *Durante as férias organizei o material. Já na primeira semana de aula eu fiz a atividade* [...] *até por questão do planejamento.*
>
> *Apliquei o material, colhi alguns registros dos alunos.* [...] *Alguns deles eu digitei ai nessas duas páginas, uma para 5ª série e a outra para 6ª série. Fiz no mesmo dia com as duas turmas.* [...]
>
> *Ela* [a atividade] *consistia em jogar três dados e havia palitos com seis cores diferentes e de acordo com os números que caiam nos dados eles pegavam os três palitos correspondentes e verificavam se aqueles três palitos formariam ou não o triângulo. Se formando o triângulo, eles já responderiam aqui no lado, na tabela.* [...]
>
> *Cada cor correspondia a um tamanho específico. Fiz minha unidade com um centímetro e meio. A partir de um centímetro até seis unidades* [Transcrição da vídeo-gravação].

As fontes usadas na análise sobre a definição, estruturação e discussão inicial sobre a atividade foram os meus registros e os registros dos participantes. Para a discussão da atividade aplicada pelo professor Paulo no grupo, foi usado o conjunto de registros produzidos pelos alunos, as impressões do professor Paulo e os vídeos-gravações das reuniões do dia 14 e 21 de agosto de 2006. A partir desses dados, procurou-se entender como os alunos mobilizaram seus conhecimentos durante a atividade.

3.5.3 Atividade 3: adição das medidas dos ângulos internos do triângulo

O objetivo dessa atividade foi que o grupo propusesse uma tarefa exploratório-investigativa para ser executada por algum professor pertencente ao grupo, junto com seus alunos na escola básica.

O grupo assumiu a responsabilidade por todos os passos para essa atividade. Pudemos identificar três momentos: a preparação, a execução e a discussão.

Na etapa de discussão, foram necessárias duas reuniões para se definir a tarefa, ou seja, os professores que iriam executá-la, a forma de trabalho. Enfim, desde a configuração do programa até a postura do professor. Este momento inicial foi importante, pois permitiu dimensionar o trabalho que é despendido para se preparar uma tarefa exploratório-investigativa. O assunto escolhido pelo grupo foi a adição das medidas dos ângulos internos do triângulo e, como conseqüência, o teorema do ângulo externo.

A tarefa deveria trabalhar com a mídia informática usando o programa CaR.

Dois professores se dispuseram a executar a tarefa com seus alunos, fora do horário de aula, usando o laboratório de informática do GRUCOGEO: o professor Paulo[33] e a professora Olga.

Na etapa de execução, ocorrida em dois dias, os integrantes do grupo auxiliaram os professores das turmas a orientarem e tirar as dúvidas de seus alunos durante as oficinas. As construções propostas eram também feitas num *notebook* e projetadas por meio de um *datashow* para que os alunos tivessem uma referência no caso de dúvidas durante a construção e/ou medida dos ângulos.

A última etapa, a discussão, permitiu o fechamento do ciclo proposto com a reflexão sobre a execução das oficinas, os problemas técnicos referentes à filmagem, a postura dos professores, a ação dos alunos etc.

3.5.4 Atividade 4: sólidos platônicos truncados

No encerramento das atividades de 2006, alguns integrantes do GRUCOGEO solicitaram que no primeiro semestre de 2007 fizéssemos algumas atividades abordando

[33] Os integrantes do GRUCOGEO permitiram a utilização de seus nomes verdadeiros para a apresentação dos dados.

Geometria Espacial. A sugestão foi bem recebida, uma vez que esta disciplina é pouco trabalhada nos curso de ensino médio e de licenciatura em matemática.

Praticamente ocupamos o primeiro semestre de 2007 com duas atividades, sendo que no nosso entendimento, a primeira delas permitiu uma preparação para o desenvolvimento da segunda.

Foram usadas várias mídias para dar suporte à execução dessa tarefa: papel, massa de modelar, isopor, sólidos em acrílico e o programa Cabri3D.

Após a apresentação das opções teórico-metodológicas da pesquisa, bem como os procedimentos e as atividades desenvolvidas no âmbito do GRUCOGEO, no próximo capítulo apresentamos “um mergulho” nos dados empíricos produzidos a fim de atingir os objetivos propostos dessa pesquisa.

CAPITULO 4 – MERGULHANDO NOS DADOS... ATRIBUINDO SENTIDOS: UMA INTERPRETAÇÃO POSSÍVEL

No presente capítulo, apresentamos e analisamos as atividades desenvolvidas no GRUCOGEO.

Conforme descrevemos no capítulo anterior, em cada atividade trouxemos falas dos participantes em episódios que foram montados a partir de recortes dos encontros do GRUCOGEO.

Apresentamos inicialmente, os dados produzidos nos subgrupos/grupos e, em seguida, os analisamos quanto aos aspectos definidos. Ao todo, discutiremos falas e episódios destacados a fim de focar os seis aspectos considerados relevantes para atingir os objetivos da pesquisa:

1. A potencialidade da atividade incentivando a formulação de provas (Como as atividades de investigação incentivaram as provas);
2. Diferentes mídias no contexto da Matemática Escolar (Quais mídias foram mobilizadas na atividade?);
3. A aproximação com o “fazer matemático”;
4. A importância do trabalho colaborativo para os participantes na realização da atividade;
5. A dupla dimensão da aprendizagem: para os professores escolares (conhecimento pedagógico) e para os futuros professores (conhecimento como conteúdo escolar)
6. As provas/validações como mobilizadoras no processo de (re)siginificação do conhecimento no contexto da matemática escolar.

4.1 Atividade 1: A construção da reta perpendicular atribuída a Apolônio

A primeira reunião relacionada a essa atividade foi no dia 13 de março de 2006, o segundo encontro do grupo daquele semestre, e sua conclusão foi na reunião do dia 29 de maio de 2006. Portanto, foram necessários nove encontros para realizá-la. Porém, conforme registramos anteriormente, tivemos algumas interrupções nas reuniões para discussão de outros assuntos.

O texto da tarefa proposta foi:

> ***Para construir uma perpendicular a uma reta AB por um ponto C sobre ela, Apolônio (225 a.C.) sugere que se tome dois pontos D e E em AB de modo que o segmento CE tenha a mesma medida do segmento DC. Depois, que se tracem duas circunferências, uma com centro em D e raio DE e a outra de centro em E e mesmo raio. Obtém-se assim o ponto F, uma das interseções das duas circunferências. A reta CF será perpendicular à reta AB.***
> ***Prove a validade dessa construção.***
> ***Como você construiria, por outro método, a perpendicular a uma reta dada por um ponto sobre ela?***
> ***Valide matematicamente a construção que você acabou de fazer.***

Para essa atividade, foram formados subgrupos que ficaram responsáveis por executá-la e por fazer o registro das suas ações para que, posteriormente, fossem apresentadas e discutidas no grupo todo. Como a atividade foi desenvolvida em várias reuniões, alguns subgrupos tiveram alteração em seus componentes, pois nem todos vieram a todas as reuniões.

Inicialmente, os subgrupos fizeram a construção que aparece no enunciado da atividade discutindo-a entre seus integrantes. Apesar disso, a prova da validade dessa construção aparece de forma reduzida nos registros da atividade.

Para responder a questão "Como você construiria, por outro método, a perpendicular a uma reta dada por um ponto sobre ela?", os subgrupos utilizaram diversas mídias, que estamos agrupando em dois conjuntos: as mídias analógicas e a mídia digital. Adotamos a designação de "mídias analógicas" para todas as mídias que não são o computador e o programa Cabri Géometrè, identificada aqui como "mídia digital".

Após agruparmos os dados produzidos a partir dos registros dos participantes, dos meus registros e das transcrições das audiogravações, fizemos uma organização preliminar[34]. Desta, recortamos alguns episódios e falas que são apresentados e comentados a seguir.

4.1.1 Construções alternativas com mídias analógicas

Dentro deste conjunto, das construções com mídias analógicas, estamos trazendo quatro construções.

4.1.1.1 Construção com esquadro e régua

A primeira delas, construída pelo subgrupo formado pela pós-graduanda Viviane e por mim, utilizou a régua e o esquadro. A régua foi colocada sobre a reta *AB* e o esquadro teve um de seus lados que formam o ângulo de 90º apoiado sobre a régua, conforme mostrado na

[34] Ver Anexos I e II.

figura 4.1. Deslocando-se o esquadro até o ponto *C*, traçou-se, usando o outro lado que compõe o ângulo de 90º do esquadro, a reta perpendicular. A validação foi garantida pelo ângulo reto do esquadro.

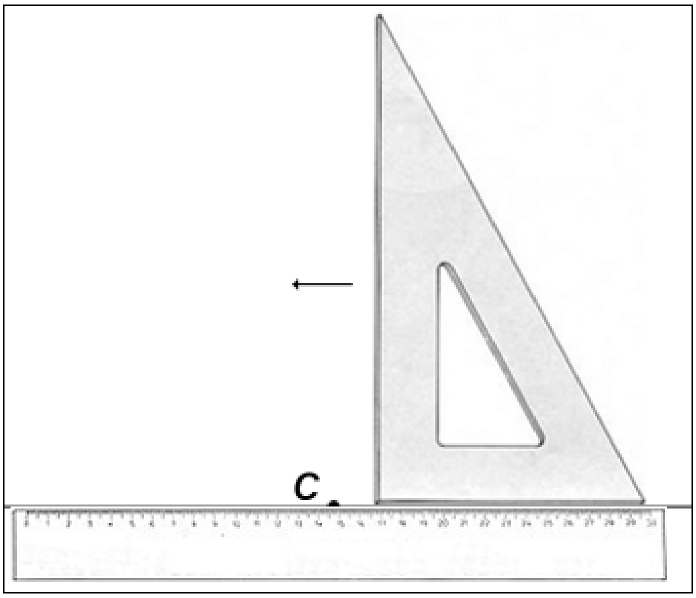


Figura 4.1 - Construção com régua e esquadro

Na Matemática Escolar esses instrumentos estão presentes e esta poderia representar uma prova realizada pelos alunos da Educação Básica.

4.1.1.2 Construção com dobradura

A segunda construção foi feita pelo subgrupo que possuía inicialmente as professoras escolares Olga e Adriana[35] que utilizaram as mídias papel e dobradura para fazer a construção alternativa.

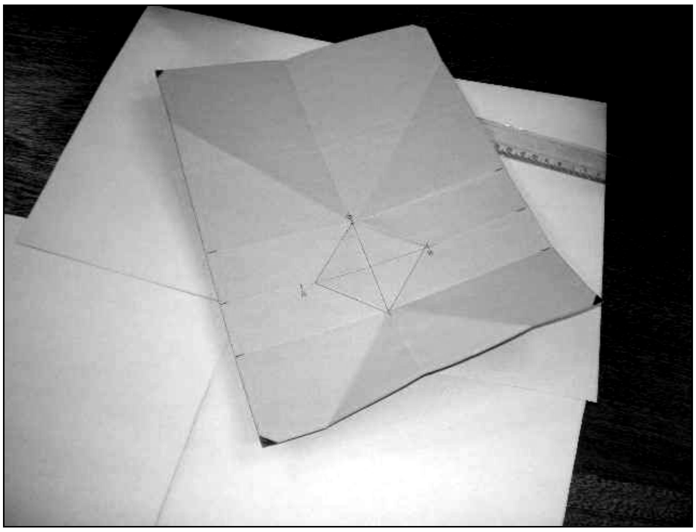


Figura 4.2 - Construção alternativa utilizando papel e dobradura

[35] Como a dobradura foi retomada em mais de um momento, o grupo alterou seus integrantes.

A dificuldade com essas mídias foi muito grande, tanto ao executar a construção junto com as professoras que a propuseram quanto posteriormente por meio do registro passo-a-passo e ilustrado. Por mais que entendêssemos as propriedades geométricas envolvidas não conseguíamos transformá-las em ações na dobradura.

Vale ressaltar que o subgrupo que a propôs possui uma "história pedagógica" com este recurso uma vez que duas de suas integrantes, as professoras Olga e Adriana, são professoras de Ensino Fundamental e desenvolvem atividades com dobraduras no ensino da Geometria.

Durante a socialização das construções, discutiu-se a dificuldade deste registro:

> ***Pós-graduando/pesquisador Jorge:*** *Será que nós não conseguimos porque nós não conseguimos estruturar um vocabulário próprio para esse tipo de atividade? Foge do nosso contexto.*
>
> ***Formadora Regina:*** *É. Porque, por exemplo, as validações por dobraduras nós vemos só no Ensino Fundamental de Primeira a Quarta Séries, você não vê esse tipo de construção de Quinta a Oitava e Ensino Médio, se você for fazer isso no Ensino Médio vão falar que você está matando aula.*
>
> ***Pós-graduando/pesquisador Jorge:*** *Então nós não temos o domínio da linguagem apropriada para comunicar aquilo que estamos fazendo. Pode ser por isso que não conseguimos redigir ou registrar.*
>
> ***Professora Olga:*** *Mas, não dá viu Jorge, por que não dá? Pois na dobradura sempre tem figura e não tem como explicar não é só o plano, acho que envolve o espaço.*
>
> ***Formadora Regina:*** *Tem o movimento, e tem o movimento 3D que não é uma questão no caso da tela do computador, é um movimento que não dá para ser mostrado pelo computador. Exemplo da dobradura dela* [Professora Adriana] *"vire para trás" como eu vou virar para trás?*[Transcrição da fita da socialização da atividade]

Entendemos que além das questões relacionadas à descrição de um movimento na dobradura, a falta de domínio da linguagem relacionada à geometria das dobraduras dificulta a produção de um registro escrito que seja significativo para quem não domina tal linguagem. Fundamentamos nossa opinião no fato de existirem vários livros sobre dobraduras e dobraduras aplicadas à Matemática, como por exemplo, Matemática e Origami de Eliane Moreira da Costa e Origami Matemáticos de David Mitcheli.

Devido à dificuldade com o registro escrito, optou-se no grupo pelo registro fotográfico, mas, mesmo assim, esse registro não se mostrou suficiente para que todos do grupo reproduzissem a dobradura.

4.1.1.3 Construção do ângulo 90°=60°+30°

Essa construção, terceira desse conjunto, representou a proposta de dois subgrupos e tem sua justificativa baseada na soma das medidas de ângulos, 60º+30º=90º, garantida por uma construção geométrica usando circunferências de raios congruentes.

Na figura 4.3, similar à construção feita com compasso e régua, podemos entender o raciocínio adotado: as intersecções das circunferências *c1*, *c2* e *c3*, de raios congruentes, determinam os pontos *N* e *O* que garantem aos ângulos *ECN*, *NCO* e *OCD* o valor de 60º. As circunferências *c4* e *c5* garantem a bisecção do ângulo *NCO* pela bissetriz *PC*, fazendo com que o ângulo *NCP* tenha o valor de 30º. Desta forma, $\angle ECP = \angle ECN + \angle NCP$, ou seja, $\angle ECP = 60^{o}+30^{o} = 90^{o}$, garantindo a perpendicularidade entre as retas *EC* e *PC*.

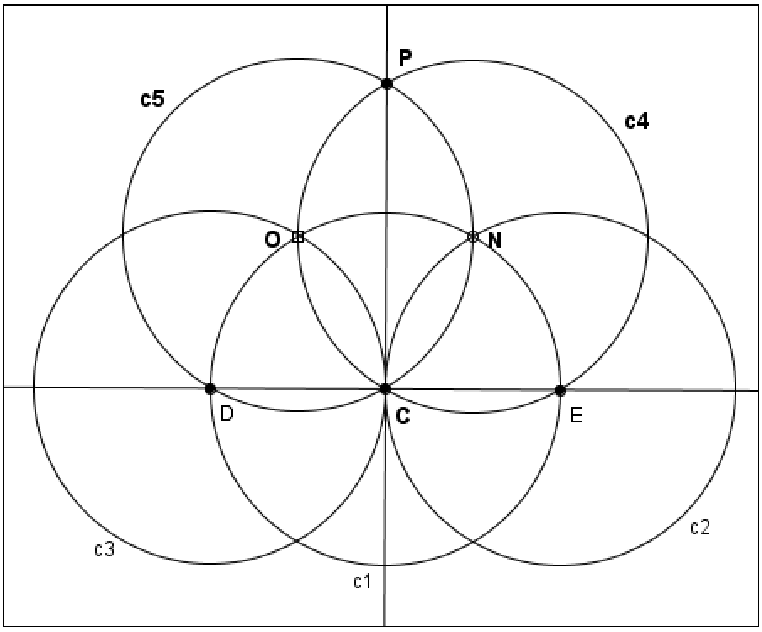


Figura 4.3 – Construção similar à proposta de alguns grupos

A construção iniciou-se pela propriedade do triângulo eqüilátero: se um triângulo tem três lados de medidas congruentes, consequentemente tem-se neste triângulo três ângulos com medidas congruentes, ou seja, 60°. Assim, temos os triângulos eqüiláteros congruentes *ECN*, *NCO* e *OCD*.

4.1.1.4 Construção do ângulo 90°=30°+30°+30°

A quarta construção possibilitou interessantes reflexões no grupo.

Ela foi proposta pelos alunos da graduação Henrique, Carina e Kelly que tinham a intenção de construir três ângulos consecutivos com a medida de 30°, garantindo-se, assim, o ângulo reto. Para isso, eles partiram da seguinte conjectura:

> ***Ao tomarmos o raio de uma circunferência como referência e a dividirmos em 6 arcos, conseguimos um ângulo de 60º. Se usarmos a metade do raio poderemos dividi-la em 12 arcos de 30º cada.***

Essa construção foi feita usando compasso e régua e no momento de socialização foi feita também no quadro-negro usando-se o "compasso de professor".

Ao se usar esta mídia (o compasso e a régua) para fazer a construção que validaria a conjectura inicial, a precisão do traçado influenciou diretamente a opinião do grupo. Conforme se pode observar nas figuras 4.4 e 4.5, a seguir, dependendo do grau de precisão do instrumento, seja ele a qualidade do compasso ou a espessura da grafite para o traçado pode-se ter uma alteração na construção. Talvez os erros ilustrados pudessem passar por erros de imprecisão e mesmo assim validar a construção, como de fato aconteceu no grupo.

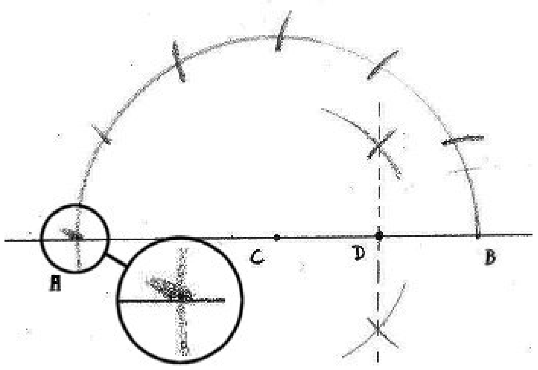


Figura 4.4 - Desenho da construção do suposto ângulo de 30° com grafite grosso

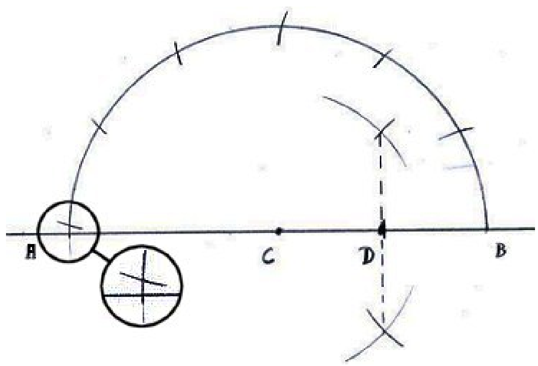


Figura 4.5 - Desenho da construção do suposto ângulo de 30° com grafite fino

No registro deste subgrupo foi incluído o seguinte roteiro para a sua construção:

> ***Seja uma reta r, marcar sobre ela o ponto C. Com centro em C traçar uma circunferência de raio qualquer. Nas intersecções da circunferência com a reta, marcar os pontos A e B. Marcar, sobre o segmento CB o ponto médio D. Com circunferências de raio DB dividir a circunferência em 12 partes.***

Como não participei da socialização dessa construção tive contato com ela a partir do registro do subgrupo.

Mesmo sabendo que o grupo a tinha validado, essa construção me deixou intrigado, pois, intuitivamente, suspeitei de sua validade. Trabalhei nela durante a semana, inicialmente fazendo uma verificação no programa de Geometria Dinâmica CaR e, confirmada minha suspeita, procurei uma prova dedutiva. Na reunião seguinte compartilhei com o grupo o resultado, conforme apresentado no relatório da atividade, escrito pelo aluno Thiago:

> O Jorge muito incomodado com aquela questão começa a estudar o caso, não consegue achar uma resposta, então procura um amigo que é matemático da Universidade onde ele leciona e juntos conseguem fazer a demonstração. Agora satisfeito, pois realmente aquela construção não satisfazia o objetivo da questão.

Este episódio é um bom exemplo de aplicação da prova na função de validação, conforme referido no capítulo 2. Diante daquela conjectura era necessário verificar a validade da construção, portanto ela fez sentido e tinha significado para mim, que a partir da intuição senti-me incomodado e procurei a validação por meio da prova:

<table>
<tr>
<td>

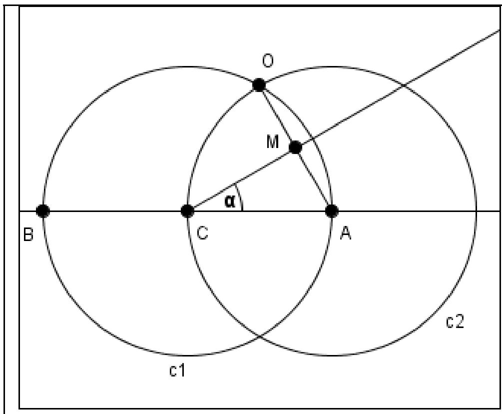


Figura 4.6 – Construção do ângulo de 30º

</td>
<td>

<u>Parte 1</u>

$c1$ e $c2$ possuem mesmo raio r

$$sen\ \alpha = \frac{AM}{AC}$$

$$sen\ \alpha = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{r}{2} \times \frac{1}{r}$$

$$sen\ \alpha = \frac{1}{2}$$

$$arcsen\ (\frac{1}{2}) = 30^{o}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

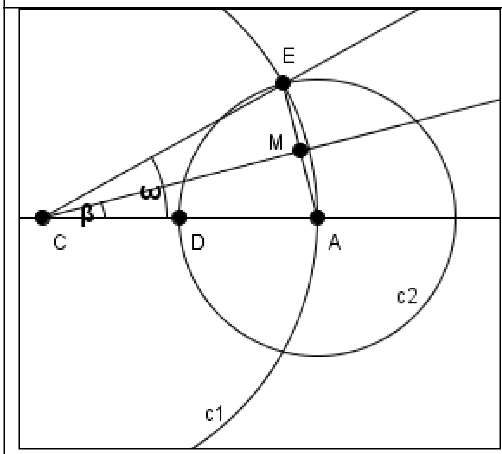


Figura 4.7: Construção do suposto ângulo de 30°

</td>
<td>

<u>Parte 2</u>

$$\omega = 2\beta$$

$c1$ possui raio $r = CA$

$$EA = DA = \frac{CA}{2}$$

$$MA = \frac{CA}{4}$$

$$sen\beta = \frac{MA}{CA}$$

$$sen\beta = \frac{\frac{r}{4}}{r} = \frac{r}{4} \times \frac{1}{r}$$

$$sen\beta = \frac{1}{4}$$

$$arcsen\left(\frac{1}{4}\right) \approx 14{,}477^{o}$$

$$\omega = 2\beta \approx 2 \times 14{,}477 \approx 28{,}954^{o}$$

</td>
</tr>
</table>

Esta prova permitiu identificar a diferença entre as medidas dos dois ângulos. Ela baseou-se no cálculo do seno num triângulo retângulo, por meio da relação entre o cateto oposto e a hipotenusa e, posteriormente, o cálculo do ângulo por meio da função arcoseno.

Na parte 1 da prova, partiu-se do ângulo de 60° que foi dividido ao meio pela bissetriz *CM* originando o ângulo α. Na parte 2, partiu-se do ângulo ω, supostamente de 30°. Para usar o mesmo raciocínio anterior, dividiu-se este ângulo pela bissetriz *CM* e obtendo-se o ângulo β.

Pode-se observar que a diferença é pequena: aproximadamente 1,046°.

Durante a atividade, ao usarmos a mídia digital, o Cabri Géometrè, o mesmo grupo refez a construção e por meio dos recursos disponíveis neste programa, foi possível verificar o erro da conjectura. Inclusive, foi este o procedimento que adotei: antes de buscar a prova apresentada acima, busquei a confirmação de minhas suspeitas no programa de Geometria Dinâmica, conforme ilustrado na figura 4.8.

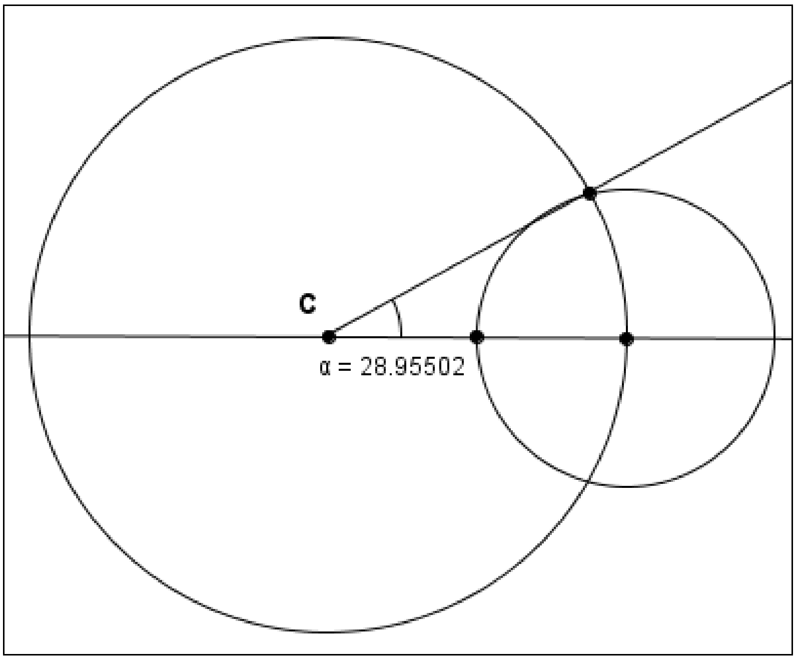


Figura 4.8: Verificação da conjectura sobre a construção do ângulo de 30°

Segundo De Villiers (2001),

> Com raras excepções, os professores de Matemática parecem acreditar que apenas a demonstração fornece a certeza para o matemático e que é a única autoridade para estabelecimento da validade de uma conjectura. Contudo, a demonstração não é um requisito necessário para a convicção – pelo contrário, a convicção é mais frequentemente um requisito para a procura de uma demonstração. (Por que esquisita e obscura razão gastaríamos por vezes

> meses a tentar provar certas conjecturas, se não estivéssemos já convencidos da sua verdade?) (p.32)

Neste caso, usou-se o programa de Geometria Dinâmica para confirmar o erro da conjectura e, posteriormente, usou-se a prova para entender ou explicar este erro.

Este episódio é um exemplo de provas que assumem o *status* de provisórias, pois apesar de serem aceitas na apresentação foram questionadas posteriormente e rediscutidas no grupo. O GRUCOGEO, naquele momento, foi a comunidade que referendou aquela validação: a partir de uma intuição, o subgrupo estruturou o raciocínio na forma de um roteiro para a construção geométrica (que foi o suficiente para convencer seus membros) e a submeteu aos demais participantes do GRUCOGEO que também se convenceram da sua validade.

Graças ao registro e a divulgação, os participantes que não estavam presentes, incluindo eu, puderam ter acesso ao assunto e trazer um novo olhar sobre ele, inclusive refutando a construção e apresentando uma prova que mostra a diferença entre o proposto e o construído.

4.1.2 Construções alternativas com mídia digital

As primeiras construções no Cabri Géometrè foram as réplicas das feitas com compasso e régua. Aqueles que possuíam um pouco mais de habilidade no uso do programa, logicamente, sentiram-se mais à vontade.

À medida que os participantes foram se ambientando com o programa foram surgindo construções criativas. Trouxemos para a análise três conjuntos daquelas construções. Estamos considerando-as "conjunto", pois usando uma mesma estratégia de construção os subgrupos fizeram pequenas alterações que possibilitaram novas análises.

4.1.2.1 Construção baseada na interseção de circunferências de raios congruentes

Este primeiro conjunto de construções foi praticamente o mesmo daquele feito com compasso e régua. Ele baseou-se na soma das medidas dos ângulos (60º+30º=90º), porém, despertou novas observações. Foram criados vários polígonos e como validação para esses, usou-se o raio das circunferências ou a perpendicularidade das suas diagonais, como mostrado na figura 4.9, 4.10 e 4.11.

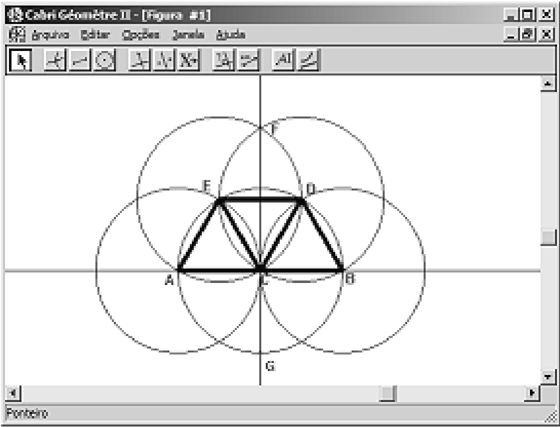


Figura 4.9 - Tela do Cabri com os desenhos dos Triângulos eqüiláteros

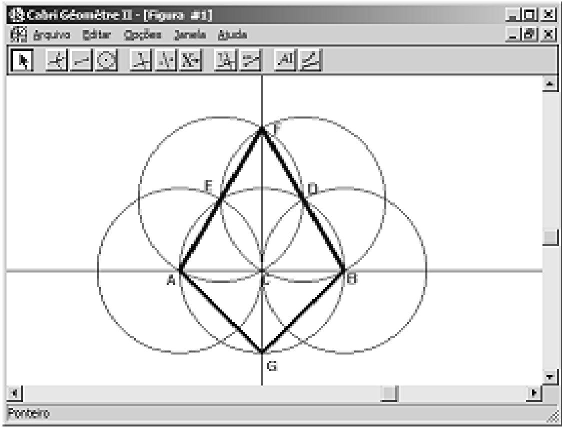


Figura 4.10 - Tela do Cabri com os desenhos do Romboide

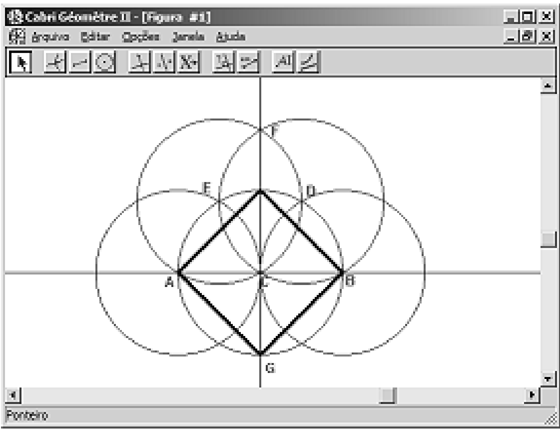


Figura 4.11: Tela do Cabri com o desenho do Quadrado

A facilidade de fazer, desfazer e refazer construções é que possibilitou alterações na proposta inicial do subgrupo e, assim, chegarem nestas novas construções.

4.1.2.2 Exploração de ferramentas[36] do Cabri

Neste segundo conjunto, podemos observar a nítida influência da mídia informática facilitando a criação de novas conjecturas, corroborando com que apontamos anteriormente, na introdução dessa pesquisa, sobre uma das formas como entendemos o uso da informática: o de aprender matemática.

A possibilidade de fazer a construção, mover pontos e receber o retorno (*feedback*) imediato mudou a estratégia de criação de conjecturas. O pouco domínio do uso do programa não foi a maior barreira, pois de uma forma ou de outra os participantes do GRUCOGEO conseguiram explorar a ferramenta. O maior problema, conforme o registro da aluna Kelly, foi/é o conhecimento sobre os conceitos da geometria:

[36] Estamos chamando de “Ferramentas” as diversas opções e funcionalidades que existem no programa, como por exemplo, “Ponto médio”, “Reta”, “Mediatriz”, etc.

> Eu acho que pra mim o maior problema é o conhecimento geométrico que eu não sei, porque o Cabri você vai mexendo e descobre, eu, por exemplo, descobri ferramentas lá, é só não ter medo de clicar que você vai descobrindo, agora se você não tiver os outros conhecimentos você não cria. [Registro escrito sobre a atividade feito pela graduanda Kelly]

Foi aproximando-se desta forma de agir, “mexendo e descobrindo”, que o subgrupo das professoras Olga e Alice fez suas experimentações. Com o conhecimento de geometria que possuem, elas criaram uma dinâmica de exploração: ao “descobrirem” o modo de usar uma nova ferramenta do programa, elas a associavam aos resultados das experiências anteriores e criavam uma nova conjectura que era explicada oralmente na estrutura “Se ... então ... porque ...” e em seguida iniciavam as experimentações. Dessa forma, elas exploraram ferramentas como, por exemplo, Mediatriz, Rotação, Bissetriz, Simetria, Simetria central, Triângulo e Paralela.

Foi interessante observar o ciclo de descoberta da ferramenta, conjectura (criada a partir da experiência imediata com alguma ferramenta usada anteriormente) e o teste da conjectura que possibilitava duas situações: (1) a validação, que nesse caso levava à procura por uma outra ferramenta ou (2) a refutação, que levava a uma reestruturação na conjectura ou ao abandono desta e a procura por uma nova ferramenta. Este ciclo está representado no esquema da figura 4.12. A validação era tanto pelo programa, usando-se a ferramenta “Propriedade”, quanto pelo conceito geométrico envolvido na construção. Esta ferramenta verifica algumas propriedades entre elementos de uma construção (colinearidade, paralelismo, perpendicularismo, eqüidistância e pertence).

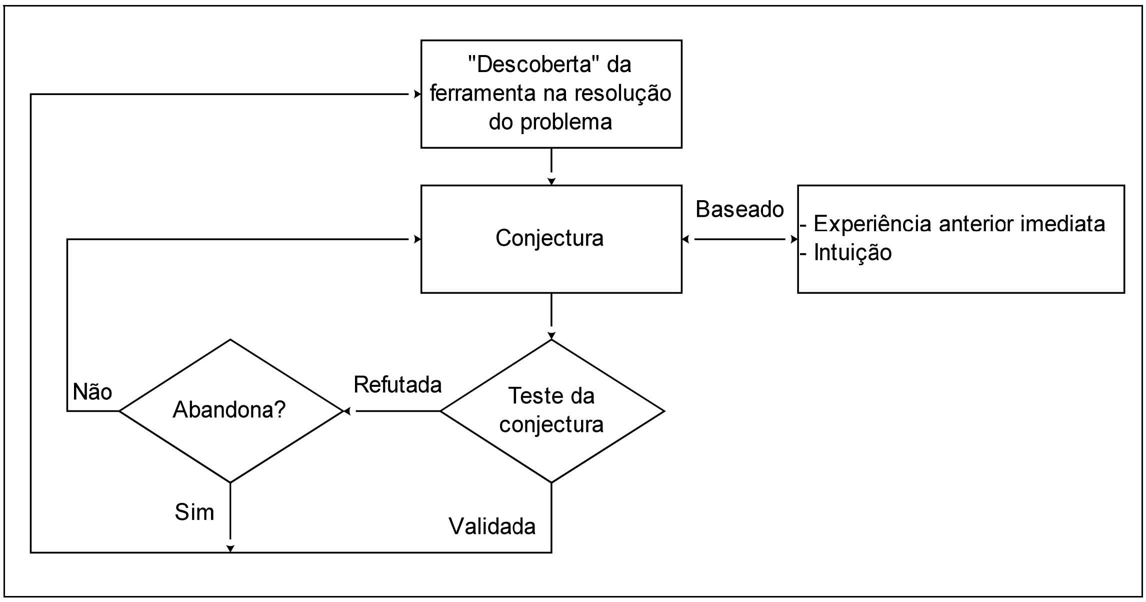


Figura 4.12: Estrutura do ciclo Descoberta-Conjectura-Teste

Um outro subgrupo optou por associar ferramentas do Cabri para criar outras construções. Por exemplo, ao usar a ferramenta "Polígono regular" e criar o triângulo sobre a reta *AB*, tem-se visualmente, a sugestão de perpendicularidade de um dos lados do triângulo com a reta. Isto foi confirmado com a ferramenta "Propriedades – Perpendicular". Em seguida, traçou-se a paralela a este lado passando pelo ponto *C*, conforme ilustrado na figura 4.13.

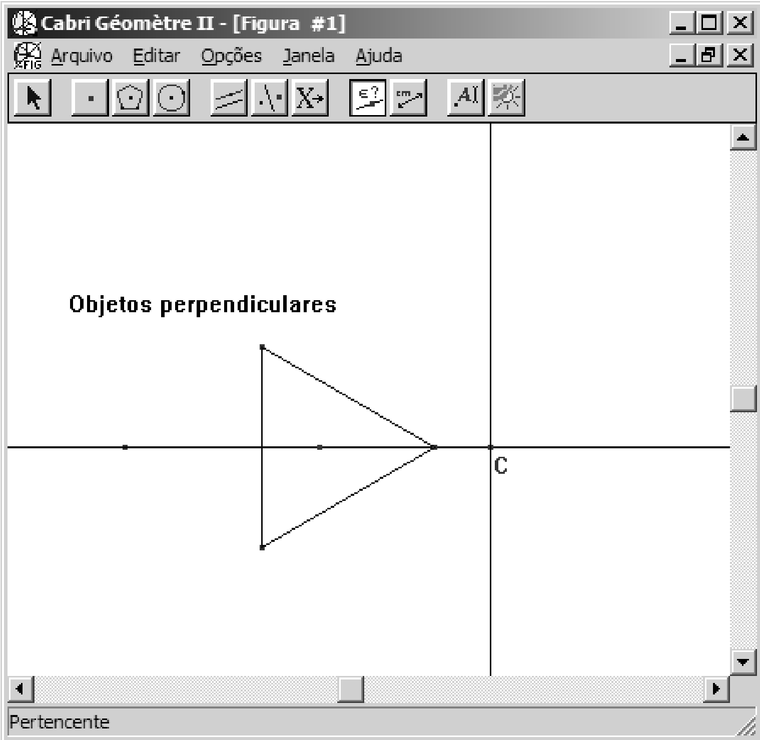


Figura 4.13: Tela do Cabri com a constução usando o triângulo e a paralela

Este processo de exploração das ferramentas acabou transformando-se quase num jogo de quebra-cabeça onde a cada aprendizado de uma nova ferramenta, procurava-se resolver o problema com ela. Com isso, novas estratégias foram criadas ampliando um repertório de conhecimentos e saberes geométricos que possibilitaram que tais ferramentas e estratégias pudessem ser utilizadas novamente. Conforme afirma Borba e Villareal (2005) "o fato é que nós sempre pensamos com mídia, produzindo uma reorganização do modo como nós pensamos, entendemos matemáticas, fazemos representações ou resolvemos problemas" (p. 167). [Tradução feita pelo pesquisador][37]

[37] The facto is that we always think with media, producing a reorganization of the way we think, understand mathematics, make presentations or solve problems.

4.1.2.3 Construção baseada na ferramenta polígonos regulares

Este terceiro conjunto de construções foca o trabalho feito pelo subgrupo das professoras Olga e Alice, no qual também participei como integrante. Ele fez um conjunto de construções baseado na ferramenta “Polígono” construindo quadrado, octógono e dodecágono.

O pensamento argumentativo[38] aplicado em todas as construções foi sempre o mesmo e precedeu a construção, mostrando assim uma intencionalidade e não apenas uma exploração da ferramenta.

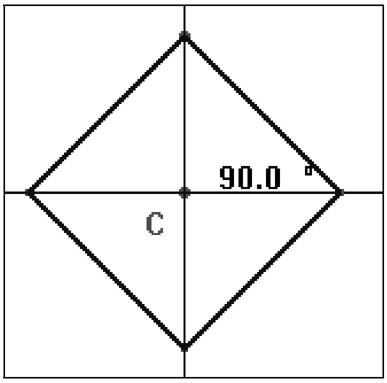


Figura 4.14 - Quadrado

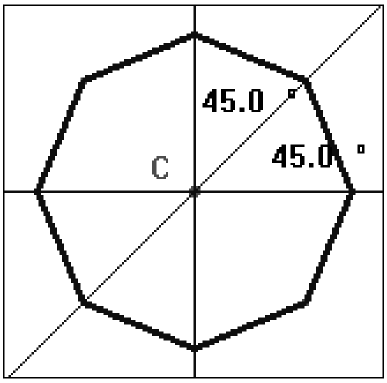


Figura 4.15 - Octógono

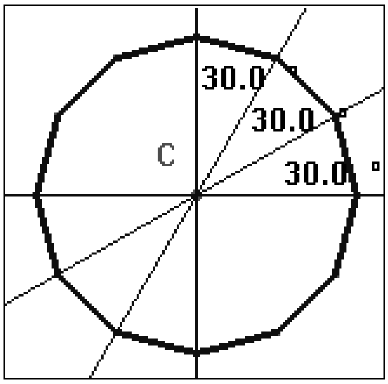


Figura 4.16 - Dodecágono

Portanto, para a realização das construções foi considerada a medida do ângulo central, o número de lados do polígono regular e a divisão do ângulo centro pelas suas diagonais.

$$\alpha = 360/(numero\,de\,lados)$$
$$\alpha = 360/4 = 90$$
$$\alpha = 360/8 = 45$$
$$\alpha = 360/12 = 30$$

Dessa forma, as diagonais do quadrado dividem o ângulo central do polígono em quatro partes, sendo que o ângulo central de cada parte (α) tem a medida de 90°; as diagonais do octógono dividem o ângulo central do polígono em oito partes, sendo que o ângulo central de cada parte (α) tem a medida de 45°, portanto, adicionando-se duas partes obtemos um ângulo de 90°; e as diagonais do dodecágono dividem o ângulo central do polígono em doze partes, sendo que o ângulo central de cada parte (α) tem a medida de 30°, portanto, adicionando-se três partes obtemos um ângulo de 90°.

[38] Assumimos como pensamento argumentativo aquele “raciocínio utilizado para construir conjecturas plausíveis” (FERNANDES, FONSECA, 2003, p.3)

4.1.3 Dúvida: construção com circunferências de raios não congruentes

Além dos resultados obtidos pela proposta da tarefa, outras questões foram surgindo durante os trabalhos dos subgrupos como esse da professora Olga que, partindo da construção atribuída ao Apolônio, levantou a seguinte dúvida:

> ***O que acontece se as circunferências que tem seus centros sobre a reta AB tiverem raios diferentes? A reta que contém os pontos de interseção é perpendicular à reta AB?"***

A construção feita no Cabri está representada na figura 4.17 e a figura 4.18 foi usada pela professora Olga para construir a prova a fim de esclarecer sua dúvida.

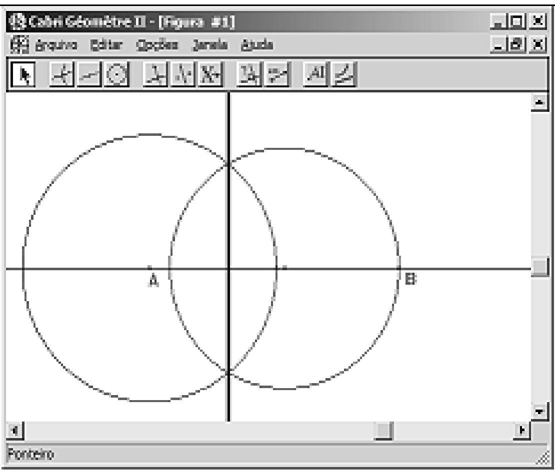


Figura 4.17 - Tela do Cabri com os desenhos da conjectura da professora Olga

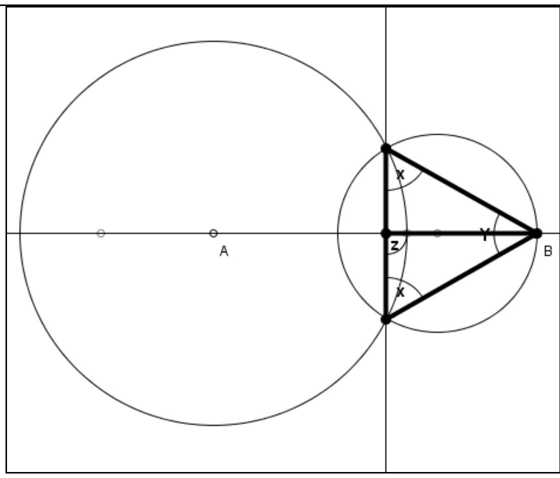


Figura 4.18 - Figura usada na prova

A prova elaborada por ela foi:

(1) $x+\dfrac{y}{2}+z=180$

(2) $2x+y=180$

$y=180-2x$

$\dfrac{y}{2}=90-x$

Substituindo $\dfrac{y}{2}$ em (1) temos:

$$x + 90 - x + z = 180$$
$$z + 90 = 180$$
$$z = 180 - 90$$
$$z = 90º$$

Naquele momento, nós, os participantes do GRUCOGEO presentes na reunião, consideramos a prova apresentada pela professora Olga válida. Entretanto, no momento desta análise notamos que o argumento que ela usou, os dois ângulos de mesma medida da segunda equação ($2x+y=180$) é falho, pois só podemos afirmar que eles são congruentes se a reta que passa pela interseção das circunferências for perpendicular à reta *AB*, e isto era o que se desejava provar.

Uma prova possível e que satisfazia à questão levantada pela professora Olga seria: analisando a figura 4.19, podemos afirmar que os segmentos *AM* e *AN* são congruentes, pois são raios da circunferência *c1*. Os segmentos *GM* e *GN* são congruentes, pois são raios da circunferência *c2*. Dessa maneira, a reta *AG* é o lugar geométrico cujos pontos estão eqüidistantes dos pontos *M* e *N*. Portanto, a reta *AG* é a mediatriz do segmento *MN* , sendo assim, perpendicular a ele e à reta que o contém. Como o ponto *B* está sobre esta mediatriz, pode-se afirmar que *BM* e *BN* são congruentes.

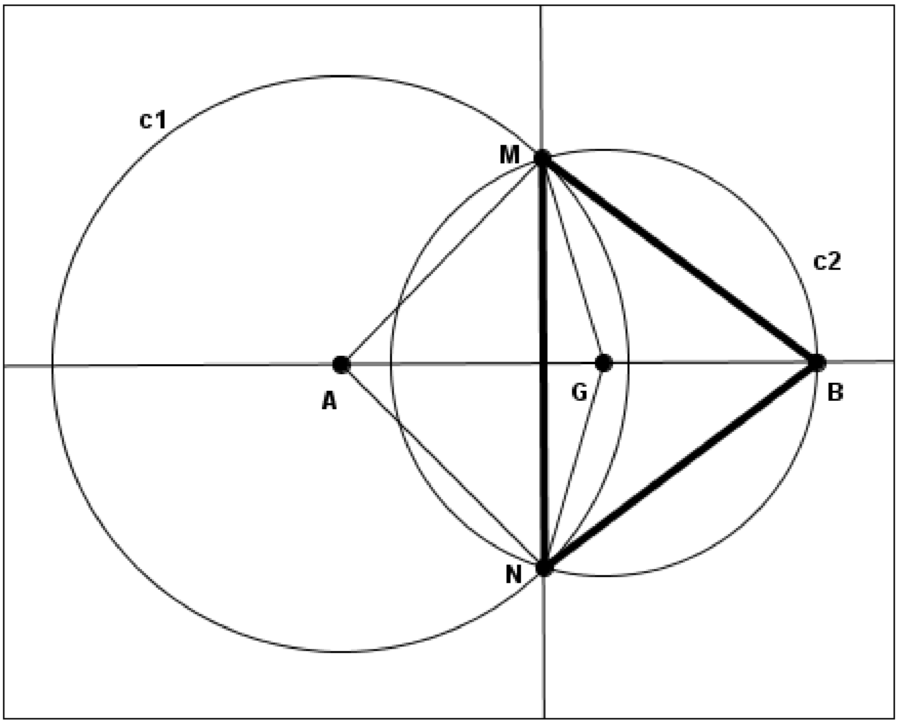


Figura 4.19 - Figura usada na prova

4.1.4 Síntese geral dos aspectos relevantes na atividade

Apresentados os episódios referentes à atividade 1, a construção da reta perpendicular atribuída a Apolônio, passamos à análise dos aspectos relevantes que elegemos para a nossa pesquisa.

4.1.4.1 - A potencialidade da atividade como incentivadora de formulação de provas (Como as atividades de investigação incentivaram as provas)

Por tratar-se de uma tarefa aberta, com um direcionamento básico e não restritivo sobre as ações dos participantes, esta atividade permitiu que cada participante contribuísse com o grupo mobilizando seu conhecimento matemático para fazer as construções e posteriormente as validações por meio das provas. O grupo reconhece nesta etapa, a das provas, sua maior dificuldade.

> A primeira atividade foi bem interessante, pois nos mostrou quantas formas diferentes podem ser feitas certas construções. Mas a nossa grande dificuldade é na hora da validação. Pois ela exige muitos conceitos que nós não temos muito domínio ainda. E podemos também validar, uma construção através de vários meios, porém novamente é necessário conceitos, propriedades que nós estamos tendo conhecimento na socialização dos grupos. [Registro escrito sobre a atividade feito pelo grupo das alunas Kelly, Valéria e Renata]

> A atividade nos propôs uma construção geométrica simples, porém na questão da validação requer revisão constante e visualização de conceitos minuciosos, que no primeiro momento nos passam despercebidos e somente com intervenção e questionamentos nos faz perceber se a argumentação é verdadeira ou falsa. [Registro escrito sobre a atividade feito pelo grupo das professoras Alice, Olga e Terezinha]

As provas aparecem como solicitação explícita no enunciado da tarefa[39] em dois momentos: na validação da construção atribuída a Apolônio e na validação das construções alternativas em diferentes mídias.

Para o primeiro momento, a validação da construção atribuída a Apolônio, houve pouca mobilização dos participantes: apenas duas justificativas. A primeira delas considerou a construção de um triângulo isósceles *DEF*, onde $\Delta DCF \cong \Delta CFE$, pois $DF \cong EF$, $DC \cong EC$, condição fornecida pela construção, e *CF* é lado comum (figura 4.20). A

[39] Na folha distribuída aos participantes da atividade, a descrição da tarefa foi a seguinte: "Para construir uma perpendicular a uma reta AB por um ponto C sobre ela, Apolônio (225 a.C.) sugere que se tome dois pontos D e E em AB de modo que o segmento CE tenha a mesma medida do segmento DC. Depois, que se tracem duas circunferências, uma com centro em D e raio DE e a outra de centro em E e mesmo raio. Obtém-se assim o ponto F, uma das interseções das duas circunferências. A reta CF será perpendicular à reta AB. ***Prove a validade dessa construção*** [destaque nosso]. Como você construiria, por outro método, a perpendicular a uma reta dada por um ponto sobre ela? ***Valide matematicamente a construção que você acabou de fazer.***" [destaque nosso]

segunda identificou os segmentos $DC \cong EC$, condição fornecida pela construção, e $DF \cong EF$, assim a reta *CF* é mediatriz do segmento *DE*, consequentemente perpendicular a reta *AB* que contém o segmento *DE* (figura 4.21).

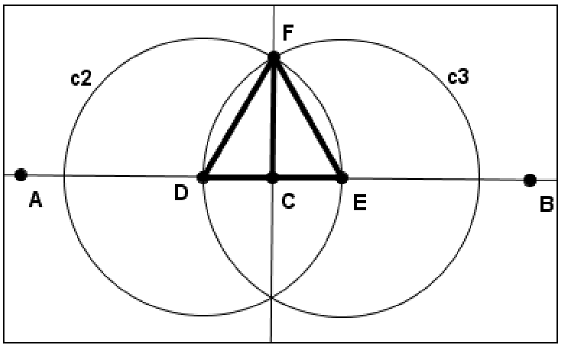


Figura 4.20 – Desenho da interpretação para a validação da construção atribuída ao Apolônio

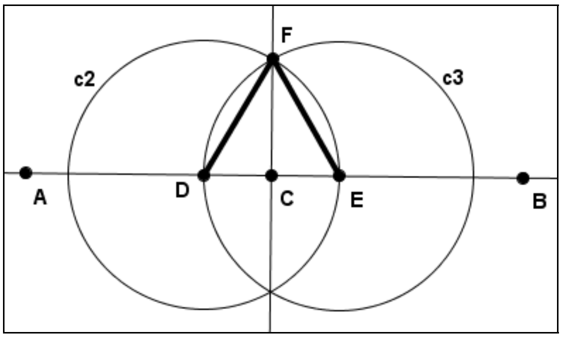


Figura 4.21– Desenho da interpretação para a validação da construção atribuída ao Apolônio

Em ambas as validações foram mobilizados conhecimentos geométricos relacionados à congruência de segmentos, de triângulos e de raios de circunferências.

Para o segundo momento, a validação das construções alternativas, a mobilização foi bem maior. Não podemos afirmar que a diferença entre os dois momentos seja por que no primeiro, a construção é reconhecidamente válida, portanto, não necessita mais ser validada (DE VILLIERS, 1990, p. 17) enquanto que no segundo, as construções criadas pelos participantes requerem defesa, argumentação, mobilização de conhecimentos matemáticos que as valide. Reconhecendo que na segunda situação a motivação pela prova é bem maior, corroboramos com a idéia de "aprender matemática" por meio do envolvimento e da integração do participante apresentada por Braumann (2001)

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática [...]. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (p. 5)

Analisando as construções alternativas e buscando suas validações, temos na construção usando o esquadro e a régua, uma validação pela própria mídia, ou seja, o ângulo de 90° do esquadro. Conforme destacamos na descrição do episódio, o esquadro e régua são facilmente encontrados no Ensino Básico. Ao usá-los para atender a atividade, podemos identificar uma associação entre a condição de perpendicularismos das retas com o ângulo de 90°. Na Matemática Escolar, poderíamos entender seu uso como a saída, do aluno, de uma simples visualização para a de identificação de propriedades.

O subgrupo que fez a construção pela dobradura, conseguiu a validação mostrando que a reta que continha o ponto *C* pertencia a uma das diagonais do quadrado (também feito por dobradura), e a outra diagonal estava sobre a reta *AB*, portanto, perpendiculares entre si. Segundo Scheffer (2006), muitas construções feitas com compasso e régua, como por exemplo, retas (simples, paralelas e perpendiculares), ângulos, bissetriz, diagonais, "podem ser feitas com as dobraduras, o que possibilita ao professor de matemática, em sala de aula, enfatizar a importância do lúdico na construção, comparação, estabelecimento de relações, medição, visualização e resolução de problemas" (p. 99).

A construção alternativa que obteve o ângulo de 90° como resultado da adição dos ângulos de 60° com o de 30° mobilizou conhecimentos básicos sobre construção de ângulos a partir da interseção de circunferências e da divisão de ângulos pela bissetriz, tanto na mídia compasso e régua quanto no computador com o Cabri, porém nesta segunda, os grupos conseguiram identificar a possibilidade de construir alguns polígonos (triângulos eqüiláteros e a partir deles o trapézio isósceles e o rombóide) e por meio da relação dos ângulos entre suas diagonais foi possível validar a construção.

O episódio da construção do ângulo de 90° a partir da adição das medidas de ângulos consecutivos de 30° é um bom exemplo do que pode surgir de uma atividade exploratório-investigativa: situações inesperadas com as quais os professores deverão aprender como lidar. Conforme apontam Oliveira, Segurado e Ponte (1996)

> Com ou sem a intervenção sistemática do professor existem sempre alunos que vão mais longe do que se tinha previsto: surgem processos e resultados inesperados. Tal como diz uma professora, ao reportar-se à preparação das suas aulas de investigação: por muito que explore a tarefa e pense em 'n' abordagens, os alunos conseguem sempre surpreender-me e apresentam 'n' mais uma. O professor precisa, pois, de estar atento e disponível para perceber e dar continuidade aos caminhos inusitados dos alunos. (p. 179)

A partir da conjectura da construção do ângulo de 30°, baseada na intuição do subgrupo, foi possível criar um movimento para validar a minha discordância sobre ela. Nesse movimento de validação, mobilizou-se outra mídia, o computador com o Cabri, e depois a criação da prova com a mobilização dos conhecimentos geométricos sobre a lei do seno em triângulo retângulo.

O subgrupo que usou a ferramenta dos "Polígonos regulares" do Cabri para propor construções alternativas mobilizou um conhecimento que a princípio não era esperado. Conforme relatado anteriormente na descrição do episódio, eles basearam-se na divisão do ângulo central, partindo-se do número de lados do polígono, para conseguir o ângulo de 90°. Usando este princípio: (1) com o quadrado eles dividiram o ângulo central de 360° em quatro partes obtendo quatro ângulos de 90°, veja a figura 4.14 na página 69; (2) com o octógono eles dividiram o ângulo centro de 360° em oito partes obtendo oito ângulos de 45°, veja a figura 4.15 na página 69; e (3) com o dodecágono eles dividiram o ângulo centro de 360° em doze partes obtendo doze ângulos de 30°, veja a figura 4.16 na página 69.

O episódio da dúvida da professora Olga, quanto à necessidade das circunferências da construção atribuída a Apolônio terem que ter raios congruentes para que a reta que passa pelos pontos de interseção das mesmas seja perpendicular à reta que contém seus pontos centrais, exemplifica como no desenvolvimento de uma atividade investigativa podem surgir novas questões (PONTE *et al*, 1999, p.134) que são formuladas pelos próprios participantes. A dúvida não tem relação direta com a atividade proposta (que pode ser resumida como a criação de uma reta perpendicular, passando por um ponto sobre uma outra reta dada), porém foi motivada por ela, transformando-se num incentivo para a construção de novos conhecimentos. Neste episódio, evidenciamos que um fato muito comum nas práticas de provas escolares pelos alunos ao utilizarem os resultados como hipóteses para a resolução, pode também ocorrer com os professores.

Baseando-nos nas análises acima, sobre este aspecto, podemos inferir que a atividade 1 - A construção da reta perpendicular atribuída a Apolônio, possibilitou aos participantes do GRUCOGEO mobilizarem diversos conhecimentos geométricos para criarem provas, dentro de um contexto de Matemática Escolar, inclusive, para responder questões além daquelas propostas inicialmente na atividade, evidenciando a potencialidade da atividade e a riqueza de variadas situações e produções matemáticas a fim de envolver aqueles que estão participando dela.

4.1.4.2 - Uso de diferentes mídias no contexto da Matemática Escolar (Quais mídias foram mobilizadas na atividade?)

Esta atividade possibilitou o uso de uma boa variedade de mídias: régua e esquadro, compasso e régua, papel e dobradura, e o computador com o Cabri Géometrè. Em cada uma delas, pôde-se observar a preferência individual por uma ou outra mídia e a forma como o domínio desta interferiu na reorganização do pensamento para validar a construção, fazendo-nos refletir sobre o conjunto “seres humanos com mídia” (BORBA, VILAREAL, 2005).

Apesar dessa relação “seres humanos com mídia” e a reorganização do pensamento, ter sido sentida em toda a atividade, vamos destacar dois episódios com as mídias computador e o Cabri, que entendemos serem mais significativas para o contexto da nossa pesquisa.

No episódio da exploração das ferramentas do Cabri para a construção alternativa e no episódio do uso da ferramenta "Polígonos regulares", os participantes foram mudando sua forma de pensar, de buscar os argumentos e de fazer a construção à medida que descobriam as ferramentas do programa. Segundo Borba e Villareal (2005)

> [...] quando os recursos do computador são incorporados ao processo de pesquisa dos seres humanos, quando o processo de "pesquisa" do computador é usado em combinação com o que se desenvolveu pelos seres humanos, e as diversas formas de *feedback* fornecido pelo computador contribuem para a surgimento de novos problemas, pode aplicar-se a metáfora da reorganização para descrever o que acontece ao pensamento. Se computadores são usados para resolver problemas e / ou gerar novos problemas, pode-se dizer que a reorganização do pensamento ocorreu (p. 14). [Tradução feita pelo pesquisador][40]

No episódio "Exploração de ferramentas do Cabri", página 66, o ciclo de pensamento verbalizado na frase "Se ... então ... porque ..." que nos referimos anteriormente, exemplifica esta mudança/organização do pensamento.

No episódio "Construção baseada na ferramenta polígonos regulares", página 69, ao descobrirem a possibilidade de uso da ferramenta "Polígono regular" o subgrupo, mais especificamente as professoras Olga e Alice, começaram a buscar estratégias geométricas para incorporar a ferramenta na resolução da questão inicial da atividade. A mudança na forma de estruturar o pensamento, promovida pelo conjunto "seres humanos com mídia", pôde ser percebida a partir da reestruturação da proposta inicial da atividade, pois as professoras Olga e Alice começam a procurar uma forma de construir um ângulo de 90°. A estratégia de obter este ângulo fazendo a divisão do ângulo central do polígono e a combinação desses ângulos obtidos por meio da relação do número de lados do polígono mostrou-se eficiente. Podemos afirmar que esta estratégia só foi possível porque o programa Cabri tem tal ferramenta. Ela não seria adotada, por exemplo, numa mídia compasso e régua.

Além desses dois episódios, é importante destacar que o uso do programa de Geometria Dinâmica facilitou as construções tornando-as mais rápidas como, por exemplo, a construção dos polígonos sobre a construção das interseções das circunferências de raios congruentes. Se aquela construção fosse feita sobre o papel seria muito mais trabalhoso, pois exigiria vários desenhos da construção das circunferências, uma para cada polígono.

[40] […] when features of the computer are incorporated into the search process of humans, when the 'search' process of the computer is used in combination with that developed by humans, and the various forms of feedback provided by the computer contribute to the emergence of new problems, one can apply the metaphor of reorganization to describe what happens to thinking. If computers are used to solve problems and/or generate new problems, one can say that reorganization of thinking has occurred […]

Durante a realização da atividade foram percebidas várias limitações impostas pelas mídias utilizadas. De uma forma geral, podemos afirmar que em todas as mídias selecionadas pelos sujeitos houve limitações: na dobradura a imprecisão das dobras, no uso do compasso a espessura da grafite e a imprecisão do traçado, no computador a habilidade no uso do programa, mesmo que isto não fosse fator de impedimento para a execução da atividade. A facilidade de uso de uma determinada mídia ficou diretamente relacionada com a história individual do seu usuário, como é o caso da dobradura e o da informática. Normalmente, usamos aquelas mídias que temos maior facilidade ou domínio, fazendo com que nós professores nos mantenhamos dentro de uma "zona de conforto" raramente indo para a "zona de risco" (BORBA, PENTEADO, 2005).

A experiência vivenciada nesta atividade nos permite afirmar que as experimentações com mídia, requerem reflexões sobre o resultado obtido e uma possível interpretação teórica. Prováveis dificuldades que os alunos encontrem com as dobraduras e conseqüente imprecisão nas construções podem ser compensadas pela atuação do professor como mediador do processo, explicando, (re)interpretando e (re)significando o ocorrido, pois

> a construção dos conceitos geométricos pode ser dificultada ou obstruída por concepções predominantes no imaginário cognitivo e muitas delas possivelmente originadas tanto em relação ao uso de desenhos como de materiais concretos. (PAIS, 2000, p. 8)

Ao ficarmos apenas no uso da mídia como recurso didático, sem um aprofundamento conceitual de análise, podemos incorrer em enganos, conforme alerta Pais (2000):

> O suporte da materialidade permite responder aos movimentos coordenados tanto pelo tato como pela visão. Na realidade, essa atividade experimental não está totalmente desvinculada da existência de uma intuição e de um nível inicial de racionalidade. O seu ponto vulnerável é a possibilidade de restringir o ensino a esse nível sensitivo (p.3).

Nessa atividade, conforme analisado acima, as mídias assumiram um papel fundamental, pois possibilitaram reflexões conceituais, criação de estratégias e mobilização de conhecimentos geométricos, até mesmo diante de suas limitações.

4.1.4.3 - A aproximação com o "fazer matemático"

Conforme apresentamos no capítulo 2 o trabalho do matemático é uma incógnita para muitos alunos e mesmo para alguns professores escolares. Ainda é muito forte a idéia da "divinização do conhecimento matemático, pela identificação de todo o processo investigativo com os produtos finais totalmente depurados" (OLIVEIRA, 2002, p.145). Talvez isto seja conseqüência da forma como são feitos os textos e registros de seus trabalhos. Conforme relata-nos Davis e Hersh (1985):

> A apresentação dos textos [matemáticos] geralmente é "ao contrário". O processo de descoberta é eliminado da descrição, e não é documentado. Após que o teorema e sua demonstração estejam completados, por qualquer caminho e por qualquer meio, toda a apresentação verbal e simbólica é reorganizada, polida e rearrumada de acordo com os cânones do método lógico-dedutivo. A estética da profissão a exige. (p. 317)

As tarefas investigativas podem aproximar o trabalho desenvolvido na sala de aula, por professores e alunos, do trabalho do matemático. Isto, conforme discutimos anteriormente, graças, dentre outros fatores, à sua estrutura de (1) introdução da tarefa; (2) de desenvolvimento, onde se tem as explorações, criação de novas questões, formulação e experimentação de conjecturas e estruturação de justificativas e (3) o encerramento, com as discussões em grupo, as validações e sistematizações finais. Segundo Silva *et al* (1999), as tarefas exploratório-investigativas,

> Permitem ainda procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessivos testes e levantar novas questões para investigar. Traduzem assim o trabalho desenvolvido pelos matemáticos profissionais, ou, por outras palavras, o processo de criação matemática que é inerente ao que é a matemática e ao que significa saber matemática.(p.71)

Dos episódios selecionados nessa atividade, destacamos dois, que no nosso entender, ilustram esta aproximação com o "fazer matemática": "Construção do ângulo 90°=30°+30°+30°" (p. 61) e "Dúvida: construção com circunferências de raios não congruentes" (p. 70).

Na construção do ângulo de 90° a partir dos ângulos de 30°, os integrantes daquele subgrupo partiram de uma intuição para propor uma conjectura, procuraram argumentos que dessem validade a ela, se convenceram, estruturaram o registro e o apresentaram ao grupo, convencendo-o também. Mesmo com a posterior retomada do assunto para provar a falibilidade do argumento usado, esta proximidade com o fazer do matemático não ficou prejudicada, muito pelo contrário, ele veio reforçar ainda mais como esta idéia, pois ilustra aquela etapa que normalmente os livros escolares não trazem e que fazem parte da produção de um teorema, da sua percepção ao reconhecimento público, pela comunidade, de sua validade.

Neste percurso trilhado pelos matemáticos, com certeza, aparecem outras questões que os intrigam e mobilizam para novas descobertas, como aconteceu no episódio da dúvida da professora Olga sobre a necessidade das duas circunferência terem que ter raios congruentes ou não. Apesar de ser, a princípio, uma questão secundária para o problema, ela assumiu o importante papel, pois foi a disparadora de um processo de mobilização de vontades e de conhecimentos matemáticos.

Outros dois episódios, o da exploração das ferramentas do Cabri (p. 66) e o do uso da ferramenta “Polígonos regulares” (p. 69), são exemplos da mobilização criativa do conhecimento matemático aplicado e limitado por um contexto. A busca de uma organização do raciocínio baseado nas propriedades e características das ferramentas demonstra o grau de criatividade utilizado. Por exemplo, ao usar a ferramenta “Polígono regular” o subgrupo observou a condição inicial da tarefa (dada uma reta e um ponto *C* pertencente a ela) para criar a resolução: usar um polígono onde a circunferência circunscrita tivesse como centro o ponto C, onde o número de lados fosse múltiplo de quatro e dois de seus vértices estivessem sobre a reta que contém o ponto C.

Assim sendo, entendemos que a atividade possibilitou a aproximação do trabalho escolar, desenvolvido pelos participantes do GRUCOGEO, com o trabalho do matemático profissional. Com isso, não queremos transformar o matemático num ícone ou modelo, mas sim, entender que sua produção é fruto de um trabalho que mistura conhecimento, estudo, intuição, criatividade e dedicação entre outros atributos.

4.1.4.4 - A importância do trabalho colaborativo para os participantes na realização da atividade

O trabalho em grupo, como um exercício de colaboração envolvendo “voluntariedade, identidade e espontaneidade” (NACARATO *et al* , 2006, p.201) mostrou-se, na visão dos participantes, um elemento fundamental para esta atividade.

> A realização da atividade exige de nós o conhecimento de alguns conceitos básicos da Geometria, tais como: a classificação de triângulos, e outros, que a dinâmica de socialização nos ajuda a relembrar e mesmo aprendê-los.
>
> Esta atividade sobre a construção de retas perpendiculares possibilitou uma riquíssima “troca” de visões (olhares), pontos de vistas diferentes para a elaboração das construções. [Registro escrito sobre a atividade feito pelo grupo do professor Paulo e da aluna Fabiana]

O grupo age como um potencial espaço de formação, onde todos aprendem mutuamente, respeitando-se as diferenças e aproveitando-as como elemento de troca de experiência.

> ***Aluna Kelly:*** [...] *essa dinâmica deles serem mais acostumados a usarem a circunferência e no outro se desenvolve mais a dobradura e eu não conheço isso, eu vou pela álgebra e o que eles passam na socialização deles isso me enriquece porque eu passo a aprender coisas que são desconhecidas por*

> *mim. Nós que ainda trabalhamos, eu a Valéria a Daniela, estamos aprendendo mesmo.* [Transcrição da áudio-gravação da reunião de encerramento da atividade]

Além dos momentos de socialização, podemos considerar que o trabalho dentro dos subgrupos e os seus registros, como outros momentos que potencializam a aprendizagem.

Infelizmente é senso comum que a prática da produção de texto não é muito usada nos cursos de licenciatura em Matemática. Esta dinâmica permite uma (re)organização dos pensamentos a respeito de conceitos e ações, além de permitir uma retomada histórica e reflexiva.

> Um texto escrito pode ser visto como a tradução, por meio de palavras, de pensamentos, sentimentos e ações. [...] No contexto do ensino-aprendizagem, tanto a expressão, na forma dissertativa, de um determinado conceito quanto o eventual relacionamento deste com outros se conectam com a busca de conhecimento e de algum domínio acerca do tema em questão. Naturalmente, um estudante que compreende e domina um determinado conceito deve ser capaz de escrever sobre ele, ressaltando suas certezas e possíveis dúvidas. Na aprendizagem por meio da linguagem escrita, no entanto, não se assume a compreensão conceitual prévia à escrita fluente. (SANTOS, 2005, p. 128)

A fala da formadora Adair, a seguir, exemplifica a importância atribuída ao registro:

> ***Formadora Adair:*** *Eu acho que a Regina levantou duas questões para o registro a partir da fala do Jorge, o próprio processo de registrar que é o momento que eu vou pensar sobre o que eu fiz é um momento de produção de conhecimento, ou seja, eu tomo consciência daquilo que eu acabei de fazer, torna-se um "guardado" como a Regina disse e muitas vezes dependendo do tipo de registro que eu faço ele possibilita a reprodutibilidade de uma estratégia. Porque, por exemplo, na segunda-feira passada o Jorge não estava aqui, a Viviane não é da área, mas ela conseguiu descrever a estratégia que vocês tinham utilizado porque você* [Jorge] *tinha feito uma descrição bem detalhada do processo com exceção de, como é que vocês partiam de um ângulo de 30 graus. Sendo assim, foi muito interessante porque quando se chegou nesse... Não a pós-graduanda Viviane dizia, ele* [Jorge] *já partiu que aqui é um ângulo de 30 graus, e daí o que aconteceu nos entramos na sua estratégia e fizemos três validações diferentes que não foi a que você* [Jorge] *fez... então depois no próximo encontro seria legal você pegar o que foi que nós fizemos, para ver se foi uma dessas três ou se foi uma diferente das quais fizemos. Então nos inserimos na sua estratégia e levantamos três possibilidade a partir de um certo momento e que depois não sabíamos que é que você* [Jorge] *tinha chegado que aquele ali era um triângulo retângulo, então fomos levantando hipóteses e validando a partir das hipóteses que levantávamos. Agora, por que isso foi possível? Porque havia* [no registro] *a estratégia que você tinha utilizado, então ele possibilita a reprodutibilidade.* [Transcrição da audiogravação da reunião de encerramento da atividade]

Apesar dessa fala ser apenas da formadora Adair, ela expressa o pensamento dos participantes do GRUCOGEO, tanto professores quanto alunos, pois todos reconhecem, no registro escrito, esta importância, mesmo que às vezes ela seja produzida com muita dificuldade, tendo "falhas" ou, até mesmo, não seja feita.

Acreditamos que a prática de registro pode alterar a *práxis* dos professores e dos futuros professores que participam do GRUCOGEO. Os relatos de professores sobre a sala de aula e a análise teórica são ingredientes para esta mudança que, com certeza, interferirá no ensino da Matemática.

Desse modo, entendemos que o senso de trabalho coletivo e a intenção de aprender em grupo foram mobilizados durante toda a atividade. Podemos percebê-lo como um eixo que perpassa a todos os episódios apresentados anteriormente, seja no trabalho em subgrupos ou, como já nos referimos, no momento de socialização.

4.1.4.5 - A dupla dimensão da aprendizagem: para os professores escolares (conhecimento pedagógico) e para os futuros professores (conhecimento como conteúdo escolar)

Entendemos que esta atividade contemplou a dupla dimensão desse aspecto.

Sob a ótica dos professores escolares, destacamos dois pontos que nos pareceram mais relevantes. O primeiro foi a possibilidade de conhecer o uso de diferentes mídias, principalmente o programa Cabri Géometrè, dando-lhes indícios de como usá-las em sala de aula e de suas potencialidades. O segundo foram as discussões que possibilitaram reflexões teóricas sobre a prática escolar e a abordagem dos conteúdos.

Para os graduandos, futuros professores, a atividade permitiu rever conceitos geométricos associados diretamente à construção atribuída a Apolônio e aos elementos geométricos mobilizados para as construções alternativas. A oportunidade de conhecer o uso de outras mídias pôde auxiliá-los tanto como estudantes, usando-as para aprender conteúdos e conceitos já vistos no curso de graduação, quanto como futuros professores, mostrando-lhes uma perspectiva para o uso em sala de aula. Para aqueles que estão participando de estágios, o envolvimento nas discussões pôde trazer-lhes uma fundamentação teórica e prática do fazer docente (aprendizagem sobre a docência)., conforme registram os graduandos Kelly, Henrique e Carina:

> Nos momentos de socialização das atividades realizadas, quando cada grupo coloca suas conclusões, podemos observar como existem diferentes maneiras ou estratégias para desenvolver e validar uma única atividade. Isso nos possibilita mudar nossa concepção sobre os modos de fazer Matemática em sala de aula.

> Nesse processo vamos nos apropriando de estratégias pedagógicas que poderemos, quando estivermos atuando como professores, utilizar com nossos alunos (BARBOSA, SILVA, BARROS, 2008, p.237-238)

4.1.4.6 - As provas/validações como mobilizadoras no processo de (re)siginificação do conhecimento no contexto da matemática escolar

A necessidade de atender às solicitações diretas ou indiretas da atividade desencadeou um processo de mobilização do conhecimento matemático dos participantes.

No desenvolvimento da atividade, principalmente na etapa das construções alternativas, surgiu implicitamente a pergunta: "como provar que duas retas são perpendiculares?". Isto fez com que os participantes buscassem nos conhecimentos geométricos os meios de provar a validade de suas idéias. Por exemplo: (a) para as construções de ângulos foram usados conhecimentos sobre circunferências, interseções e bissetriz, mobilizados tanto nas construções com compasso e régua quanto no Cabri; (2) os conhecimentos sobre as propriedades dos polígonos regulares e suas diagonais, ao usarem o Cabri; (3) o conhecimento sobre as características da mediatriz de um segmento e (4) os conceitos de reflexão e simetria usados nas dobraduras.

Quanto ao processo de provas e validações, pôde-se observar que o grupo reconhece sua importância, mas que ela ainda é um desafio para a maioria.

> ***Graduanda Kelly:*** *Eu faltei em algumas aulas, mas agora lendo aqui eu percebi que quase todos os grupos têm dificuldades na hora da validação, por causa dos conceitos que faltam.* [...] *Bastante gente aqui, erra os conceitos, as propriedades que acabam sendo aprendidas e relembradas aqui mesmo na hora da socialização. Todos os grupos deixaram isso sim, precisa dos conceitos, a gente acaba aprendendo lá, precisa dos conceitos e a gente lembra na hora da socialização. Então isso foi uma coisa que eu achei comum em todos os grupos, pois fizeram esses comentários. .* [Transcrição da áudio-gravação da reunião de encerramento da atividade]

Na análise do diálogo dos integrantes do grupo sobre as provas, no encerramento da atividade, foi possível identificar uma (re)significação para o termo "provas", assim como, a necessidade de usar instrumentos que garantam a prova.

> ***Professora Olga:*** *[...] agora uma outra coisa interessante veja aqui... da álgebra, da visualização da álgebra é bem interessante, mas o que eu achei interessante foi a questão da construção geométrica.*
>
> ***Professora formadora Adair:*** *Agora, só a construção garante a validação?*
>
> ***Professora Olga:*** *Não.*
>
> ***Professora formadora Adair:*** *Então o que seria uma validação pela construção geométrica?*

> ***Professora formadora Regina:*** *Você falou que gostou da validação pela construção geométrica, ai a Professora formadora Adair falou assim: "Só a construção é uma validação?"*
>
> ***Professora Olga:*** *Não.*
>
> ***Professora formadora Regina:*** *Então, qual a validação, aquela da dobradura?*
>
> ***Professora Olga:*** *Construção mesmo, com régua e compasso.*
>
> ***Professora formadora Regina:*** *Só aquilo já está garantindo a validação?*
>
> ***Professora Olga:*** *Não. Precisa de algo a mais, de vários conceitos, conceitos que a gente não enxerga, daí não tem certeza se aquele conceito está certo ou não... aquela validação que estamos fazendo se está certo ou não e quer tentar pela álgebra.* [Transcrição da áudio-gravação da reunião de encerramento da atividade]

Pôde-se observar também, um entendimento sobre a inter-relação entre os conteúdos da matemática, a intuição e a construção do conhecimento teórico: não adianta possuir o domínio de álgebra (como instrumento) se não souber como "olhar" pela álgebra para uma figura geométrica e entender os conceitos relacionados a ela.

> ***Formadora Adair:*** *Por que tentar* [a prova] *pela álgebra? Vamos lá, vou fazer umas perguntas cutucando a Professora Olga, mas todo mundo pode responder. Por que tentar pela álgebra?*
>
> ***Professor Paulo:*** *É a álgebra que vai nos garantir e dar certeza do... da matemática não sei... a gente tem uma certa queda* [pausa], *provou* [pausa] *algebricamente, tem ai a idéia da socialização que vale para todos.*
>
> ***Formadora Regina:*** *Mas aí a minha pergunta Professor Paulo é: Será que é uma queda nossa ou será que ela é um instrumento de validação?*
>
> ***Professor Paulo:*** *Acho que ela é um instrumento.*
>
> ***Formadora Regina:*** *Pela natureza, ela é um instrumento, mas de validação?*
>
> ***Professor Paulo:*** *De validação!*
>
> ***Formadora Regina:*** *Não de argumentação, de validação! Você falou, a gente tem uma queda de se trabalhar com a álgebra, mas será que eu preciso dela como o instrumento de validação? Pela natureza do conhecimento geométrico ou é porque a gente acha que pela álgebra é mais fácil?*
>
> ***Professor Paulo:*** *Eu acho que é pela segurança que a gente tem... não é talvez pela facilidade ou pelo fato de dominar mais a álgebra do que a Geometria, acaba julgando ela mais fácil, e nem sempre é...*
>
> ***Professora Olga:*** *Mas é interessante, que envolve em álgebra conceitos de Geometria...*
>
> ***Formadora Regina:*** *Também...*
>
> ***Professora Olga:*** *... ai o que acontece? Essa união de álgebra e Geometria daí a gente "enrosca" em Geometria.*

> ***Formadora Adair:*** *Quer dizer, a álgebra é um instrumento uma área que facilita a validação até por ela ser a área da generalização, só que está com o conceito geométrico. Foi isso que você disse Olga?*
>
> ***Professora Olga:*** *Isso.*
>
> ***Formadora Adair:*** *Pois, se eu não tenho o conceito geométrico de nada adianta a ferramenta da álgebra.*
>
> ***Professora Alice:*** *Mas então veja bem, mas eu devo pensar no que vou fazer.*
>
> ***Formadora Adair:*** *Ai tem um dado novo. Ai a álgebra ajuda a visualizar ou eu preciso da visualização para poder usar a álgebra?*
>
> ***Professora Alice:*** *Porque quando eu faço a figura. Quando eu começo fazendo a figura, então a minha, já tem em mente como eu vou trabalhar, e ai a gente vai pelo caminho, vai tentando fazer até chegar ao resultado. Por exemplo: trace uma reta, sobre esta reta faça um ponto, ai você vai visualizando aquilo lá.*
>
> ***Formadora Adair:*** *E por que você visualiza Alice?*
>
> ***Professora Alice:*** *Porque eu já tenho certos conceitos na minha cabeça.*
>
> ***Formadora Adair:*** *E isso é inerente, faz parte do pensamento geométrico ou não, ter sempre a imagem na mente?*
>
> ***Professora Alice:*** *Faz parte do pensamento geométrico.*
>
> ***Formadora Adair:*** *Quando eu penso geometricamente eu penso a imagem com o conceito ou só com o conceito sem imagem?*
>
> ***Professora Alice:*** *Eu tenho que ter o conceito e a visualização. Tenho que ter os dois.* [Transcrição da áudio-gravação da reunião de encerramento da atividade]

Notamos o reconhecimento da Álgebra como o meio preferencial de construção da prova levando-nos a inferir sobre a influência deste conteúdo em detrimento da Geometria, como apontamos anteriormente. A discussão nos remete a Pais (1996) quando ele relaciona experiência (com os objetos geométricos), a intuição e a teoria, pois tomando como exemplo a prova construída pela professora Olga, encontramos uma forte semelhança com os exercícios de Geometria dos livros do Ensino Fundamental e Médio onde para reforçar assuntos como “soma das medidas dos ângulos internos do triângulo”, “teorema de Thales”, “tipos de ângulos (suplementares, complementares, alternos internos, colaterais, etc.)”, dentre outros, apresentam-se triângulos com os valores de alguns ângulos e pede-se os valores dos outros ângulos. Neste caso, a álgebra é o instrumento de solução e a geometria fornece apenas a relação entre os ângulos. Raramente encontramos um exercício que se baseia na análise geométrica como um todo e usa essa análise como subsídio para uma prova.

Embora os alunos da graduação não estejam participando diretamente do diálogo, estavam atentos às discussões provocadas por Adair e Regina, e respondidas por Olga, Paulo e Alice. Dessa forma, também os professores escolares assumem o papel de formadores, contribuindo para aproximar reflexões sobre a geometria e seu ensino em sala de aula.

Pelo analisado acima, entendemos que a atividade atendeu o aspecto que envolve como as provas/validações surgiram como mobilizadoras do processo de (re)siginificação do conhecimento no contexto da Matemática Escolar.

4.2 Atividade 2: desigualdade triangular

Nessa atividade, a dinâmica desenvolvida no grupo não esteve relacionada a uma tarefa exploratório-investigativa executada pelo GRUCOGEO, mas sim, uma atividade exploratório-investigativa preparada parcialmente no grupo e executada pelos alunos escolares do professor Paulo, integrante do GRUCOGEO . Este tipo de ação não foi novidade para o grupo, pois em outros momentos, anteriores ao meu ingresso no grupo, isto já havia acontecido.

Esta forma de trabalho ilustra um dos objetivos do GRUCOGEO que é de

> Evidenciar a possibilidade de desenvolvimento profissional propiciada por um ambiente de reflexão, (re)significação de saberes docentes e sobre a docência em Geometria e sistematização das reflexões e análises produzidas no grupo de trabalho colaborativo (NACARATO, GRANDO, 2007, p. 5).

Essa atividade foi apresentada pelo professor Paulo no 16° Congresso de Leitura do Brasil, enfocando em sua análise o envolvimento de seus alunos na execução da tarefa[41].

4.2.1. Proposta da atividade e os primeiros dados da sua execução

Podemos estruturar essa atividade em seis etapas: (a) discussão e preparo parcial da atividade no GRUCOGEO; (b) execução da atividade, pelos grupos de alunos do professor Paulo, em sala de aula usando material concreto, e a confecção de relatório por esses grupos; (c) discussão, no GRUCOGEO, dos relatórios produzidos pelos alunos; (d) sistematização, feita pelo professor Paulo, das discussões no GRUCOGEO e de suas observações; (d) discussão com os alunos sobre a sistematização, tentando chegar com eles a uma regra geral para a formação de triângulos; (e) execução da exploração da atividade no laboratório de informática usando o programa Cabri Géometrè, por um grupo de alunos formado pelos

[41] PENHA, Paulo César da. **A desigualdade triangular em diferentes mídias.** IN: Anais do 16° COLE. Campina: ALB, 2007.

representantes de cada grupo que fez a atividade em sala de aula; e (f) discussão, em sala de aula, dos resultados alcançados no laboratório.

A etapa de discussão e preparação que envolveu a escolha e a adequação da tarefa para os alunos, aconteceu nas reuniões dos dias 29 de maio e 05 de junho de 2006.

Optou-se por trabalhar a atividade de desigualdade triangular. Após esta definição, contribui com o grupo apresentando uma construção feita no Cabri, similar a uma outra que já tinha trabalhado. A construção baseou-se num problema típico de desenho geométrico que é a construção de um triângulo dados as medidas dos três lados. Adaptada para Geometria Dinâmica, acrescentou-se à solução do problema a possibilidade do movimento tornando-a uma construção para uma atividade de exploração[42].

Na proposta apresentada por mim, os alunos receberiam a construção pronta e após abrí-la no Cabri, fariam a manipulação dos pontos *A*, *B* e *C*, conforme ilustrado nas figuras 4.22 e 4.23, em que a medida dos segmentos *L1*, *L2* e *L3*, respectivamente, são variadas. Com essa variação, alteram-se também as medidas dos lados do triângulo, possibilitando, assim, a verificação da condição para sua existência ou não.

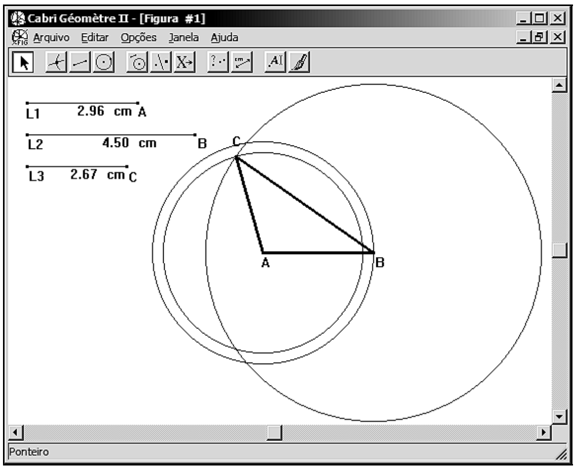


Figura 4.22: Tela do Cabri com a construção do triângulo numa primeira manipulação dos pontos *A, B* e *C*

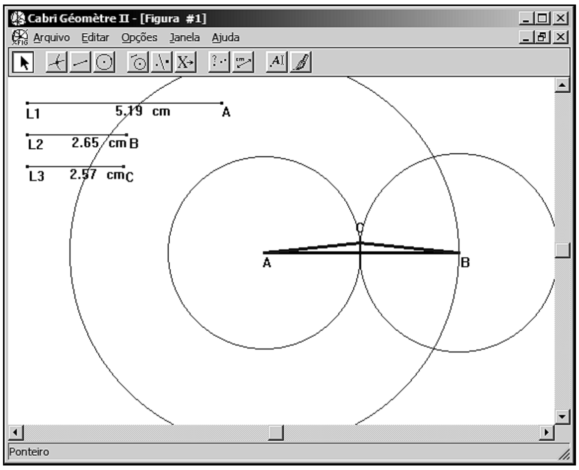


Figura 4.23: Tela do Cabri com a construção do triângulo numa segunda situação manipulação dos pontos *A, B* e *C*

Alguns dos valores das medidas dos segmentos ou das medidas dos lados do triângulo deveriam ser anotados em tabelas: uma onde existia o triângulo, e outra onde não existia o triângulo. A partir da análise destas tabelas esperava-se que os alunos chegassem à generalização para a condição de existência do triângulo.

[42] Estamos definindo **construção de exploração** aquela construção feita em programas de geometria dinâmica e que foi dada ao aluno pronta, cabendo-lhe manipular alguns de seus elementos, pré-definidos, e observar o resultado desta manipulação na construção.

Após a apresentação da construção para o grupo, projetada por um *datashow* ligado a um computador, a graduanda Kelly expressou sua dificuldade em entender o que se esperava como resposta à atividade, não conseguindo chegar à generalização desejada. Foi necessário utilizarmos material concreto e uma explicação no quadro-negro para que fosse esclarecida sua dúvida.

Chegou-se então a um consenso que uma boa estratégia seria iniciar a atividade usando material concreto. Neste caso, três dados e dezoito palitos com seis tamanhos variados. Posteriormente seria usado o computador.

No início do segundo semestre letivo de 2006, o professor Paulo aplicou a atividade usando material concreto com suas turmas de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental e nos dias 14 e 21 de agosto de 2006 trouxe os resultados para discussão no GRUCOGEO.

Na apresentação, ele explica:

> *Durante as férias organizei o material. Já na primeira semana de aula eu fiz a atividade* [...] *até por questão do planejamento.*
>
> *Apliquei o material, colhi alguns registros dos alunos.* [...] *Alguns deles eu digitei ai nessas duas páginas, uma para 5ª série e a outra para 6ª série. Fiz no mesmo dia com as duas turmas.* [...]
>
> *Ela* [a atividade] *consistia em jogar três dados e haviam palitos com seis cores diferentes e de acordo com os números que caiam nos dados eles pegavam os três palitos correspondentes e verificavam se aqueles três palitos formariam ou não o triângulo. Se formassem o triângulo, eles já responderiam aqui no lado, na tabela.* [...]
>
> *Cada cor correspondia a um tamanho específico. Fiz minha unidade com um centímetro e meio. A partir de uma a até seis unidades.* [Transcrição da vídeo-gravação]

Enquanto passava as informações sobre a atividade, o professor Paulo mostrou o material confeccionado e as fichas de apontamento usadas pelos alunos, conforme mostrado nas figuras 4.24 e 4.25.

Figura 4.24: Dados e palitos

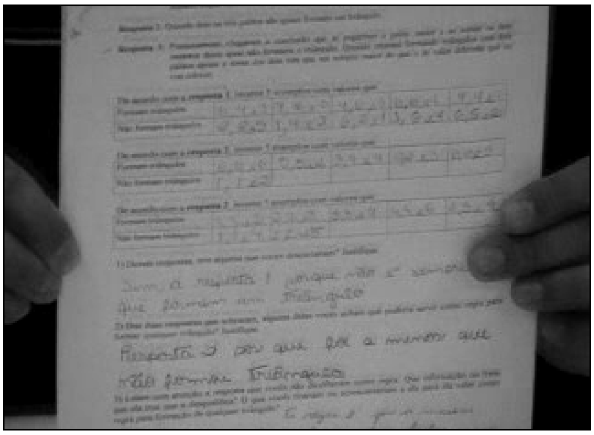


Figura 4.25: Fichas de apontamentos

As discussões no GRUCOGEO auxiliaram o professor na sistematização, possibilitando selecionar três “regras” para a existência de triângulos baseadas nas respostas dos alunos. Em seguida, as levou para a sala de aula para que os alunos apresentassem exemplos e contra-exemplos, analisassem e as validassem ou refutassem, chegando, assim, a uma generalização.

Num outro momento, o professor Paulo e alguns alunos foram ao laboratório de informática, num horário fora do horário de aula e repetiram a exploração de existência ou não do triângulo usando a construção feita no Cabri Géometrè sugerida no GRUCOGEO. Nessa mídia, foi possível ampliar as possibilidades de exploração, passando a trabalhar com valores decimais para as medidas dos lados do triângulo.

O resultado desta última etapa também foi apresentado e discutido no GRUCOGEO.

4.2.3 Síntese Geral dos aspectos analisados na atividade

Ao analisarmos os dados produzidos nessa atividade, percebemos que o ambiente de compartilhamento de experiências foi o destaque. Em todas as fases, o grupo se envolveu buscando formas para o melhor aproveitamento da tarefa, tanto em função dos alunos escolares, para que eles aproveitassem o conteúdo, quanto para o professor Paulo, para que ele discutisse e analisasse o retorno da atividade, e para os demais integrantes do GRUCOGEO que aproveitaram a oportunidade para refletir sobre a prática docente.

4.2.3.1 A potencialidade da atividade como incentivadora de formulação de provas (Como as atividades de investigação incentivaram as provas)

O primeiro contato com um pensamento argumentativo aconteceu na etapa de definição da atividade, quando apresentamos a construção feita no Cabri. Acreditamos que a dificuldade de perceber o padrão nas condições para formação ou não do triângulo, naquele momento, pode ter acontecido pela falta dos registros dos valores de forma organizada, em tabela, e que permitisse a análise. Com isto, tivemos a alteração na proposta da atividade com a inserção dos dados e palitos. Como nessa atividade a expectativa era de que os alunos percebessem a condição para a existência de um triângulo, entendemos que esta mudança foi significativa, pois restringiu o número de combinações possíveis para os lados do triângulo e consequentemente, facilitou a análise dos dados obtidos.

O processo no qual os alunos se envolveram para tentar justificar os resultados da experimentação com os dados e os palitos, fez com que surgissem as dificuldades em conseqüências das falhas conceituais dos seus conhecimentos geométricos.

Na reunião do dia 14 de agosto, a primeira referente às análises da atividade, o professor Paulo expõe a questão-chave da atividade,

> *A pergunta que eles tinham que responder era: "Quando que três palitos formam ou não um triângulo?". Então, quer dizer, era uma pergunta assim bastante aberta, tanto que surgiram respostas, como a do grupo seis: "quando as três partes se juntam".*[Transcrição da vídeogravação]

Associando esta fala às demais informações que já apresentamos sobre esta tarefa, podemos identificar nela as características de uma atividade exploratório-investigativa, dentro da concepção de Ponte (2003), ou seja, além de ter uma questão aberta, é facilmente identificável seu contexto matemático. As respostas não estão "imediatamente acessíveis, ao aluno" (OLIVEIRA, SEGURADO, PONTE, 1999, p.2) da série à qual foi proposta e conforme veremos ao longo deste texto, a exploração/investigação permitiu aos alunos, o levantamento de várias conjecturas que foram testadas, principalmente por exemplos e contra-exemplos. As outras questões que foram levantadas geraram um novo ciclo de conjecturas, experimentações e conclusão. Após todo esse processo, as idéias foram registradas e apresentadas ao grupo.

Graças a essas características, as dinâmicas adotadas e as dificuldades que surgiram nos registros dos alunos, falhas foram possíveis de ser detectadas em diversos conceitos geométricos

> ***Paulo:*** [após analisar algumas respostas dos alunos] *O objeto protótipo está muito presente ali.* [...]
>
> *Inclusive, numa outra sexta série,* [...] *havia até uma discussão em relação ao que é ser triângulo.* [...] *Viam ali os três palitos no quadro e diziam que aquilo não era triângulo era pirâmide. Até a confusão do bi e tri dimensional. Então, eu até achei um pouco crítica a coisa...*
>
> ***Regina:*** *Agora, por que isto acontece Paulo? Por que é que começa aí a pensar até na essência do que é o conceito primeiro?Pelo tipo de atividade que você está propondo. É uma atividade completamente aberta.*
>
> *Quando você fala assim: "a pergunta inicial não ficou muito clara. Ela ficou muito ampla", mas é porque ela ficou muito ampla que te possibilitou até rever conceitos primeiros como é o caso do que é um triângulo. Qual a definição primeira de triângulo? Eu não estou aplicando uma medida, não estou só olhando para a área, não estou olhando para... Não é? Ainda estou olhando para o conceito primeiro do que seja um triângulo. Por que quando eles dizem assim, eu vi aqui na sexta série...*[procurando nas anotações] *Por isso que o registro é maravilhoso: por que o registro diz ao professor como é que os alunos estão concebendo as coisas. E ai eles dizem assim* [...]*: "Na segunda jogada* [referindo-se aos dados] *conseguimos formar o triângulo porque o menor palito ficou na base".*
>
> *Quem é a base? O que é base de um triângulo?* [Transcrição da vídeo-gravação]

Na forma como o assunto é tratado em alguns livros didáticos, em que é explicado e posteriormente é proposta uma série de exercícios para serem resolvidos, provavelmente estas questões conceituais não apareceriam.

No dia 21 de agosto, também foram destacadas as características dessa atividade e as conseqüências:

> ***Regina:*** *O que o Paulo fez? Você* [Paulo] *colocou a criança em atividade, ela experimentando* [referindo-se aos palitos e os dados e ao computador com o Cabri]. *Você não deu modelos prontos para ela analisar. Ela experimentou no manipulativo, ela experimentou no computador. Se parar aí eu concordo com você* [Gabriela] *que era preferível trabalhar com modelos prontos. O que não pode é parar ai. Percebe? Mesmo assim, o Paulo está fazendo toda uma análise, toda uma discussão. Não estou falando que não está tendo. Mas, ele está, com eu diria... O Paulo está tentando um caminho de problematização para fazer os alunos refletirem. Não é isto? Para fazê-los chegar numa regra geral. Então ele também tem que buscar este caminho. É muito diferente de você dar o modelo pronto e a pergunta pra ser única.*
>
> *E outra coisa: quantas outras coisas estão surgindo e que não só a desigualdade triangular?Se você dá um modelo pronto e faz uma pergunta, às vezes não aparece toda esta riqueza. Então, ele colocando em atividade, primeiro, pode ter aluno que pense que eu não formo o triângulo se os lados não forem* [números] *naturais. Pode ter aluno que pense isto... Por que não? Todos os modelos protótipos que a gente já recebeu até hoje, de triângulo, é porque a medida dos lados é representada por um número natural. A gente nunca vê lados que não sejam. Só vê quando a gente vai para o Teorema de Pitágoras e começa a calcular e vê lá. Podia ser que isto aparecesse. Mas quando você vai para o Cabri e constrói o triângulo com outras medidas que não naturais, então você já rompe esta outra definição.*
>
> [...]
>
> ***Regina:*** *Outra coisa: o que apareceu? Apareceu o conceito problema: neste primeiro, o Paulo não estava pensando na problematização do conceito de triângulo, na definição de triângulo. Ele tava só pensando na desigualdade mesmo, e de repente, ao fazer a atividade, percebe que isto é um problema. Agora ele já começou a problematizar de outra forma.*
>
> *Ao colocar o aluno na atividade, ele começa a participar desses momentos e o professor pode problematizar outras coisas que não só o que o modelo está mostrando.* [Transcrição da vídeo-gravação]

O conjunto formado pela atividade exploratório/investigativa, a reflexão sobre a ação docente e sobre as respostas dos alunos, o uso das mídias num processo de "experiência raciocinada", potencializam as oportunidades didático/pedagógicas, inclusive na formação de um pensamento lógico-dedutivo que podem vir a facilitar o processo de provas e validações. O que constatamos nesta atividade já tinha sido apontado também por Ponte (2003) sobre o trabalho com as atividades investigativas na sala de aula.

> Verifica-se, assim, que a realização de investigações matemáticas pode constituir uma ocasião para os alunos mobilizarem e consolidarem os seus

> conhecimentos matemáticos, para desenvolverem capacidades de nível superior e até para promoverem novas aprendizagens. No entanto, a realização destas actividades também demonstra fragilidades no conhecimento matemático dos alunos, por vezes em conceitos e idéias que se supõem bem aprendidos. É de crer que a realização continuada destas actividades ajude a promover nos alunos novas aprendizagens matemáticas. (p. 32)

Dessa forma, acreditamos que a atividade mobilizou os alunos para o processo de prova, e foi nesse movimento, que se permitiu a verificação da falha conceitual necessária para a construção de argumentos lógicos consistentes.

4.2.3.2 - Diferentes mídias na Matemática Escolar (Quais mídias foram mobilizadas?)

As mídias utilizadas, dados e palitos e o computador com o programa Cabri Géometrè, associadas a uma atividade com características exploratório-investigativa serviram como recursos didáticos para a construção de conceitos geométricos, por parte dos alunos, e auxiliaram o professor a identificar as relações estabelecidas por eles sobre a desigualdade triangular e os conceitos que o professor Paulo considerava fazerem parte do conhecimento matemáticos deles.

O uso dos dados com os palitos, no início da atividade, definiu um ambiente de experimentação com características mais restritas: os dados tiveram a função de gerar uma combinação aleatória de valores (de um a seis), evitando assim, uma tendência nesta combinação, e os palitos, separados em três conjuntos de seis medidas, foram usados para representar os segmentos que seriam usados como lados do triângulo a ser formado.

O professor Paulo fez a leitura do registro de um grupo de alunos da 6ª série, que nos permite refletir sobre a importância da análise acompanhar a experiência com o material concreto:

> ***Paulo:*** *Primeiramente, chegamos à conclusão que se pegarmos o palito maior e ao somarmos os dois menores desse igual, não formaria triângulo. [...]*
>
> *Dois, chegamos à conclusão que se os palitos forem do mesmo tamanho formarão o triângulo [...]*
>
> *Quando chegamos à última jogada, logo vimos que não daria certo, pois a soma dos palitos menores era do mesmo valor do maior. Só que no lugar disso deu certo. Então, chegamos à conclusão que os palitos estavam com defeito.* [Transcrição da vídeo-gravação]

Pode-se observar que o grupo conseguiu chegar a uma generalização (apesar de não perceber que a segunda condição, quando “os palitos forem do mesmo tamanho”, está expressa na primeira, a soma dos dois menores tem que ter um valor maior que o do lado maior), entretanto não conseguiram validá-la com os palitos por causa de uma diferença de tamanho em sua confecção. Apesar do cuidado do professor em fazer um bom acabamento, raramente se escapa de problemas desta natureza.

Este exemplo corrobora com a afirmação de Pais (2000, p.2) que não se pode focar o ensino na "exclusiva manipulação de objetos, esquecendo a estreita relação que deve haver entre a experiência e a reflexão" e ainda, que é fundamental a competência do professor nesta intervenção rumo à reflexão. Assim, podemos afirmar que por conta do ambiente de aprendizagem proposto pelo professor Paulo, os alunos reconheceram tais limitações e a verbalizaram ("chegamos à conclusão que os palitos estavam com defeito").

Num segundo momento, o professor Paulo e alguns alunos foram ao laboratório de informática, num horário não regular, e repetiram a exploração de existência ou não do triângulo, desta vez usando a construção feita no Cabri Géometrè sugerida no GRUCOGEO. Nesta mídia, foi possível ampliar as possibilidades de exploração, passando-se a trabalhar com valores decimais para os lados do triângulo. Os alunos conseguiram perceber as possibilidades dessas mudanças a partir do uso da nova mídia. O professor Paulo as registra em seu texto da seguinte forma:

> Os alunos não haviam tido contato com software de geometria dinâmica, mas como a atividade era apenas de manipulação e observação não foi difícil de ser realizada, bastava abrir o arquivo que já estava pronto [...]
>
> Na socialização perguntei aos alunos sobre a vantagem que se tem com a atividade feita no computador. Foi unânime a resposta sobre a possibilidade de se usar números não inteiros. Acrescentei também que, usando esse tipo de mídia, podemos eliminar o problema de "defeito dos palitos", como fora detectado por um grupo de alunos na atividade I. (PENHA, 2006, p.6)

Como podemos observar, os alunos reconheceram a limitação da primeira mídia e a complementação feita com o uso da segunda. O que às vezes passa despercebido é a importância da primeira mídia na estruturação inicial do conhecimento. Conforme registramos, a proposta para essa atividade era usar somente a mídia computador e o programa Cabri, mas para tornar a atividade mais clara, optou-se por começar usando a mídia dados e palitos. "Aqui vale observarmos o fato de que lançar mão do uso de tecnologia informática não significa necessariamente abandonar as outras tecnologias. É preciso avaliar o que queremos enfatizar e qual a mídia mais adequada para atender o nosso propósito" (BORBA, PENTEADO, 2005, p. 64).

Nesse sentido, entendemos que a combinação das duas mídias possibilitou uma complementação entre elas, de forma que cada uma evidenciou um aspecto diferente do conceito trabalhado.

4.2.3.3 - A aproximação com o fazer matemático

Essa atividade teve um duplo momento: o do professor com seus alunos e o do professor com o grupo. Vamos focar nossa análise no primeiro momento.

A atividade proporcionou aos alunos a possibilidade de trabalharem com a busca por regularidades. Como já foi dito, os dados garantiram à atividade a aleatoriedade necessária na geração dos valores para os lados do triângulo. Os valores sorteados tinham a representação física nos palitos que tentariam formar o triângulo. Com este conjunto (dados e palitos) e a experimentação foi possível gerar uma tabela usada como base para a análise na busca de uma regularidade sobre as condições de existência dos triângulos. As proposições nascidas desta análise foram sintetizadas pelo professor e apresentadas à sala para que eles mesmos procurassem combinações de valores para os lados que validassem ou não estas condições.

O ambiente construído pelo professor Paulo, seus alunos e a tarefa proposta aproximou-se daquele apresentado pelo matemático Imre Lakatos no seu livro "A lógica do descobrimento matemático. Provas e refutações" e para quem a demonstração

> "não significa um processo mecânico que transmite a verdade numa cadeia inquebrável, das hipóteses até as conclusões. Em vez disso, significa explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível, mais convincente, enquanto é tornada mais detalhada e exata sob a pressão de contra-exemplos" DAVIS, HERSH, 1985, p. 389)..

Acreditamos que mais oportunidades como estas podem favorecer a mudança na forma de produção do conhecimento matemático em sala de aula. O movimento gerado a partir da atividade, com momentos de experimentação, registros, sistematização pelo professor, discussão com os outros alunos validando ou refutando as proposições foi potencialmente favorecedor da construção do conhecimento matemático e do raciocínio lógico-dedutível.

Apesar das diversas dificuldades pudemos observar que alguns grupos se aproximaram da generalização.

4.2.3.4 - A dupla dimensão: para os professores escolares (como desenvolver na sala de aula) e para os futuros professores (como conteúdo escolar)

Podemos afirmar que foi essa dupla dimensão que mudou o direcionamento dessa tarefa. Conforme relatamos, foi a partir da dificuldade encontrada pela graduanda Kelly que o grupo reformulou a abordagem incluindo a mídia dados e palitos.

Além disso, com as discussões sobre os resultados da aplicação da tarefa, surgiram outros elementos que contribuíram para reflexões sobre o ensino e a aprendizagem da geometria permitindo ao grupo rever conceitos matemáticos e discutir a importância dos aspectos conceituais no ensino da Geometria.

Uma dessas discussões foi sobre as figuras prototípicas. Este item foi bem marcante nos registros dos alunos. Entendemos "figuras prototípicas" como modelos estereotipados que acabam provocando um erro na elaboração conceitual do objeto geométrico (NACARATO, PASSOS, 2003, p.107-118). Sobre elas, Gravina (1996) escreve que

> os livros escolares iniciam com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares. [...] Isto leva os alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos quando em outra situação (p.2)

O professor Paulo apresentou o registro de um grupo de alunos da 5ª série,

> ***Paulo:*** *Tem um exemplo aqui, na 5ª série, lá no grupo 6, quando um aluno respondeu que "depende das medidas, por exemplo, se for 6, 5 e 1 não dá pra formar, agora se for 6, 5, 4 dá um triangulo reto", em uma das jogadas deste grupo apareceram os números 2, 5, 5 foi negativa quanto à formação do triângulo, acharam que não daria pra formar porque parecia com a letra A.* [Transcrição da vídeo-gravação]

Em outro trecho da reunião foi discutido ainda,

> ***Regina:*** [...] *A hipótese então é que para eles* [os alunos] *o triângulo tem que ser eqüilátero, para ser um triângulo?*
>
> ***Paulo:*** *Pra ser triângulo.* [...] *Ou pelo menos dois* [lados de mesmo valor].
>
> ***Terezinha:*** *Não será por causa da idade? De primeira à quarta mostra pra eles regra geométrica, o "deseinho" perfeito?*
>
> ***Regina:*** *É conseqüência disso.*
>
> [...]
>
> ***Regina:*** *A questão do pensamento geométrico é que de tanto você oferecer o modelo do triângulo eqüilátero e chamar aquilo de triângulo e você dá um ensino baseado só na questão do visual, eu só trabalho a questão da visualização, você faz com que o triângulo assuma mais uma característica na sua definição: que seja também eqüilátero.*[...] *O fato de você só fornecer o triângulo eqüilátero é ruim, você também teria que mostrar outros modelos, mas se você só oferece o triângulo eqüilátero, mas existe um momento em que você deixa de ter um ensino da Geometria vinculado só a visualização e passa a ter um momento de análise, de explicação, que você vai à definição do que é triângulo, então você pode até* [...] *tomar consciência deste protótipo. Mas, se você fica só no visual, nunca existe uma análise, um tratamento dessa informação, de qual é o conceito, o que define o triângulo, e você só oferece o modelo eqüilátero é claro que ele vai achar que só existe o eqüilátero mesmo.* [Transcrição da vídeo-gravação]

O que é discutido no diálogo acima vem ao encontro do que Pais (1996) analisa sobre o conhecimento geométrico. Segundo esse autor, para que haja a aprendizagem geométrica é necessário o desenvolvimento de três elementos básicos: o intuitivo, o experimental e o conceitual. Ele caracteriza o desenho como sendo ainda de natureza concreta, porém com uma carga conceitual maior que o objeto. Ambos, objeto e desenho, estão ligados ao elemento experimental e como o próprio autor frisa, não podemos acreditar que o aluno seja capaz de apreender o conceito apenas com sua manipulação, faz-se necessária a intervenção pedagógica do professor, para que isso aconteça.

Para Nacarato e Passos (2003), baseando-se em Fishbein (1993), "o que caracteriza um conceito é o fato de que ele expressa uma idéia, uma representação geral, ideal de uma classe de objetos, baseada em seus traços comuns" (p.61) como, por exemplo, o triângulo discutido no diálogo acima, ou do retângulo e outras formas geométricas que aparecem no próximo diálogo,

> ***Regina:*** *Então é aquela coisa: o aspecto visual faz acreditar numa coisa que nem sempre é verdade. Então basta o visual? Não! Tem que ter um outro nível: de análise, de definição.*
>
> *Semana passada, quando eu sai daqui* [da reunião do GRUCOGEO] *fui à classe da Simone, eles quase caíram da cadeira quando eu falei que o quadrado era retângulo. São alunos da licenciatura de Matemática. Eles quase me mataram na sala de aula.*
>
> ***Gabriela:*** *Desde que aprendemos que quadrado é quadrado e retângulo é retângulo, a gente tem aprendido que retângulo é aquele que tem os lados paralelos, mas tem medidas diferentes*
>
> ***Paulo:*** *Eu comecei a falar isto na quinta série: definição do que é paralelogramo. Beleza. Depois, definição do que é retângulo, se não me engano. Aí, perguntei para eles assim: bom então o retângulo também é um paralelogramo? Ai fica aquela dúvida no ar... Mas, qual é a definição, qual é a característica que tem que ter para ser um paralelogramo? E o retângulo não obedece a esta mesma característica?*
>
> ***Regina:*** *Então, quando você faz uma discussão deste tipo, um questionamento deste tipo, você está preparando seus alunos pra uma análise desta aqui que você está fazendo* [referindo-se à atividade do triângulo com justificativa]. *Qual é a grande dificuldade deles? É perceber que uma parte de uma resposta está dentro da outra* [referindo-se à resposta de um grupo que conclui uma condição para formar triângulo a soma dos dois lados menores deveria ser maior que o outro, e a outra condição é que os três lados sejam iguais]. *Aí começa a entrar um pouco da lógica, da linguagem: pelo menos um, mais do que um...* [...] *Como é que o retângulo pode ser um paralelogramo, um polígono, um quadrilátero, com dois pares de lados paralelos?* [...] *Então é por isso que você está no nível da análise e não do visual.* [Transcrição da vídeo-gravação]

A discussão sobre objetos prototípicos permite ainda uma reflexão sobre o ensino da geometria escolar e a formação do professor de Matemática.

> ***Regina:*** *Agora Gabriela, o que a gente vê é que o aluno passou por toda Educação Básica e ficou só no nível do visual. Porque, até uma criança distinguir quadrado de retângulo é aceitável,* [...], *agora chegar pra uma criança que passou toda Educação Básica, Ensino Médio e ainda continuar*

> *fazendo esta diferenciação só e não conseguir perceber... aí é porque não houve ensino de Geometria.* [Transcrição da vídeo-gravação]

Este problema do ensino da Geometria foi apontado também por Nacarato e Passos (2003)

> A nossa prática tem nos permitido constatar ser comum professores chegarem à pós-graduação sem um raciocínio geométrico formado. Os próprios professores, em seus depoimentos, admitem não terem vivenciado um ensino de geometria capaz de lhes permitir pensar geometricamente – em toda amplitude discutida anteriormente. A experiência que relatam ter tido com o ensino da geometria reduz-se à geometria métrica e ao reconhecimento de figuras geométricas, sem, no entanto, chegar a distinguir nem mesmo os aspectos figurais dos conceituais. (p. 69)

Entendemos que são necessárias mudanças no ensino da Geometria para que esta situação seja revertida.

Outra discussão promovida pela atividade foi com relação ao desenvolvimento da linguagem, como um todo, e da linguagem Matemática. Segundo Santos (2005),

> Na aula de Matemática, a comunicação pode ser entendida, [...], como todas as formas de discursos, linguagens utilizadas por professores e alunos para representar, informar, falar, argumentar, negociar significados. (p. 117)

Assim, quando participa de uma atividade exploratório/investigativa o aluno pode usar a linguagem, no mínimo, em três momentos: (a) no momento de negociação com o seu grupo defendendo, via argumentos, seu ponto de vista; (b) no registro escrito das discussões sobre a atividade; e (c) no momento de expressar a resposta ou conclusão do seu grupo para a sala. Observou-se nos registros dos alunos, que ainda falta uma linguagem clara e objetiva, dificultando o entendimento da resposta e, até mesmo, do raciocínio empregado. Na questão proposta pelo professor Paulo, "Quando três palitos formam ou não triângulos?", obtiveram-se respostas do tipo:

1) Porque o número, tamanho e a forma são diferentes.
2) Porque os palitos são pequenos ou às vezes os números não tem formas iguais;
3) Quando as três partes se juntam;
4) Depende das medidas;

Ao discutir essas respostas, o professor Paulo reconhece a necessidade de uma intervenção junto aos alunos, tentando fazê-los entender a necessidade de reformular seu raciocínio ou reformular a forma como ele foi expresso.

> ***Paulo:*** [...] *Tanto que algumas respostas precisam ser muito repensadas, por exemplo, por que o número, o tamanho e a forma são diferentes. Uma resposta por que formou. Por que não formou: por que os palitos são pequeno ou as vezes os números não tem forma igual.*[...] *Algumas respostas são dispersas, sem muita reflexão.* [Transcrição da vídeo-gravação]

Nos diversos momentos, tanto professores quanto futuros professores, tiveram elementos para refletir sobre a construção do seu conhecimento geométrico, sua prática escolar e sua concepção sobre ensino, aprendizagem e a própria Matemática. Assim, entendemos que essa atividade atendeu às expectativas deste aspecto, possibilitando geração de conhecimento tanto sobre o conteúdo quanto a prática docente.

4.2.3.5 - A importância do trabalho colaborativo para os participantes na realização da atividade

O movimento de definição da atividade e sua adequação, descritos anteriormente na apresentação da atividade; a reflexão sobre os resultados, apresentada nas falas dos integrantes do grupo nos aspectos analisados acima; e de possíveis ações a partir da reflexão, tanto evidencia o movimento de um trabalho coletivo, quanto promove um ambiente de aprendizagem sobre a docência de Geometria e sobre o trabalho com atividades exploratório/investigativas, para os professores e os futuros professores.

Os comentários do professor Paulo, intercalados com os da formadora Regina, mostram momentos onde são mescladas experiência, prática e teoria na busca por um aproveitamento maior da atividade como um momento que favorece a reflexão do aluno e consequentemente uma reestruturação do seu conhecimento.

> ***Regina:*** *O movimento até agora foi: você fez a atividade com eles, eles registram nesta folha e ainda não houve um retorno. É isso?*
>
> ***Paulo:*** *Não houve um retorno ainda.*
>
> ***Regina:*** *Tá. Nem uma socialização dos grupos?*
>
> ***Paulo:*** *Na quinta série houve uma socialização.* [...] *Já na sexta série, por conta de uma quebra no meio das aulas determinadas,* [...] *não deu tempo da gente fazer uma socialização. Aí, na quinta série, eu fiz o seguinte: da seqüência numérica que eles mesmo tinham colocados na lousa, eu coloquei quatro que formaram triângulos e quatro que não e pedi para que eles pensassem em casa: porque uma seqüência formou triângulo e a outro não formava triângulo.*[...]
>
> ***Regina:*** *Legal por que, por exemplo, nessa seqüência que você pôs você já quebra o primeiro argumento, por que o grupo um fala assim: se cair três palitos diferentes não da pra formar um triângulo. Você trouxe um aqui que é o 6, 5, 3 que forma triângulo.* [...] *Vocês conseguiram fazer isto: rever o que eles tinham pensado a partir dessa tabela?*
>
> ***Paulo:*** *Não, na verdade não. Aqui o problema foi o seguinte: essa seqüência de números eu passei na lousa e eles foram pensar em casa. Então eles não tinham com eles o que eles já tinham feito.* [...] *Eu não pensei ainda como estar retornando isto pra eles. Eu tinha até conversado com a Adair* [a outra formadora] *semana passada eu falei:* ***acho que depois no grupo*** [GRUCOGEO]***, o próprio grupo dá umas idéias de como a gente pode estar usando as próprias respostas deles para estar instigando ele na sala de aula****.*

> ***Regina:*** *Acho que a idéia é voltar alguma coisa deste tipo.*[...] *Você pode falar que agrupou as respostas deles, mais ou menos por alguns eixos, algumas características interessantes, e que você trouxe algumas respostas para eles estarem analisando.* [Transcrição da vídeo-gravação]

Podemos reconhecer na fala do professor Paulo a importância que ele atribui ao grupo quanto a um ambiente de produção coletiva e ajuda mútua. Isto corrobora com a opinião de Nacarato *et al* (2001) a respeito do GRUCOGEO,

> Identificamos que esse grupo adquiriu características de uma comunidade de aprendizagem, no sentido adotado por Cochran-Smith e Lytle (1999), pois ficou claro que, para cada participante do grupo, houve uma aprendizagem profissional que extrapolou os limites da Geometria, sobre seu ensino e sobre a prática de sala de aula; para os professores, mudança da sua própria prática, principalmente no que diz respeito ao papel do registro das atividades que o aluno realiza; [...]; e, para todos os envolvidos, a aprendizagem sobre as dinâmicas de um trabalho em grupo: discutir com os colegas, ouvir e dar voz ao outro, registrar a memória, analisar os registros produzidos por alunos e respeitar o ritmo, tempo e interesse de cada colega. (p. 210)

Toda essa dinâmica assumida pelo grupo para esta tarefa, permite-nos identificar a relevância do trabalho colaborativo para a realização da atividade.

4.2.3.6 - Como as provas/validações surgiram como mobilizadoras do processo de (re)siginificação do conhecimento no contexto da Matemática Escolar.

Nesta atividade, o movimento proposto aos participantes do GRUCOGEO (a criação e adaptação da tarefa, a aplicação e a discussão e análise dos resultados obtidos) permitiu-nos perceber como as tarefas exploratório-investigativas podem auxiliar a estruturação do raciocínio lógico-dedutivo.

Analisando a tarefa, na perspectiva de sua aplicação com os alunos escolares, foi possível identificar como ela mobilizou conhecimentos de geometria, de linguagem (oral e escrita), de argumentação, da análise dos resultados dos experimentos, de percepção lógica para a criação de exemplos e contra-exemplos, extrapolando a simples resposta à questão inicial “Quando que três palitos formam ou não um triângulo?”.

Por outra perspectiva, a dos participantes do GRUCOGEO, a atividade permitiu um ambiente de aprendizagem sobre a prática docente escolar e as análise que os resultados de uma tarefa possibilitam a partir do momento em que se coloca o aluno diante da necessidade de provar, seja na função de validar, explicar ou qualquer daquelas atribuídas a ela por De Villiers (1990; 2001).

Assim sendo, entendemos que as provas, nessa atividade, além de mostrar como os alunos mobilizam o conhecimento geométrico, (re)significando-o, exemplificou como elas podem tornar-se um dos elementos de avaliação sobre a apropriação dos conceitos matemáticos dos alunos.

4.3 Atividade 3: Soma das medidas dos ângulos internos do triângulo

Nesta atividade, a proposta foi desenvolver uma tarefa investigativa de geometria para os alunos de algum professor pertencente ao grupo, usando a informática como mídia.

O GRUCOGEO assumiu a incumbência de (1) discutir e preparar uma tarefa compatível com os assuntos estudados na série destes alunos; (2) dar suporte à execução da tarefa no laboratório de informática e (3) discutir os resultados obtidos com esta experiência.

Dois professores se disponibilizaram a executar a tarefa: o professor Paulo e a professora Olga.

4.3.2 A preparação para as oficinas

4.3.2.1 Definição da tarefa

A definição da tarefa, suas característica e especificidades foram discutidas nas reuniões dos dias 18 e 25 de setembro de 2006, sendo que na primeira, o número de participantes foi pequeno. Estavam presentes as formadoras Adair e Regina; as professoras Olga, Terezinha e Alice; o professor Paulo e eu. Na segunda reunião, a do dia 25 de setembro, além dos participantes da reunião anterior, estavam também os alunos da graduação Henrique, Kelly, Valéria e Simone, e a pós-graduanda Viviane.

Uma das primeiras dificuldades enfrentadas foi relacionada à execução da tarefa no laboratório de informática das escolas, por causa de incompatibilidade nos horários de disponibilidade do laboratório com os das aulas, mesmo para um retorno em outro turno.

Para essa atividade, o problema foi contornado com a possibilidade de se levar os alunos ao laboratório de informática do GRUCOGEO que possui seis computadores e uma estrutura que atenderia à proposta[43].

Dentre vários pontos discutidos e que serviram como parâmetros para a criação e execução da tarefa, destacamos:

- O assunto escolhido deveria ser compatível com os alunos da 6ª série do Ensino Fundamental, nível dos alunos do professor Paulo e da professora Olga;

[43] A estrutura do laboratório e a organização para as oficinas serão apresentadas a seguir.

- Seriam feitas duas oficinas: uma para os alunos do professor Paulo, no dia 27 de setembro de 2006, e outra para os alunos da professora Olga, no dia 02 de outubro de 2006;
- Os alunos poderiam trabalhar em duplas, portanto seria possível ter até doze alunos por oficina;
- A tarefa a ser proposta deveria levar em consideração que somente os alunos do professor Paulo tinham conhecimento de informática, pois já tinham trabalhado com o programa *Cabri Géometrè*. Portanto, ela não deveria exigir muito conhecimento de operação do programa a ser usado.
- Em síntese, os tópicos sugeridos foram: o estudo dos quadriláteros e a relação com suas diagonais, a soma das medidas dos ângulos externos dos polígonos, e a soma das medidas dos ângulos internos e externos do triângulo.
- Optou-se pelo uso do programa de Geometria Dinâmica CaR, sendo que após ser instalado em todas as máquinas do laboratório, deveria ser configurado para que na barra de ferramentas estivessem presentes somente os ícones das ferramentas necessárias para a execução da tarefa, e que, para a medida dos ângulos fossem exibidas somente duas casas decimais.

Assim, decidiu-se em trabalhar com a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e com o teorema dos ângulos externos. Para os alunos do professor Paulo os assuntos seriam novos, enquanto que para os alunos da professora Olga não, pois eles já tinham estudado sobre a soma das medidas dos ângulos internos, dessa forma, para aqueles seria dada maior ênfase ao teorema do ângulo externo.

Ficou definido ainda que a oficina seria orientada pelo professor responsável pelo grupo dos alunos, portanto professor Paulo e professora Olga e que eles deveriam interagir com seus alunos usando **questões de intervenção**.

Assumimos para a expressão "questões de intervenção" o sentido atribuído por Oliveira, Segurado e Ponte (1996) àquelas questões usadas por professores durante a execução das atividades que têm como objetivo fazer o aluno refletir e mobilizar seus conhecimentos para superar algum entrave:

> [...] tendo os alunos iniciado a actividade, o professor dá atenção ao desenvolvimento do trabalho de cada um. O apoio a conceder, no sentido de ajudar o aluno a ultrapassar certos bloqueios ou a tornar mais rica a sua investigação, é uma das facetas mais complexas da intervenção do professor. Tem muita importância numa investigação a reflexão do aluno sobre o seu trabalho. Esta pode ser estimulada directa ou indirectamente pelo professor. [...]

> Existem algumas questões que podem ajudar os alunos no desenvolvimento do seu trabalho, muitos professores têm-nas usado com sucesso: 'O que tentaste?'; 'Bem, o que achas?'; 'O que estás a tentar fazer?'; 'Por que estás a fazer isso?'; 'O que faremos quando tivermos este resultado?'; 'O que é que descobriste até ao momento?'; 'Viste alguma coisa parecida de algum modo com esta?'; 'Como podemos organizar isto?'; 'Vamos construir uma tabela de resultados?'; 'Consegues ver algum padrão?'; 'Já tentaste alguns casos mais simples?'; 'Que exemplos deveríamos escolher?'; 'Como podemos começar?'; 'Verificaste se funciona?' (p. 5)

Na segunda reunião de preparação da tarefa, o Professor Paulo socializou com o grupo a seqüência a ser trabalhada e como pretendia agir:

> ***Paulo:*** *Então perguntamos lá "De quantos pontos precisamos para formar um triângulo?", pra eles, à medida que forem construindo, a gente vai lançando questões para eles estarem fazendo: "Estes pontos podem estar em qualquer posição?". Aí, conforme a resposta a gente sugere: "E se os pontos forem colineares?", "Que objetos ou entes geométricos usamos para formar os lados do triângulo, uma reta, uma semi-reta, um segmento de reta?"* [...]
>
> *O segundo passo, depois do triângulo construído, eles iriam medir os ângulos internos do triângulo, somar as medidas dos ângulos internos* [...]
>
> [...]
>
> *Feito a medição e a soma da medida dos três ângulos, aí a gente questiona: "Será que este valor de 180 é valido para qualquer triângulo?", "Como a gente pode provar isto?".*
>
> ***Regina:*** *Na verdade, antes desta pergunta "se o valor 180 é válido para qualquer um", poderia ter um momento de socialização "Quanto que vocês acharam, quanto que vocês acharam?". Não é você que vai perguntar, são eles que vão perceber que é 180°. Então, daí vem a questão: "Não tem alguma coisa estranha?".*
>
> ***Adair:*** *"Somando os ângulos internos do triângulo, o que você observa?"*[...] *"Esse número que você obteve...", pode ser assim Rê?* [Perguntando para a Regina]
>
> **[...]**
>
> ***Regina:*** *Ah... "Então você observa e vai ver o dos colegas..."* [...]
>
> [...]
>
> ***Paulo:*** *Ai eu coloquei aqui: "Como podemos demonstrar isto?".*
>
> ***Adair:*** *Mas antes disto, é socializar* [...] *Cada dupla vai falar o valor que encontrou.*
>
> ***Paulo:*** *E depois, esqueci de anotar aqui, falar pra eles construírem outros triângulos. Construir ou manipular a construção.*
>
> ***Adair:*** *Por que a partir do momento que você abre espaço pra cada grupo falar quanto que achou, você já está mostrando que cada um tem um triângulo de um tamanho. Triângulos não são iguais.*
>
> ***Regina:*** *Ai você pode falar isso: "Nossa, mas como é que pode? Cada um fez um triângulo e deu tudo igual. Não estou entendendo?".*
>
> [...]

Paulo: *Socializar. Depois, que socializou...*

Adair: *Aí é que eles vão tentar...*

Regina: *Vão mexer... Você fala assim: "Como a gente pode perceber que isto acontece? Vocês podem fazer outros triângulos, podem mexer, pode fazer o que vocês quiserem.". Aí eles vão tentar uma forma de* [provar]...

Adair: *O que seria legal depois é eles fazerem o registro. Não sei se vai dar tempo nas duas horas* [da oficina]. [Transcrição da vídeo-gravação]

Resumindo, a estrutura proposta para a atividade foi: (1) a construção de um triângulo *ABC* qualquer, (2) a medição dos seus ângulos internos, (3) a soma destes valores, na calculadora do próprio computador, (4) a socialização dos resultados, (5) a manipulação da construção e a verificação da permanência deste valor, (6) a tentativa de se estruturar uma prova e (7) registro pelos alunos.

Podemos observar que esta seqüência enquadra-se nas fases de realização de uma atividade de investigativa proposta por Ponte *et al* (2005, p.21): (1) Exploração e formulação de questões, (2) Conjecturas, (3) Teste e reformulação e (4) Justificação e avaliação. Isso possibilita caracterizar a atividade planejada no movimento das atividades investigativas.

Também nesta segunda reunião de preparação, a professora Olga compartilhou com o grupo o seu planejamento.

Regina: [anotando a proposta de trabalho] *Então vamos lá. A atividade, qual que vai ser? A mesma idéia? Vai entrando com a proposta de como vai fazer o triângulo para eles irem conhecendo o CaR... Como o Paulo fez? Se você tiver os pontos colineares...*

Professora Olga: *Sim... Sim... Porque eles nunca passaram por isso* [usar o computador com programa de Geometria Dinâmica]*, tá? Nenhum programa de geometria.*

Regina: *Eles não conhecem nem o Cabri?*

Professora Olga: *Não.*

[...]

Professora Olga: *Eles vão ter que construir o triângulo.* [...]

Regina: *Ângulo externo. Tudo bem? Eles sabem como calcula o ângulo externo? O que é o ângulo externo do triângulo?*

Professora Olga: *Sim.*

Adair: *Que em cada vértice eu posso ter dois ângulos externos?*

Professora Olga: *Eles já sabem o ângulo interno. Se sabem o ângulo interno, provavelmente sabem o ângulo externo. Mas eu tenho que preparar os alunos pra isto? Ou não?*

Adair: *Primeiro o traçado. Eles sabem o traçado do ângulo externo?*

Professora Olga: *Sim.*

[...]

> ***Regina:*** *O objetivo é o teorema do ângulo externo. Perceber que o ângulo externo é a soma dos dois outros internos.* [...] *Então o que eles precisam necessariamente: traçar um dos ângulos externos, calcular a medida desse ângulo e dos outros dois ou dos outros três... Que fica até legal porque daí eles podem usar o conhecimento que eles têm da soma de 180.* [...] *Uma das possibilidades deles perceberem é: calcula a soma dos três ângulos internos, marca os três ângulos internos, marca um dos ângulos externos e daí calcula a medida deste ângulo externo. É exatamente o que o Jorge fez...* [Olhando para a construção feita no computador usando o CaR].
>
> [...]
>
> ***Professora Olga:*** *Neste caso é melhor escolher só um ângulo externo?*
>
> ***Regina:*** *Podia calcular um* [...] *aí perguntar...*
>
> ***Adair:*** *Se isso acontece para os outros ângulos.*
>
> ***Professora Olga:*** *Para os demais... É...*
>
> ***Regina:*** *O que acontece? Pega os três ângulos internos e calcula a soma.* [...] *Não? O que será que acontece com os outros ângulos externos?*
>
> ***Adair:*** [olhando a construção feito pelo Jorge] *Como ele vai fazer o esquema? Que aí ele está traçando um ângulo externo, pode traçar o outro ângulo externo também.* [...]
>
> ***Regina:*** [falando para professora Olga] *O que você acha que vai acontecer?*
>
> ***Professora Olga:*** *Ele vai achar os ângulos... Já que o software vai achar os valores dos ângulos internos, o que ele vai fazer? Meu aluno vai fazer... Eu tenho certeza... Vai achar aquele ângulo adjacente, ângulo externo.*
>
> [...]
>
> ***Adair:*** *Sim... Que é suplementar.* [...] *Você acha que isto ele vai saber?*
>
> ***Professora Olga:*** *Isso ele vai saber.*
>
> ***Regina:*** *Não, mas eu acho que é legal isso, até pra levantar como hipótese. Entendeu? Eu vou saber quanto é. Agora, por que a medida é essa? A questão é essa. Porque se os três são a soma 180, 180 menos esse ângulo vai ser a soma dos outros dois. Você vai no inverso do teorema* [do ângulo] *externo.*
>
> ***Professora Olga:*** *Eu posso falar pra eles, no dia, que pode comparar o ângulo externo com os ângulos, ou nada?*
>
> ***Adair e Regina:*** *Pode Olga...*
>
> ***Professora Olga:*** *Já direcioná-los?*
>
> ***Regina:*** *Não. Primeiro você deixa livre, ai veja o que eles vão fazendo: "Alguém conseguiu alguma relação?", "Será que tem alguma relação do ângulo externo com os ângulos internos?". Não sei...*
>
> ***Adair:*** *Por que você não vai dizer "faça isso", mas "será que eu não posso fazer isso? Será que se eu fizer isso dá certo?".* [Transcrição da vídeo-gravação]

Esta discussão feita em grupo cria um potencial ambiente de troca: numa mesma reunião tivemos a discussão da oficina do professor Paulo e da professora Olga, cada uma com focos diferenciados, proporcionando aos professores, formadores e graduandos olhares múltiplos sobre a estruturação de uma tarefa.

Varanda e Numes (1999), ao escreverem sobre as atividades exploratório-investigativas, comentam pontos que pudemos sentir neste processo de preparação. Segundo esses autores,

> [...] a escolha da tarefa não constitui o único desafio que é posto ao professor quando pretende implementar tarefas de investigação na sua aula. A planificação de uma aula de investigação é também um desafio para o professor, pois é fundamental que o professor realize a sua investigação, desenvolvendo, assim, uma atitude investigativa. No entanto, não basta realizar a investigação proposta, para se considerar que o planeamento das aulas esteja concluído. É necessário: (a)preparar o modo como a tarefa vai ser apresentada aos alunos, na forma oral ou escrita, (b)escolher a metodologia de trabalho utilizada, de grupo ou individual, (c) decidir o modo como vão ser confrontados os processos usados, bem como a produção final que é esperada dos alunos.
>
> O papel que o professor desempenha no decorrer da actividade dos alunos é substancialmente diferente do papel desempenhado durante uma aula tradicional. Nesta fase o papel do professor é essencialmente o de gerir os vários momentos da aula, dando os apoios necessários para que todos estejam envolvidos num "fluxo" de actividade (Oliveira, 1998).
>
> Finalmente, o professor tem que promover um trabalho de síntese e reflexão, onde a aprendizagem individual ou de pequeno grupo é partilhada por todos. (p. 1-2)

Durante boa parte das reuniões de preparação da oficina, os graduados mantiveram-se em silêncio, porém atentos às discussões e às propostas apresentadas. Quase no final da reunião, eles são "provocados" pela formadora Adair que lhes chama a atenção para todo o processo:

> ***Adair:*** *Vocês perceberam o movimento que a gente faz para preparar uma tarefa?* [Transcrição da vídeogravação]

Em reuniões deste tipo, no GRUCOGEO, temos a oportunidade de confrontar a prática com a teoria possibilitando uma (re)significação do assunto abordado. Além de retornar sempre ao assunto escolhido para a tarefa, neste caso a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo e o teorema do ângulo externo, temos a oportunidade de acompanhar o movimento de preparação para a execução da tarefa em sala de aula. Muitas vezes, principalmente enquanto somos alunos, participamos de aulas com atividades exploratório-investigativas, mas não imaginamos o planejamento e a mobilização que se fazem necessários para que elas aconteçam e atinjam os objetivos esperados.

4.3.2.2 Uma prova alternativa

Ainda durante a etapa de planejamento da tarefa foi discutida uma possível prova para ser apresentada aos alunos. Numa conversa anterior a esta reunião eu e o professor Paulo havíamos discutido a possibilidade de construir uma prova usando o CaR e que fosse familiar aos alunos baseando-se no recorte do triângulo, conforme mostrado na figura 4.26.

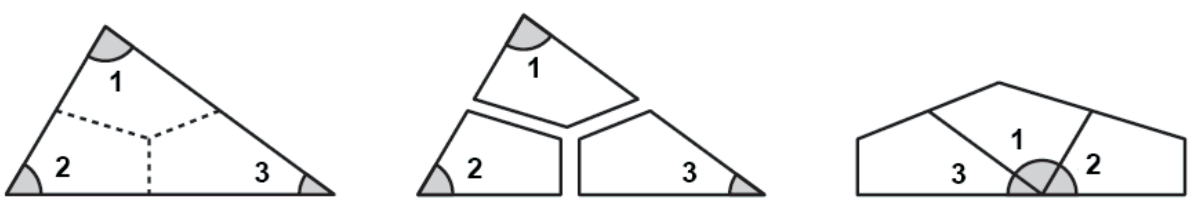


Figura 4.26 – Recorte do triângulo em três partes para mostrar a soma dos ângulos internos

Desejava-se, usando o programa de Geometria Dinâmica, reproduzir esta idéia, ou seja, transportar para um mesmo ponto os ângulos internos do triângulo.

> ***Jorge:*** *Fiz o seguinte: montei o triângulo, escolhi um lado para ser a base e tracei uma reta suporte. Coloquei um ponto sobre esta reta e tracei paralelas a um lado passando por este ponto e ao outro lado passando por este ponto. Então você transporta os ângulos diretos.*

As figuras 4.27 e 4.28 representam a construção feita no programa CaR.

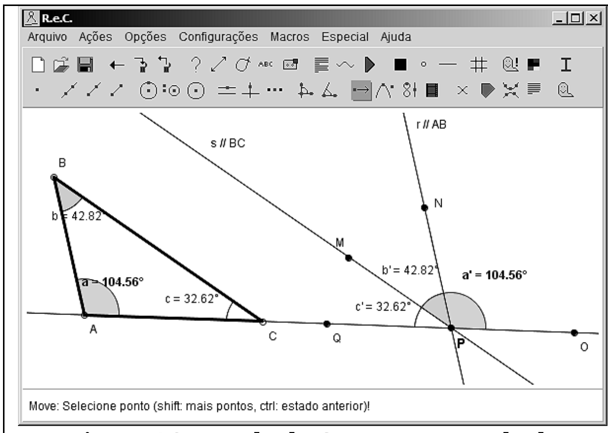


Figura 4.27 – Tela do CaR com exemplo da construção da prova proposta

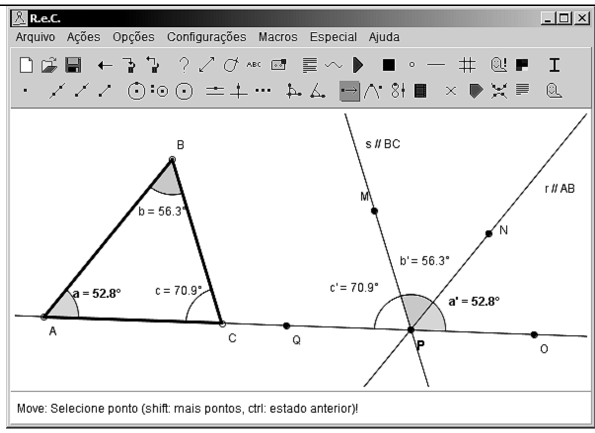


Figura 4.28 – Tela do CaR com exemplo da construção da prova proposta

Nelas, temos a reta *s* paralela ao lado *BC* e a reta *r* paralela ao lado *AB*. Assim temos o $\angle c \cong \angle c'$, $\angle a \cong \angle a'$ e $\angle b \cong \angle b'$. Ao se fazer a construção, passo a passo, intercalando os movimentos e as medições, o aluno terá maiores possibilidades para compreender a explicação. Neste caso, por exemplo, poderíamos ter começado com a construção do triângulo *ABC*, a construção da reta suporte, a medição de seus ângulos internos e a colocação do ponto P sobre esta reta.

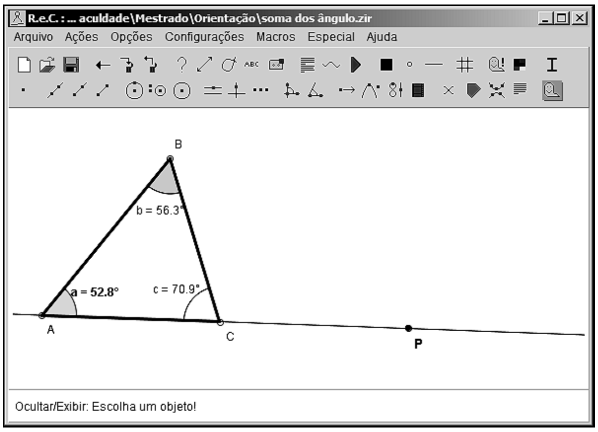


Figura 4.29 – Tela do CaR com exemplo da etapa 1 da construção da prova proposta

Na seqüência, poder-se-ia traçar a reta *r* paralela ao lado *AB* do triângulo, marcar os pontos auxiliares e fazer a medição do ângulo *a'*. Ao movimentar o ponto B, fica claro o movimento da reta *r* e a relação entre ela e o lado *AB* e do ângulo *a* com o ângulo *a'*.

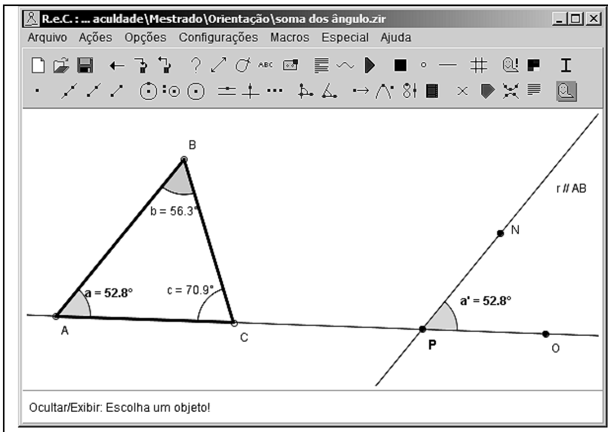


Figura 4.30 – Tela do CaR com exemplo da etapa 2 da construção da prova proposta

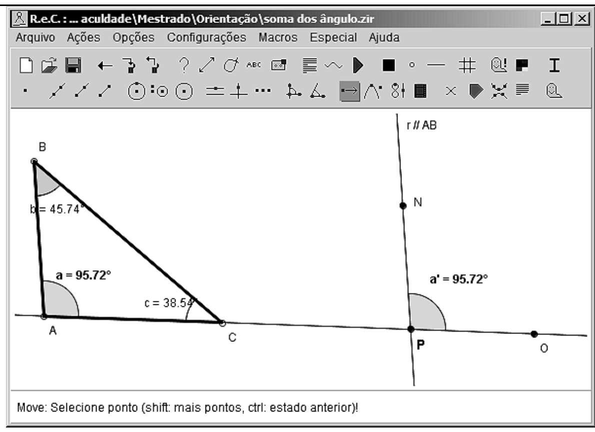


Figura 4.31 – Tela do CaR com exemplo da etapa 2 da construção da prova proposta

Acreditamos que seja esta possibilidade de ter movimento e interação com a construção para tentar facilitar o entendimento de teoremas que Gravina (2002) chama de "teoremas dinâmicos", pois segundo ela,

> O dinamismo das figuras geométricas traz um novo tratamento para os enunciados clássicos da geometria: teoremas passam a ser vistos não como propriedades estáticas, mas como casos especiais de uma certa classe de desenhos em movimento. Tal tipo de tratamento coloca em evidência, de modo natural, a plausibilidade do teorema e provoca perguntas de natureza generalizadora. (p. 7)

No GRUCOGEO, este momento de explicação e exemplificação no quadro-negro e posteriormente da construção no computador, permitiu aos participantes a possibilidade de perceber novas ligações entre conteúdo, tecnologia e conceito.

> ***Adair:*** [dirigindo-se aos graduandos] *Os alunos vão medir e ver que vai dar a mesma coisa* [referindo-se aos ângulos congruentes na construção] *Por que os ângulos vão ser congruentes?*
>
> ***Regina:*** *Por que vai dar sempre 180°? É essa sua pergunta?*
>
> ***Adair:*** *Não. Por que, quando eu faço aquela paralela, o ângulo vai ter a mesma medida do ângulo do triângulo?*
>
> ***Simone:*** *Por que são paralelas?*
>
> ***Adair:*** *Sim. E o que tem que ser paralelos?*[...] *Sim, mas qual a propriedade que eu estou usando?*
>
> [Silêncio]
>
> ***Adair:*** *Faz um "deseinho" ai.* [...] *Se vocês forem visuais como eu, precisam de desenho.* [...]
>
> [O graduando Henrique faz uma pergunta para Regina]
>
> ***Regina:*** *Acho que é isso que ela está falando.* [Respondendo a ele] *O conceito?* [Pergunta para Adair]
>
> ***Adair:*** *O conceito! O que me garante que estes dois ângulos têm a mesma medida?* [Ela vai ao quadro] *O que eu quero saber é a propriedade que me garante que este ângulo aqui tem a mesma medida que este.* [Indicando no desenho feito no quadro-negro]. *Que propriedade é esta?*
>
> [Silêncio]
>
> [...]
>
> ***Adair:*** *Que tipo de ângulo eu tenho ali? Vai Henrique...* [Transcrição da vídeo-gravação]

Podemos observar no diálogo acima como esses momentos podem transformar-se em retomada de conceitos estudados.

4.3.2.3 Antecipando-se ao problema

O professor Paulo lembrou-nos de um problema comum com os programas de Geometria Dinâmica: a questão de arredondamento, que neste caso, seria com relação aos valores dos ângulos. A tarefa proposta seria muito propensa a este problema.

> ***Paulo:*** [...] *Eu estava pensando enquanto estava escrevendo aqui, não vi a questão de arredondamento...*
>
> ***Jorge:*** *Eu acho que se você colocar* [a medida dos ângulos] *com uma casa decimal, você elimina isso aí. Por que eles* [os alunos] *não vão conseguir manipular com tanta precisão pra mais de uma casa decimal.*
>
> ***Adair:*** *Mesmo assim, põe uma casa decimal?*[...] *E se colocar só número inteiro?*

Jorge: *Se colocar só número inteiro vai dar problema.*

Regina: *Não vai dar 180.* [Transcrição da vídeogravação]

Em tais situações, a soma dos valores dos ângulos internos do triângulo pode alternar entre 179°, 180° e 181°. Este tipo de problema não é específico de um ou outro programa de Geometria Dinâmica. Para exemplificar isso, apresentamos a seguir uma seqüência de capturas de telas de quatro programas de Geometria Dinâmica: Cabri Géomètre, o CaR, o Geogebra e o Geometer's Sketchpad.

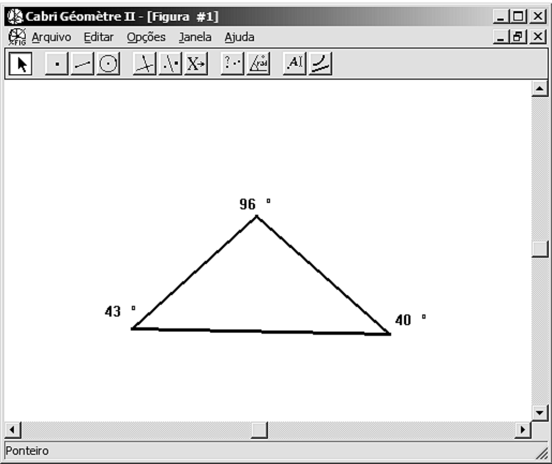


Figura 4.32 – Tela do Cabri mostrando os valores dos ângulos internos que totalizam 179°

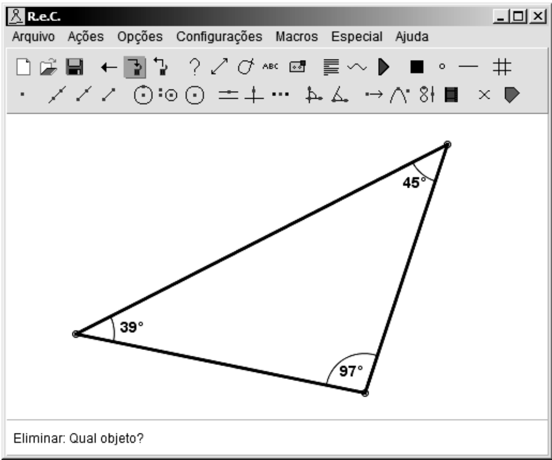


Figura 4.33 - Tela do CaR mostrando os valores dos ângulos internos que totalizam 181°

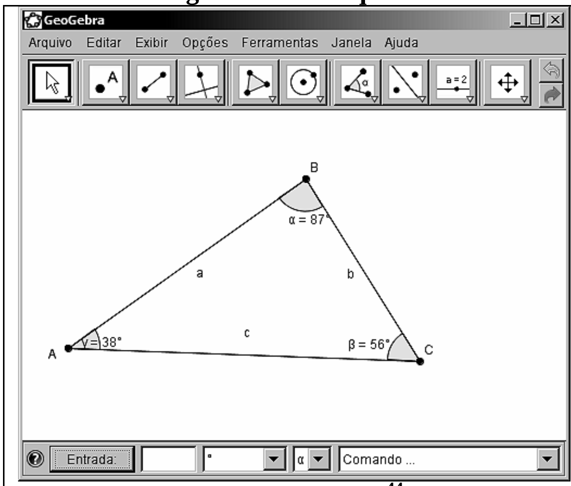


Figura 4.34 – Tela do Geogebra[44] mostrando os valores dos ângulos internos que totalizam 181°

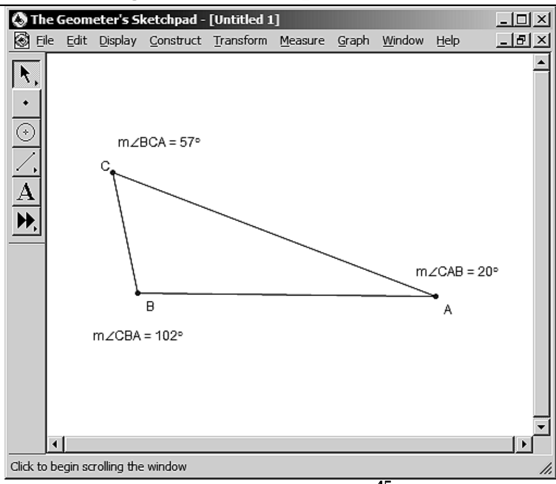


Figura 4.35 - Tela do Sketchpad[45] mostrando os valores dos ângulos internos que totalizam 179°

Conforme Borba e Penteado (2005), alguns problemas relacionados à operação dos programas ou ainda problemas da construção e desenvolvimento dos mesmos, poderão ser enfrentados pelos professores que saem da zona de conforto para a zona de risco. Esses autores ainda afirmam que

[44] Geogebra é um outro programa de Geometria Dinâmica, gratuito, e que pode ser encontrado no site http://www.geogebra.org/cms/

[45] O Geometer's Sketchpad é outro programa de Geometria Dinâmico, desenvolvido e comercializado pela Key Curriculum Press. O site do programa é http://www.dynamicgeometry.com/ .

> Quando tudo vai bem com a parte técnica e o professor consegue desenvolver sua aula, surgem as perguntas imprevisíveis. Por mais que o professor seja experiente é sempre possível que uma nova combinação de apertar de teclas e comandos leve a uma situação nova que, por vezes, requer um tempo mais longo de análise e compreensão. Muitas dessas situações necessitam de exploração cuidadosa ou até mesmo de discussão com outras pessoas. Isso, porque, diferentemente do que muita gente pensa, o computador nem sempre nos responde de forma explícita. [...] Nem sempre é possível conhecer de antemão as possíveis respostas que aparecem na tela. É preciso entender as relações que estão sendo estabelecidas pelo software. Numa sala de aula, isso constitui um ambiente de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor. (BORBA, PENTEADO, 2005, p. 57-58)

Podemos observar que no GRUCOGEO encontramos essas "outras pessoas" para compartilhar e discutir não só as questões tecnológicas, mas também as didáticas, pedagógicas, as de geometria e de matemática, sejam elas de formadores, professores, ou futuros professores.

4.3.3 A execução das oficinas

4.3.3.1 Oficina do professor Paulo

O professor Paulo realizou sua oficina no dia 27 de setembro de 2006. Estavam presentes as formadoras Adair e Regina, a pós-graduanda Viviane, as graduandas Kelly e Valéria, e onze alunos da 6ª série[46].

A coordenação da oficina foi assumida pelo professor Paulo, enquanto a formadora Regina, usando *notebook* e *datashow*, executava as construções juntos com os alunos podendo, assim, tirar alguma dúvida quanto à operação do programa. Os demais participantes acompanhavam as construções, as análises e as conjecturas levantadas pelos alunos.

Graças à disposição em "L" dos computadores, conforme representado na figura 4.36, e a distância satisfatória entre os móveis, foi possível o deslocamento fácil do professor e dos outros participantes do GRUCOGEO para ajudar os alunos em suas dúvidas.

A organização em duplas foi espontânea. Os alunos ocuparam os seis computadores trabalhando em cinco duplas (computadores 1, 2, 3, 4 e 6) e um individualmente (computador 5).

[46] Nos diálogos transcritos da vídeo-gravação usaremos o termo **alunos,** quando a fala for geral; **aluno** quando não foi possível identificar o aluno que falou, e **aluno <número>**, por exemplo a**luno 1** ou **aluna 2**, para nos referirmos a um aluno específico.

A oficina foi filmada mantendo-se a filmadora fixa sobre o tripé, porém de acordo com a necessidade ela era girada proporcionando uma melhor visualização da cena.

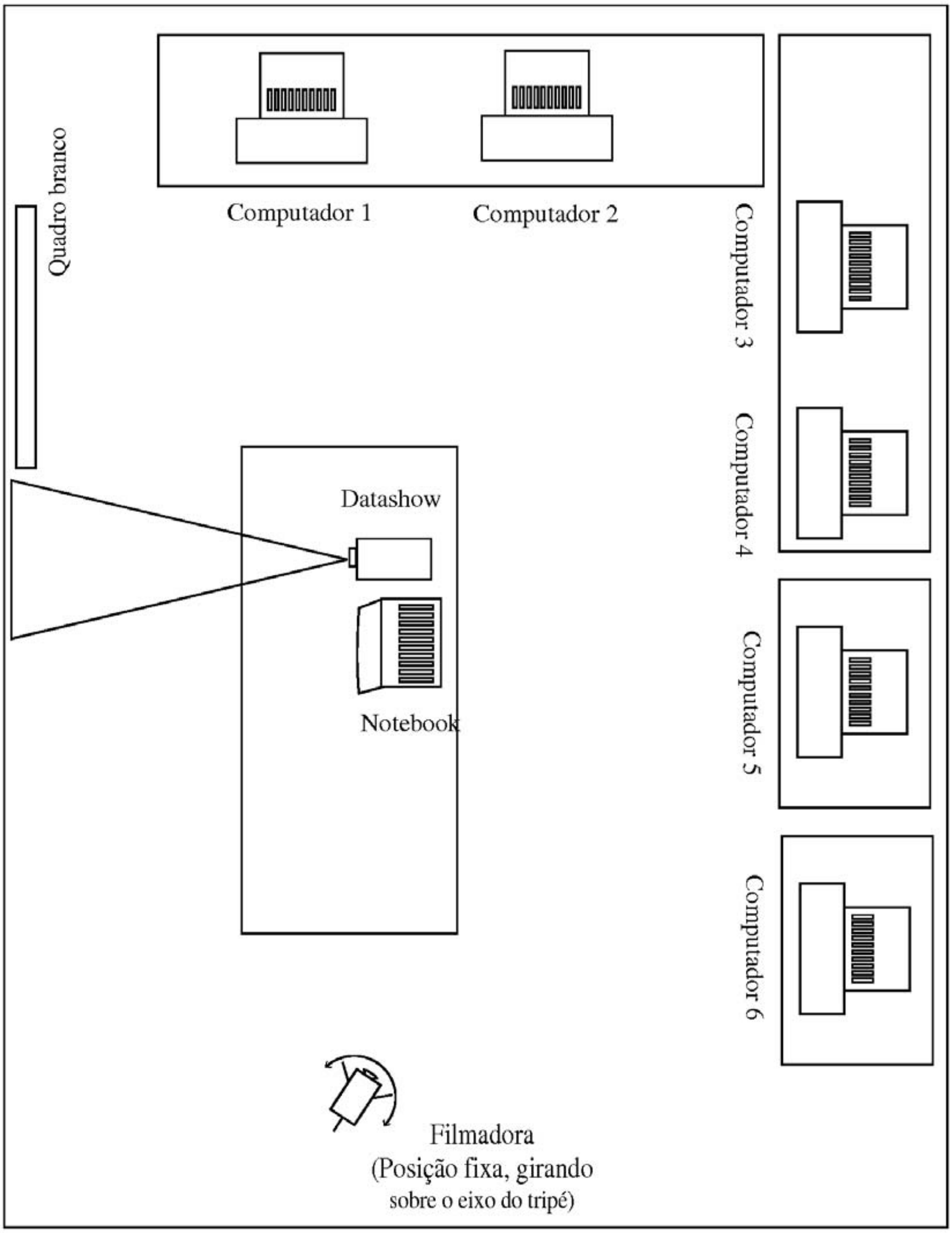


Figura 4.36: Representação do laboratório de informática do GRUCOGEO durante a execução da oficina do professora Paulo.

Desde o inicio, o professor Paulo assumiu a postura de buscar nos alunos a informação necessária para o prosseguimento das suas propostas, muitas vezes tentando (re)significar conceitos

> ***Professor Paulo:*** [...] *O que nós fizemos no Cabri? Vocês se lembram?*
>
> ***Alunos:*** *Lembramos: mexemos com os pauzinhos.*
>
> ***Professor Paulo:*** *Mexeram com os pauzinhos, mas no computador tinha pauzinho?*
>
> ***Alunos:*** *Não... É com as retas...*
>
> ***Professor Paulo:*** *Tinham retas, mas será que eram retas?*
>
> [...]
>
> ***Alunos:*** *Tinham... segmentos de retas...*
>
> ***Aluno:*** *Tanto faz...*
>
> ***Professor Paulo:*** *Mas será que tanto faz mesmo?*
>
> ***Alunos:*** *Não.*
>
> ***Professor Paulo:*** *Qual a diferença de reta e segmento de reta?*
>
> [Vários alunos falam ao mesmo tempo, mas aparecem fragmentos dos conceitos de reta e segmento de reta e que o professor Paulo sintetiza]
>
> ***Professor Paulo:*** *Segmento de reta é o que?*
>
> ***Alunos:*** *Finito...*
>
> ***Professor Paulo:*** *Finito... Tem começo e tem fim. E a reta, qual a diferença?*
>
> ***Alunos:*** *Não tem começo e não tem fim.* [Transcrição da vídeogravação]

Ponte *et al* (2007) destaca que a comunicação tem um "papel essencial para assistir os alunos no desenvolvimento dos seus significados matemáticos e na sua compreensão dos conceitos" (p. 46). Esta visão do papel da comunicação e do seu efeito sobre a aprendizagem do aluno, no ensino da Matemática, influenciando na forma como este constrói e dá significado ao seu conhecimento, está diretamente relacionado à concepção de matemática que o professor possui.

> O discurso do professor constitui, nesta perspectiva [de entender a comunicação como um processo de interação social], uma prática social em que ele recorre ao sistema lingüístico como meio de comunicação com objectivos de natureza cognitiva e social. A colocação de questões é uma das formas principais que o professor tem de dirigir o discurso na sala de aula, mantendo um forte controlo sobre todo o processo de comunicação. As questões que o professor formula, desde as mais dirigidas às de carácter mais aberto, decorrem do seu conhecimento matemático, didáctico e curricular, do modo como encara a natureza da Matemática e o seu papel e o do aluno no processo de comunicação (PONTE *et al*, 2007, p.44).

Se ele concebe a Matemática como algo pronto, não faz sentido negociar o significado de seus conceitos, pois é muito mais "rentável" passar seu conhecimento para o aluno, porém se ele acredita que a Matemática é uma construção social e pode ter seu significado também construído, vale à pena investir no aluno e na construção deste conhecimento.

> ***Professor Paulo:*** [...] *Com quaisquer três pontos eu consigo formar um triângulo?*

Alunos: *Não ?!?!* [Um "não" sem muita convicção].

[Aluno]: *Não necessariamente..*

Professor Paulo: *Por que "não necessariamente"? O triângulo não tem três pontas?*

Alunos: *Não... Depende de como eles estão.*

Professor Paulo: *Ah! Depende de como eles estão... De que jeito eles deveriam estar para não ter um triângulo?*

Alunos: *Assim...* [duas alunas mostram com a mão] *Reto... Na vertical...*

Professor Paulo: *Reto?!?! Você quer mostrar ali no quadro?* [...] *Mostra um jeito, com os três pontos, que não daria pra formar o triângulo.*

[A aluna vai ao quadro e faz um desenho de três pontos colineares]

[...]

Professor Paulo: *Aqueles três pontos não dão pra formar o triângulo?*

Alunos: *Não.*

Professor Paulo: *Não! Não dá porque eles estão em linha reta. Alguém sabe o nome destes três pontos quando estão em linha reta?Tem um nome. Acho que a gente nunca falou. Alguém saberia dizer?Eles estão numa mesma reta, ou numa mesma linha...*

Formadora Regina: *Inventa um nome.*

Professor Paulo: *Que nome a gente poderia dizer, pra não dizer que estão numa mesma reta?*

Alunos: *Na mesma seqüência?!?! Na mesma direção...* [...].

Alunos: *Coseguidos.*

Professor Paulo: *Coseguidos. Boa palavra... Vamos melhor esta palavra "coseguidos"?*

Aluna: *E como a gente faz pra melhor ela? Explica.*

Professor Paulo: *Coseguidos... Lembra de uma coisa que a gente falou esta semana, quando as retas estão no mesmo plano elas são o quê?*

[Alguns momentos de silêncio onde os alunos tentam recordar]

Aluna: *Coplanares.*

Professor Paulo: *Isto! Então coseguidos, eu sei que não tem nada a ver, ou até tenha a ver, mas a palavrinha "co" de coplanar, coseguido tem alguma coisa ai, pra gente dar um nome pra estes três pontos.*

Aluna: *Eles estão no mesmo plano..*

Professor Paulo: *No mesmo plano e na mesma linha ou na mesma reta... "Co" o quê? Coseguidos foi legal...*

[silêncio]

Professor Paulo: *Estão na mesma linha, não é?[...] Se pegar um barbante e der três nós nele. Uma linha. Pegar uma linha e dar três nós nela. Aqueles nós podem representar pra gente os três pontos?*

Alunos: *Sim.*

Professor Paulo: *Aqueles três pontos não estão também numa mesma linha?*

> ***Alunos:*** *Sim.*
>
> ***Professor Paulo:*** *Então eles são três pontos o quê? "Co" o quê?*
>
> ***Aluna:*** *Co-uma-reta.*
>
> ***Professor Paulo:*** *Co-uma-reta, mas é uma linha!*
>
> ***Aluna:*** *Co-uma-linha.*
>
> [...]
>
> ***Professor Paulo:*** *Co-uma-linha, colinha!*
>
> [Professor escreve no quadro enquanto os alunos acompanham]
>
> ***Professor Paulo:*** *Vamos brincar de forca: colin...*
>
> ***Aluno* [seguido pelos outros]*:*** *Colinear... Colinear...*
>
> ***Professor Paulo:*** *Muito bem... Estão este três pontos que a colega de você exemplificou aqui pra gente, são três pontos que estão numa mesma reta, estão numa mesma linha ou alinhados, são pontos colineares. Certo? Com três pontos colineares não dá pra fazer um triângulo.* [Transcrição da vídeogravação]

Este diálogo se desenrolou por aproximadamente quatro minutos e meio, numa valorização do processo da fala e do conhecimento do aluno, além da participação destes na (re)significação do conteúdo.

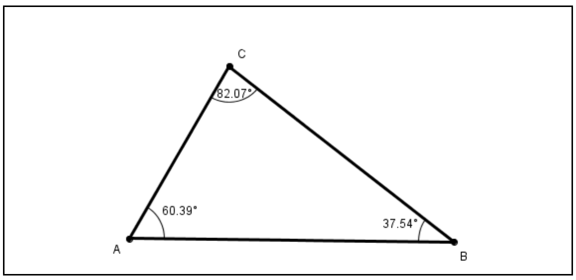
Na reunião de discussão das oficinas com o grupo, o professor Paulo disse que se sentiu bastante incomodado com este tempo. Entretanto, ao final da discussão com o grupo reconheceu a importância que o "nome" de alguns termos tem na Matemática, pois eles vêm carregados de significados e conceitos e, muitas vezes, a escola pouco valoriza os aspectos conceituais presentes nesta linguagem. Embora o diálogo tenha sido longo, permitiu que o professor Paulo pensasse sobre formas de atribuir um sentido aos pontos colineares como nós em um barbante. Quantas vezes, no trabalho do professor, esse tipo de imagem ou mesmo simulação não possibilitam a alunos e professores atribuírem significados ao conceito matemático?

Após a fase inicial da tarefa onde foram feitas a construção do triângulo, a medição dos ângulos internos e a soma destes valores, passou-se para a etapa de discussão dos resultados. A constatação de que a soma dos valores desses ângulos sempre é 180º causou um pouco de agitação, pois todos queriam confirmar seu resultado com o outro.

Mesmo sem serem provocados por uma pergunta, uma das duplas começa a criar uma conjectura, dando início ao processo de provar. Consideramos este momento significativo para o processo de prova num contexto de educação matemática, pois ele extrapolou naturalmente a exploração da construção. A necessidade de provar, que nem foi identificada por este nome, veio na necessidade de explicar o "por que sempre dá certo", aproximando-se do papel de explicação pela prova, na classificação feita por De Villiers (2001).

No processo de tentar convencer os outros, os alunos usam todos os recursos ao seu alcance: gesto, a indicação na tela do computador, a linguagem natural etc.

> ***Professor Paulo:*** *Olha, gente...* [chamando a atenção para sua fala]. *A aluna 9 tem uma idéia aqui, sobre o ângulo. Fala ...*
>
> ***Aluna 9:*** [depois do professor insistir e com o apelo dos outros alunos, ela fala meio envergonhada] *Uma volta completa* [mostrando na tela do computador] *tem trezentos e sessenta e aqui tem a metade, cento e oitenta.*
>
> ***Professor Paulo:*** *O quê que tem a metade?Fala ai... Onde tem a metade?*
>
> ***Aluna 1:*** *Os três ângulos juntos tem a metade de uma volta.*
>
> ***Professor Paulo e a formadora Regina*** [quase em uníssono]***:*** *Por quê?*
>
> ***Aluna 1:*** *Por que você pega um ângulo, com o ângulo e com o ângulo e vai dar meia volta* [Explicando com o movimento das mãos].
>
> ***Formadora Regina:*** *Ah... Então agora vocês vão pegar o ângulo, com o ângulo e o ângulo. Agora eu quero ver.* [risos]
>
> ***Professor Paulo:*** *Então faz isto.*
>
> ***Alunas 1 e 2:*** *Como?*
>
> ***Formadora Regina:*** *Como será que a gente pode? Vocês sabem que tem reta, semi-reta, tem ângulo... Como será que a gente faz?*
>
> ***Professor Paulo:*** *Como eu faço estes três ângulos virar meia volta?*
>
> [conversa entre os alunos que estão mais próximo]
>
> ***Aluno 8:*** *É só juntar tudo que vai dar trezentos e sessenta.* [mostrando com a mão].
>
> ***Professor Paulo:*** *Mas não é meia?*
>
> ***Formadora Regina:*** *Deixa-me dar uma ajuda pra vocês. Olhem aqui* [mostrando a projeção da sua construção]. *Aqui eu já tenho um dos meus ângulos, vocês falaram que tem que colocar os três juntos. Como eu faço para colocar esse ângulo aqui e esse outro aqui pra fazer meia volta?*
>
> ***Alunas 2:*** *Eis a questão!*
>
> ***Formadora Regina:*** *Primeira coisa que eu tenho que fazer para ter a meia volta.*[Silêncio]. *Vamos aumentar este segmento aqui* [figura 4.37] , *vamos transformar numa reta?*[...] *Já consegui fazer a reta* [figura 4.38]. *Como eu vou conseguir passar estes ângulos daqui para cá? Alguém tem uma idéia?* [Transcrição da vídeo-gravação]



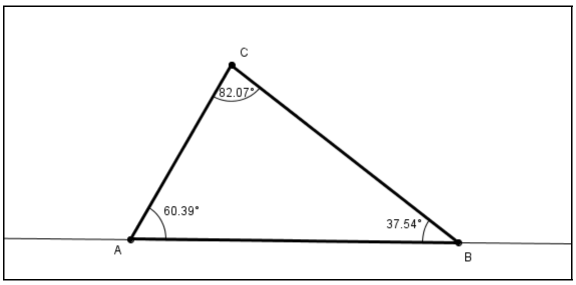


Figura 4.37 **Figura 4.38**

A oficina continua com um período de conversa entre os alunos, experiências na construção e conversas individuais com o professor, que mantém sua estratégia de devolver as perguntas com outras que auxiliam a estruturação do raciocínio dos alunos, porém sem respondê-las diretamente.

Destacam-se nestes momentos os recursos utilizados pelos alunos para comunicar a idéia matemática: “a linguagem oral (complementada pela linguagem corporal) serve de suporte ao pensamento” (PONTE et al, 2007, p.45).

Vários alunos têm a idéia de colocar a reta paralela à *AB* passando pelo vértice *C*, conforme ilustrado na figura 4.37, mas têm dificuldade em justificar matematicamente a razão de sua idéia. Com o auxílio dos professores e dos alunos da graduação eles conseguem perceber a necessidade de se garantir o paralelismo entre as retas, para assim obter a congruência dos ângulos.

No prosseguimento da oficina, o Professor Paulo fez um fechamento do assunto da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo e propõe o estudo do ângulo externo.

> ***Professor Paulo:*** *A gente já sabe que a soma dos três ângulos internos do triângulo dá cento e oitenta. Só que agora, quando a gente traçou esta reta passando por um dos lados, a gente determinou ai um ângulo que chamamos de ângulo externo, porque é um ângulo não está dentro do triângulo. Observem aqui na tela da Formadora Regina, que ela está mostrando pra gente onde é este ângulo externo. Quanto vocês imaginam, que mede este ângulo externo?*
>
> ***Alunos:*** *Mede cento e oitenta graus?*
>
> ***Professor Paulo:*** *Este ângulo externo mede cento e oitenta graus? O que vocês acham?* [Um aluno discorda, mas fala bem baixo]. *Você acha que não Aluno 3? Por que você acha que não?*
>
> [A aluna 2 aproveita e discorda também]
>
> ***Aluna 2:*** *Porque é menos de cento e oitenta.* [Fazendo vários gestos com a mão]
>
> ***Professor Paulo:*** *Por que você acha que é menos de cento e oitenta?*
>
> ***Aluna 3:*** *Porque já tem o quarenta e sete.* [Fazendo referência ao valor do ângulo interno].
>
> ***Professor Paulo:*** *Quantos vocês imaginam que vai ser?*
>
> ***Alunos:*** [Vários alunos fazem a conta mentalmente falando os resultados em voz alta] *Cento e trinta e três.*
>
> ***Professor Paulo:*** *Será que dá mesmo? O que estes ângulos são? Vocês se lembram?*
>
> ***Aluna 2:*** *OPV* [Oposto pelo vértice]*!*
>
> ***Professor Paulo:*** *OPV? Será?*

> ***Aluna 1:*** *Não.*
>
> ***Aluna 2:*** *Ah, não. Disfarça...* [Silêncio] *São suplementares, suplementos.*
>
> ***Professor Paulo:*** *O que é suplementar?*
>
> ***Alunos:*** *Somando os dois dá cento e oitenta.*
>
> ***Professor Paulo:*** *Então vamos medir e ver se dá isto que vocês disseram. Vocês podem fazer isto no de vocês.*
>
> [Os alunos trabalham na construção fazendo as medidas e confirmando os valores]
>
> ***Regina:*** *Todos conseguiram? Então o Professor Paulo tem uma pergunta pra fazer.*
>
> ***Professor Paulo:*** *O que esta medida que vocês encontraram, a medida do ângulo externo,* [...] *tem a ver com a medida dos três ângulos internos do triângulo?*
>
> ***Aluna 2:*** *É a soma do cinqüenta e cinco com setenta e oito* [Fazendo referencia à construção da Formadora Regina]. *É a soma dos outros dois* [...] *Somando tudo vai dar cento e oitenta.*
>
> ***Regina:*** *Mas isto sempre dá certo? No seu também?*
>
> ***Professor Paulo:*** *Se você mexer no triângulo, será que vai acontecer a mesma coisa?*
>
> ***Alunas 1 e 2:*** *Sim.Oh!*
>
> ***Aluno 8:*** *Sim, vai mudar as medidas dos ângulos.*
>
> ***Professor Paulo:*** *Mas a relação permanece?*
>
> ***Alunos:*** *Sim. Sempre.*
>
> ***Regina:*** *Isto tem um nome sabia? Chama teorema do ângulo externo. Que este aqui são estes dois somados* [mostrando o ângulo com o ponteiro do mouse]. [...] *Agora eu quero saber outra coisa. Vocês vão achar os três ângulos externos. Quero saber: quanto vai dar a soma dos três ângulos externos?* [Transcrição da vídeogravação]

Os alunos retomaram o trabalho com o programa CaR e a construção do triângulo para acharem o que tinha sido solicitado. Por várias vezes, recorreram ao professor Paulo ou às outras pessoas do GRUCOGEO para auxiliá-los na construção e no entendimento do que estavam fazendo, mas todos os alunos conseguiram achar o valor esperado.

4.3.3.2 Oficina da professora Olga

A oficina da professora Olga foi realizada no dia 02 de outubro de 2006. Estavam presentes o professor Paulo, a formadora Regina, o pós-graduando/pesquisador Jorge, as graduandas Kelly e Valéria e treze alunos da 6ª série.

A professora Olga assumiu a coordenação da oficina. Novamente, as orientações e informações sobre a construção foram passadas por meio do *notebook* e *datashow*, operados ora por mim, ora pela formadora Regina.

Os alunos, assim como na oficina do professor Paulo, se organizaram espontaneamente, ocupando os seis computadores, trabalhando em cinco duplas (computadores 1, 2, 4, 5 e 6) e um trio (computador 3).

A disposição física do laboratório continuou praticamente a mesma da oficina anterior, sendo que a única mudança foi em relação à posição da filmadora o que prejudicou bastante o acompanhamento das ações desenvolvidas pelos grupos de alunos, pois ela ficou focada somente na dupla do computador 1, filmando os alunos de costas, conforme representado na figura 4.39.

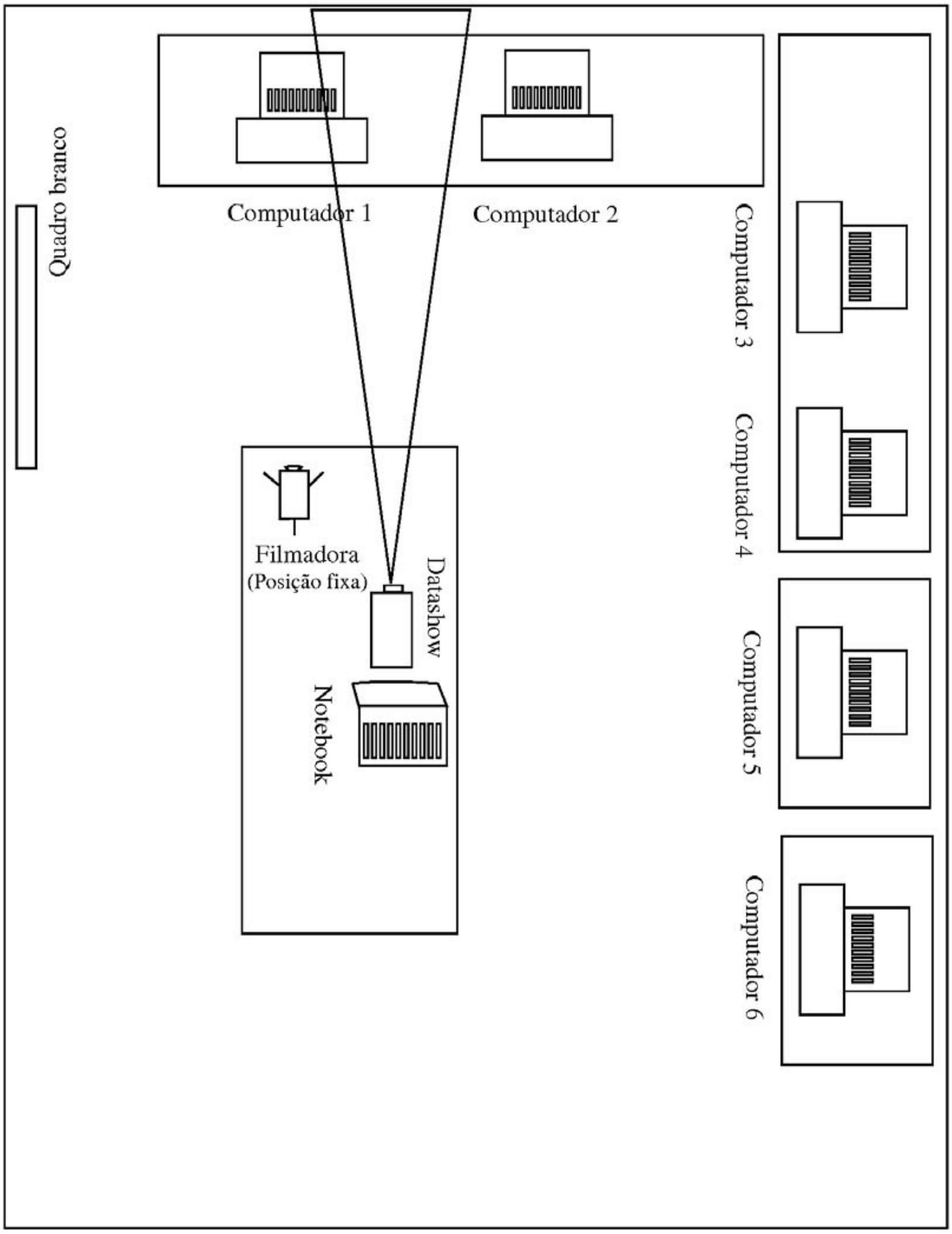


Figura 4.39: Representação do laboratório de informática do GRUCOGEO durante

a execução da oficina da professora Olga.

A professora Olga iniciou a oficina lendo um roteiro para a construção do triângulo

> ***Professora Olga:*** *Vocês vão construir um triângulo ABC. Então o que vocês vão fazer: selecione a ferramenta Ponto, que é exatamente o que está na primeira do lado esquerdo* [referindo-se aos botões da barra de ferramenta do CaR]. *Esta ferramenta tem que estar azul.* [...]
>
> *Se é triângulo, quantos pontos vamos precisar?*
>
> ***Alunos:*** *Três.*
>
> ***Professora Olga:*** *Então faça, colocando na tela três pontos. Esses três pontos quaisquer.* [...] *Três pontos não alinhados. O que é "não alinhado"?*
>
> ***Aluno:*** *De qualquer jeito.*
>
> ***Professora Olga:*** *Quaisquer, mas não pode estar alinhado.* [...] *Então agora o que vocês vão fazer?* [...] *Vocês vão levar* [o ponteiro do mouse] *até o ponto, porque agora nós vamos nomear os pontos, mouse tecla direita, clique no ponto, observe o que a professora Regina vai fazer* [indicando a projeção da construção]
>
> ***Regina:*** *Olha: vai até o ponto, no ponto clica com o botão direito. Tem que ficar colorido no ponto.* [Transcrição da vídeo-gravação]

Essas orientações se seguiram até que os alunos conseguissem construir o triângulo e exibissem os valores dos ângulos internos do triângulo. Em seguida, a professora Olga provoca-os com perguntas para que se lembrem do assunto estudado e reflitam sobre a linguagem usada para se expressarem.

> ***Professora Olga:*** *Como chamam estes ângulos que vocês acabaram de traçar?*
>
> ***Aluno:*** *Ângulos internos.*
>
> ***Professora Olga:*** *Muito bem! O que vocês lembram dos ângulos internos? Que coisas interessantes vocês podem falar dos ângulos internos? Ângulos internos de um triângulo?*
>
> [Silêncio]
>
> ***Aluna 8:*** *Todas as* **medidas** *tem que dar trezentos e sessenta graus?*
>
> ***Professora Olga:*** *Todas as* **medidas***?*
>
> ***Regina:*** *A minha* **medida** *aqui deu cento e oito graus, não deu trezentos e sessenta graus.* [Mostrando um dos ângulos da construção exibida na projeção]
>
> ***Aluna:*** *180°?*
>
> ***Professora Olga e Regina:*** *O que é cento e oitenta graus?*
>
> ***Alunos:*** *A somas de todos os ângulos.*
>
> ***Professora Olga:*** *Ah... Muito bem. A soma de todos os ângulos internos do triângulo tem que dar 180°. Então vejam se isto é verdade.*

> ***Regina:*** *Calcule aí. Vocês têm uma calculadora do computador. Use a calculadora do computador para ver se dá cento e oitenta graus.* [Transcrição da vídeogravação]

No diálogo acima, percebe-se certa confusão da aluna ao se expressar: num momento com relação ao valor da soma das medidas dos ângulos internos e em outro, confundindo o valor da soma com o valor da medida dos ângulos. Ao chamar a atenção para estes fatos, tanto a professora Olga quanto a formadora Regina permitem um reformulação da maneira dela se expressar, provavelmente, reforçando o assunto abordado e re-significando os conceitos associados a ele.

Como resposta à sugestão dada pela professora Olga e pela formadora Regina, todos os grupos fizeram a confirmação da soma dos valores dos ângulos com os cálculos e verificaram se os valores se repetiam também nos outros grupos. Apesar da professora Olga ter trabalhado este conteúdo anteriormente, observou-se que os alunos ainda se surpreenderam com o resultado.

4.3.4 A discussão sobre oficinas

A reunião do dia 23 de outubro de 2006 foi dedicada às reflexões sobre as oficinas. Conforme Perez, Costa e Viel (2002) afirmam a "reflexão é vista como um processo em que o professor analisa sua prática, compila dados, descreve situações, elabora teorias, implementa e avalia projetos e partilha suas idéias com colegas e alunos, estimulando discussões em grupo" (p.54), portanto um possível momento para a construção de conhecimento baseado num entrelaçar de objetivos (professores e pesquisadores), de olhares, de práticas e teorias,

Inicialmente foi assistido no grupo a vídeo-gravação da oficina do professor Paulo e em seguida a da professora Olga, em ambas, avançando-se a exibição em vários momentos. À medida que foram sendo vistas as cenas da gravação avivaram-se as lembranças dos acontecimentos: os sentimentos, as intervenções e as observações pessoais.

Este momento permitiu uma múltipla visão: a de quem assistia a gravação, mas não participou dela; a do professor que mediava a oficina; e a dos que auxiliaram na oficina, além de trazer os olhares das formadoras, de outros professores e dos alunos da graduação, futuros professores.

Dentre os vários comentários, fizemos um recorte de três momentos nessas discussões: a *práxis* dos professores, a (re)significação de conceitos geométricos envolvidos na atividade e as dificuldades técnicas, dividida com a operação do programa de Geometria Dinâmica e com a filmagem da oficina da professora Olga.

Conforme registramos anteriormente, a postura dos professores na condução dos trabalhos utilizando as **questões de intervenção** permitiu-nos perceber suas concepções sobre ensino e aprendizagem, comunicação e Matemática. Cada professor, com seu estilo próprio, tentou envolver os alunos na atividade, buscando por meio de perguntas, mobilizar conhecimentos matemáticos, análise e reflexão.

Uma das conseqüências desta metodologia de trabalho é a necessidade de maior tempo, uma vez que ela está diretamente ligada ao tempo do aluno. Muitas vezes, a rotina da sala de aula e a obrigatoriedade do cumprimento do currículo podem gerar pressão sobre o professor, limitando esta forma de atuação.

Quando discutíamos este tópico no GRUCOGEO, o professor Paulo expressou sua preocupação e questionou se não teria se estendido muito na tentativa de dar um sentido ao termo “pontos colineares”. Acreditamos que a questão de balancear o “tempo gasto” com “o tempo disponível para...” é comum aos trabalhos com questões abertas como, por exemplo, em atividades investigativas e as estratégias para dar significado às informações a partir do aluno. Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), o tempo

> é o vilão de todo professor que prepara uma tarefa [de investigação matemática] e determina um tempo limitado para seu desenvolvimento em classe. Vimos que o planejamento é importante, todavia, interromper ou apressar a produção dos alunos pode representar um retrocesso e uma ameaça a uma efetiva inclusão das investigações matemáticas no currículo escolar. (p.21)

Por isso, entendemos que aquele foi o tempo necessário para que trabalhassem juntos, alunos e professor na (re)construção ou (re)significação do conceito matemático envolvido. Charlot (2005) afirma que “o que dá pertinência a um conceito é o conjunto das relações que ele mantém com outros conceitos em um espaço teórico” (p.90). Entendemos que foi esta a intenção do professor Paulo ao tecer o diálogo sobre o uso do prefixo “co” também aplicado em coplanares, e que para os alunos era conhecido, ou ainda o sentido que ele assume para nomear os pontos “retos”, como disse a aluna. Além disso, não podemos esquecer que a oficina foi desenvolvida fora do espaço e do tempo escolar regular.

Neste processo de busca de significado para as idéias matemáticas, o professor lança mão de vários recursos para, uma vez entendido o sentido, associá-la ao contexto matemático. Como aponta Ponte et al (2007):

> O entendimento que o professor tem da aprendizagem, da comunicação e da utilização da linguagem própria da Matemática (misto de linguagem corrente e linguagem matemática), através de mensagens orais ou escritas, é indissociável do processo de representar e comunicar idéias matemáticas e do conseqüente processo de apropriação de conceitos matemáticos pelos alunos. Estes necessitam de tempo para trabalharem juntos, para

> confrontarem argumentos e para negociarem a utilização de diferentes estratégias de resolução das tarefas matemáticas (p. 46).

São nesses diálogos que se busca mobilizar, sedimentar ou construir conceitos matemáticos, pelas questões de intervenção e por um processo de co-autoria entre professores e alunos. Aos poucos, os alunos mudam suas respostas tentando buscar o que já foi estudado, como no diálogo do professor Paulo sobre o que os alunos fizeram no Cabri (inicialmente eles "mexeram com pauzinhos", depois com retas que eram a mesma coisa que o segmento de reta e no final da conversa, já tinham diferenciado os dois elementos geométricos) ou no diálogo da professora Olga sobre a relação entre o triângulo e seus ângulos internos (inicialmente a medida do ângulo dava 360°, depois passou a ser 180° e chegou-se à conclusão que a soma dos valores dos ângulos internos era 180°).

Porém, consegue-se ainda observar as falhas conceituais que corroboram com a construção das figuras prototípicas, conforme destacado por um dos auxiliares da oficina: "um dos alunos não gostou muito da sua construção, pois o triângulo tinha ficado torto". Ou seja, um dos lados não estava alinhado horizontalmente (paralelo ao eixo X, se tomarmos como referência o plano cartesiano).

Outro ponto que surgiu na discussão das oficinas foi a dificuldade que vários alunos tiveram na hora de exibir o valor da medida do ângulo. Apesar de ser uma ação simples, dentre as que foram utilizadas na oficina, era ela que mais requeria cuidado.

Com relação à filmagem da oficina, podemos afirmar que a mudança da posição da filmadora prejudicou bastante o acompanhamento das ações desenvolvidas pelo grupo de alunos da professora Olga, pois ela ficou focada somente na dupla do computador 1. O áudio das discussões dos demais participantes foi gravado, mas como o ajuste do nível de gravação é automático, todas as vezes que aparecia um som mais alto próximo da filmadora ela fazia o ajuste e com isto os sons que estavam mais afastados eram praticamente cortados ou misturavam-se com outros ruídos de fundo.

Este problema já apareceu em outras pesquisas e ainda continua como processo de aprendizagem

> ***Adair:*** *Bem, o que eu quero falar é mais por conta do ponto de vista da pesquisa. A filmadora não foi eficiente. Ela não captou o movimento do grupo. Isto pra quem vai trabalhar com tecnologia, eu acho que isto é fundamental. A gente está aprendendo.*

> **Regina:** *Olha Adair, é a terceira pesquisa*[47] *que eu vou me meter a usar filmadora e eu chego à conclusão que com tecnologia é melhor só gravar o som.* [Transcrição da vídeo-gravação]

Vale destacar que na oficina do professor Paulo a vídeogravação atendeu à expectativa para esta pesquisa, e que talvez, por falta de análise daquela gravação antes da oficina da professora Olga, tenhamos cometido o erro da mudança da posição da filmadora.

4.3.5 Aspectos relevantes

Nessa atividade, sentimos uma dificuldade maior de separar nos episódios os aspectos relevantes, pois praticamente todos estão muito inter-relacionados. O fato do trabalho de construção de tarefas e a reflexão sobre as oficinas terem sido um trabalho colaborativo fez com que vários aspectos fossem perpassando os vários episódios.

4.3.2.3 - A potencialidade da atividade como incentivadora de formulação de provas (Como as atividades de investigação incentivaram as provas)

Nessa atividade este aspecto tem dupla visão: a dos participantes do GRUCOGEO e a dos alunos escolares que participaram da oficina.

Durante as reuniões de preparação foram apresentadas ao grupo duas provas. Uma delas, discutida anteriormente, procurou aproximar-se da justificativa feita por meio do recorte do triângulo em três partes e a remontagem dessas partes, unindo os vértices, formando assim um ângulo de 180°.

A outra, apareceu em determinado momento a partir do diálogo que se desenrolou entre os participantes do GRUCOGEO. A formadora Adair questiona se alguém se lembrava da prova tradicional para aquele teorema. Ela mesma explica:

> **Adair:** *Ali* [apontando a construção que estava sendo projetada], *eu que sou muito visual e que sempre induzi muito meus alunos a fazerem também as representações para o visual ajudar, colocaria as retas suportes dos lados daquele triângulo. Você está com uma só. Não é? A partir do momento que você traça as duas retas suporte...*
>
> **Regina:** *Aí você passa pra cima e pra baixo...*
>
> **Adair:** *É. Aí eles vão ver o paralelismo...*
>
> **Regina:** *Mas esta é que é a demonstração...*
>
> **Adair:** *É, só que a reta paralela, na demonstração, você faz no próprio vértice do triângulo.* [Silêncio] *Vocês se lembram de como se faz a demonstração deste teorema?* [Perguntando aos graduandos]

[47] A formadora Regina refere-se à sua própria pesquisa (Grando, 2004), a pesquisa de Rosana Maria Mendes (Mendes, 2006) e da Débora de Oliveira Andrade (Andrade, 2006).

[Silêncio]

Regina: *Nós fizemos na sala de aula...*

Aluna [Não deu pra identificar]*: E ajudou a tirar dez na hora da prova.*

[Risos]

Adair: *Não adianta, não é? O conceito só fica quando a gente começa a dar aula. Não é verdade Olga?* [Transcrição da vídeo-gravação]

A prova tradicional para este teorema é mostrada na figura 4.40, a seguir. Podemos observar que a prova anterior é uma variação desta e que, sendo construída também em um programa de Geometria Dinâmica, possibilita uma visualização intuitiva que pode facilitar a compreensão do conceito.

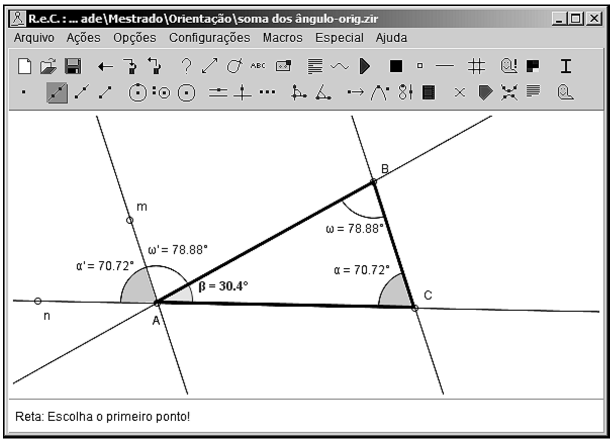


Figura 4.40 – Tela do CaR com prova tradicional da soma dos valores dos ângulos interno do trângulo

Queremos ainda aproveitar a última fala desse diálogo, quando a formadora Adair afirma: "O conceito só fica quando a gente começa a dar aula". Podemos observar que mesmo os alunos da licenciatura de Matemática, participantes do GRUCOGEO, não conseguem "guardar" algumas provas. Pode ser que para eles, quando estudaram este assunto, a prova não fazia sentido. Como afirma Charlot (2000),

> Os alunos para quem o saber tem, ao que parece, "um sentido e um valor como tal", são os que conferem um sentido e um valor ao saber objeto sob sua forma substancializada; o que supõe relações de um tipo particular com o mundo, consigo e com os outros. (p. 64)

Talvez agora, neste contexto diferente daquele de sala de aula (do GRUCOGEO e desta atividade), esta prova faça outro sentido para eles, pois se aproxima mais do seu futuro ambiente de trabalho.

Mudando o foco para os alunos escolares, o que observamos durante o desenvolvimento das oficinas corrobora com o pensamento de que a prova deve ser estimulada não como produto final, mas sim como um meio para mobilizar conhecimentos matemáticos.

Conforme discutimos anteriormente no capítulo sobre as provas, ao sairmos do contexto profissional da matemática para o escolar, esbarramos com alguns problemas que a maioria dos professores já enfrentou: os alunos não sentem a necessidade e nem vêem sentido em provar algo que já sabem ser verdadeiro. Uma das sugestões que apresentamos para isto foi a introdução das atividades exploratório-investigativas onde a prova extrapola a condição de verificadora da verdade e alcança outras funções.

Por isso, acreditamos que se faz necessário, dentro do contexto escolar, entender as provas não mais como um produto, mas sim como um processo que mobiliza todo um conhecimento matemático, atribuindo-lhes, portanto, outras funções além da de verificação

> Se nos preocupa a educação, deveremos pensar em cada momento em como ter em conta a distinção entre a atividade de demonstrar e a demonstração como produto. Temos de refletir a que damos mais importância nas aulas de matemática, qual é o objetivo de se falar em demonstrações nelas. (DE LA TORRE, 2000, p.132) [Tradução feita pelo pesquisador][48]

Durante a execução das oficinas, tivemos oportunidades de observar como a necessidade de "provar" aparece como resultado da "condução" da atividade. Um destes momentos apareceu, conforme registramos anteriormente, de forma natural quando um dos alunos do professor Paulo, constatando que a soma dos valores dos ângulos internos é sempre 180° surpreende-se e questiona "Por que dá certo?".

Essa "condução" que induz ao pensamento, à reflexão e à construção do conhecimento ainda faz aparecer a intuição. Durante a oficina da professora Olga, na seqüência da discussão pela prova, ou melhor, pelo convencimento que a soma dos ângulos internos sempre será 180°, uma aluna apresenta um raciocínio baseado no quadrilátero.

> ***Aluna:*** *Se você riscar um quadrado e traçar uma diagonal nele, vai ter um triângulo,*
>
> ***Professora Olga:*** *Então constrói um quadrilátero.* [Transcrição da vídeo-gravação]

O professor Paulo, que estava acompanhando essa dupla, auxiliou as alunas, pois elas não sabiam usar as ferramentas do programa. Neste procedimento ele foi recapitulando conceitos como perpendicular, paralela, propriedades dos lados e ângulos do retângulo.

Após a construção do quadrilátero elas exibiram o valor dos ângulos de um dos triângulos, fizeram a soma e obtiveram o valor de 180°, por sugestão do professor Paulo elas repetiram a ação com outro triângulo, obtendo o mesmo valor.

[48] "Si nos preocupa la educación, deberemos pensar en cada momento en cómo tener em cuenta la distinción entre la actividad de demostrar y la demostración como producto. Hemos de reflexionar a qué le damos más importancia en las clases de matemáticas, cual es el objetivo de hablar de demostración en ellas."

Com uma construção na tela semelhante à figura 4.41, o professor Paulo sugeriu que elas observassem as semelhanças dos ângulos, no que foi facilmente atendido. Continuando com suas perguntas de intervenção foi conduzindo o processo até aproximar-se da construção desejada, e mais, da compreensão do resultado obtido.

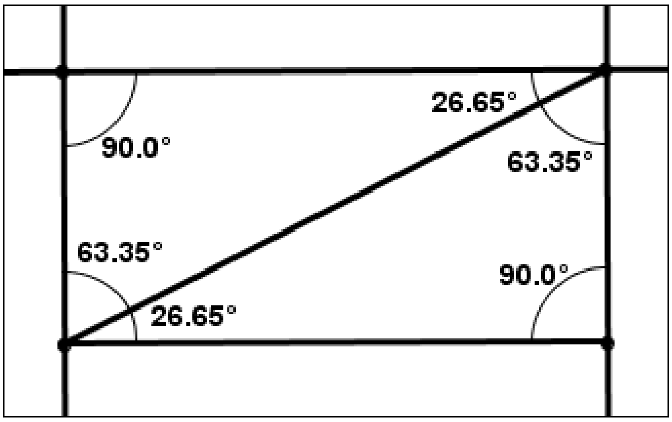


Figura 4.41

4.3.2.4 - Uso de diferentes mídias no contexto da Matemática Escolar (Quais mídias foram mobilizadas na atividade?)

Pela própria proposição da tarefa, a mídia informática foi a mais utilizada.

Com essa tarefa foi possível sentir uma dificuldade que muitos professores têm em usar o laboratório de informática para suas aulas. Muitas escolas, apesar de terem laboratório de informática, têm um cronograma de atividade para ele que não permite alteração no horário, impossibilitando o seu uso em aulas. Além disso, em alguns casos, a quantidade de computadores é pequena para a quantidade de alunos por turma. Para Borba e Penteado (2005), além dos problemas relacionados à área técnica e de operação dos programas,

> temos que enfrentar as limitações das salas ambientes de informática. Se o espaço físico não comporta todos os alunos, temos que dividir a classe, desenvolver a mesma atividade para diferentes turmas. Quanto tempo levará para atender a classe toda? Como é possível re-organizar o planejamento? Isso trará algum prejuízo? Quais os perigos de deixar alguns alunos sozinhos na sala de aula enquanto o professor orienta as atividades na sala de informática, ou vice-versa? Onde colocar os computadores: um em cada sala de aula ou todos agrupados numa única sala? Como as diferentes formas de organização do espaço físico influenciarão na prática pedagógica? São decisões difíceis e cada escola vai encontrar a sua maneira de enfrentar esses riscos relacionados à organização do espaço físico. (p.64-65)

Superada essa dificuldade, acreditamos que a mídia informática propiciou um ambiente de aprendizagem significativo. O recurso de movimentação dos pontos e o imediato *feedback* possibilitou uma (re)significação de conceitos e a expressão de idéias e estratégias.

Durante a preparação da tarefa, nas duas provas apresentadas ao GRUCOGEO (p. 104 e p. 122), o movimento da construção trouxe outro significado à prova.

Um outro momento bem pontual sobre o uso desta mídia, foi quando ela permitiu a comunicação do pensamento do aluno durante a oficina da professora Olga. A formadora Regina, provocando os alunos, pediu que eles a convencessem que a soma dos valores dos ângulos internos do triângulo é sempre 180°. Passado um tempo de reflexão um grupo de alunos inicia uma discussão:

> ***Aluno:*** *Se o triângulo passar de 90° não tem como ele ser...* [ele corrige] *Se o triângulo passar de 180° não tem como ele ser...*
>
> ***Professora Olga:*** *Como passar?*
>
> ***Aluna:*** *Que nem, se passasse isto aqui* [mostra na tela] *mais de 180°, puxando por aqui* [indicando o vértice C da construção], *mas não por aqui, não ia ter como.*
>
> ***Professora Olga:*** *Não ia ter como?*
>
> ***Professor Paulo e formadora Regina:*** *Mexe pra ver.*
>
> [neste momento, os alunos precisaram de orientações para movimentar os pontos]
>
> [...]
>
> ***Professora Olga:*** *Se for 180° o que acontece? Vai ter triângulo?*
>
> ***Aluno:*** *Se tiver 180° não tem* [...] *vai ter um negócio reto...*
>
> ***Professora Olga:*** *Um negócio reto?*
>
> [Há uma negociação na tentativa de nomear os pontos colineares]
>
> [...]
>
> ***Professora Olga:*** *Pelo que o aluno falou o triângulo não pode ter mais que 180°. Por quê?Tem triângulo aí com 180°?*
>
> ***Formadora Regina:*** *Ah... Você me convenceu que com um ângulo de 180° não tem triângulo* [referindo-se à construção do aluno, veja figura 4.42], *mas ainda não me convenceu que a soma é sempre 180°.*[Transcrição da vídeo-gravação]

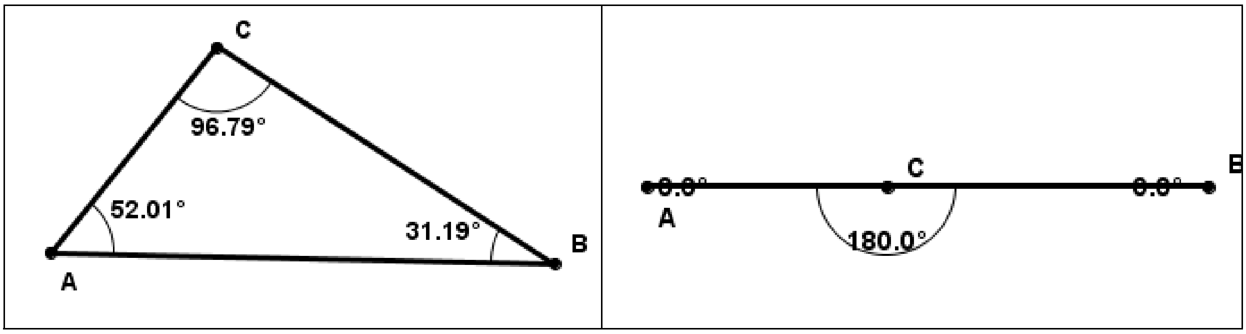


Figura 4.42: Construções feitas pelo aluno

A manipulação dos pontos permitiu que o aluno expressasse sua idéia de que o valor máximo para um ângulo do vértice de um triângulo era 180°, mas nessa condição, não existiria triângulo, pois não estaria sendo atendida a condição de não colinearidade dos pontos.

Acreditamos que este momento é significativo, pois corrobora com o que discutimos no aspecto anterior sobre a necessidade de mudar o olhar sobre a prova no contexto escolar deixando de tê-la como produto e passando a valorizá-la como processo: apesar do aluno não ter conseguido provar naquele momento o que foi solicitado, ele mobilizou seu conhecimento e por meio dessa mídia conseguiu expressar o que pensava. Além disso, os alunos "associam-se" ao programa para expressar sua idéia e dar significado aos conceitos estudados, tornando-se alunos-com-computador-e-programa.

O uso da tecnologia, computador com o programa CaR, também exige uma atenção maior por parte do professor. Na etapa de preparação da atividade, destacamos a questão do arredondamento dos valores dos ângulos alertada pelo professor Paulo. Outro momento que queremos destacar aconteceu durante a execução da oficina da professora Olga. Tivemos um problema na construção de um dos grupos, que levou a uma observação equivocada nos valores dos ângulos. A construção era similar à ilustrada na figura 4.43. Nela, temos que o ângulo *BAC* é congruente ao ângulo *ACD*, o que foi confirmado empiricamente pela medição. O ângulo *ABC* é congruente ao ângulo *BCF,* mas como o ponto *F* não estava sobre a reta que passa pelo vértice *C*, a medida obtida foi diferente.

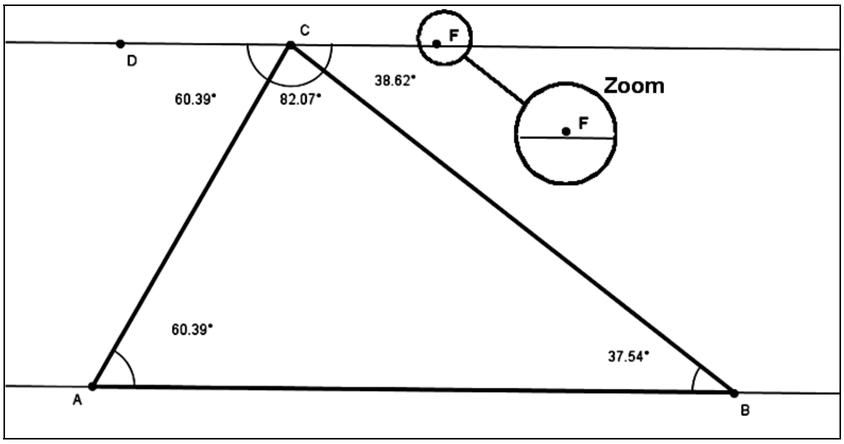


Figura 4.43: Exemplo de erro de medida provocado pelo posicionamento do ponto.

Dependendo da forma como a construção está na tela do computador, podemos ser enganados pelo visual. Neste caso, pela falta do controle da situação, o professor deve estar atento para buscar em seus conhecimentos matemáticos e do programa, uma justificativa para o que está acontecendo e levar os alunos a perceber matematicamente as falhas e erros, através de situação de problematização.

4.3.2.6 - A aproximação com o "fazer matemático"

No capítulo 6 do livro "A experiência da Matemática", Philip J. Davis e Reuben Hersh escrevem um tópico sobre a "Estética comparada" onde apresentam duas demonstrações sobre o teorema de Pitágoras que afirma que $\sqrt{2}$ não é uma fração. A primeira demonstração é aquela tradicional. A segunda "não é tradicional e procede um pouco mais informalmente" (DAVIS, HERSH, 1985, p. 338). Discutindo sobre as demonstrações, os autores dizem o seguinte:

> Não tenho a menor dúvida de que nove entre dez matemáticos profissionais diriam que a Demonstração II exibe um grau mais alto de prazer estético. Por quê? Porque é mais que curta? [...] Porque, comparada com ela, a Demonstração I, com sua ênfase sobre a inexorabilidade lógica, parece pesada e lerda? Acho que a resposta é porque a Demonstração II parece mostrar o núcleo do problema, enquanto que a Demonstração I o esconde, principiando com uma hipótese falsa e terminando com uma contradição. (DAVIS, HERSH, 1985, p. 338)

Pode-se observar que na análise desses autores aparecem argumentos em forma de hipóteses que poderiam levar a apreciações sobre as duas demonstrações. Acreditamos que elas também seriam suficientes para mobilizar alguns matemáticos para criarem novas provas para teoremas já demonstrados.

Nesta nossa terceira atividade, na etapa de preparação, também sentimos a necessidade da construção de uma nova prova aproveitando os recursos do programa de Geometria Dinâmica e que se aproximasse daquela prova do triângulo dividido em três partes.

Apesar de sabermos que a busca por provas mais acessíveis aos alunos não ser exclusividade das tarefas exploratório-investigativas, cremos que este tipo de tarefa estimula esta ação devido a todo processo reflexivo que ela provoca. Como vimos anteriormente, os alunos tendem a questionar com o "por quê?" e isto pode ser respondido pela prova. Mas não qualquer prova, pois ela deve responder este "por quê?". Segundo Hanna e Barbeau (2002),

> Uma prova é mais satisfatória, se ela não só demonstra a veracidade das suas afirmações, mas também ajuda a compreender a razão pela qual essas afirmações são verdadeiras. Para fazer isso, uma prova explicativa faz uso de bem-conhecidas e bem-entendidas propriedades dos objetos matemáticos envolvidos. Quando ela é explicativa, uma prova pode também contribuir para a sistematização por trazer à luz as relações subjacentes que coloque o resultado no seu contexto mais vasto. Além disso, uma prova explicativa pode ajudar o leitor perceber por que razão vale a pena conhecer o resultado. Não menos importante, uma tal prova tem a vantagem, porque o nosso nível

> de condenação está diretamente relacionado à nossa compreensão, de fazer uma prova mais convincente (p. 8). [Tradução feita pelo pesquisador][49]

No momento em que procuramos uma prova alternativa, não queríamos apenas provar que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180°, mas sim, criar possibilidades para que o aluno entendesse a construção e se convencesse, usando para isso os movimento e a interação com a construção. Apesar de não termos apresentado essa prova aos alunos, ela propiciou um momento de aprendizagem no grupo.

Além do aspecto anterior, podemos notar também que a tarefa entusiasmou alguns alunos. Ao assistirmos as vídeosgravações chega a ser contagiante o entusiasmo dos alunos ao perceberem que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180°.

Da constatação desta regularidade ao processo de registro de suas conclusões, os alunos fizeram um percurso difícil com dúvidas, com discussões, com pesquisa e descobertas que são compartilhados no grupo na esperança de encontrar ecos que lhes facilitem novos raciocínios.

Essas constatações permitem-nos deduzir que, guardadas as devidas proporções, a atividade proposta nos aproximou do fazer matemático, pelo prazer da busca, da observação e da descoberta.

4.3.2.1 - A importância do trabalho colaborativo para os participantes na realização da atividade

De uma forma geral, podemos afirmar que a atividade colocou todos os membros em ação, pois todos participaram do planejamento, execução e discussão das tarefas.

Na etapa de preparação, a definição do assunto, dos parâmetros para a execução das oficinas, a forma de usar o CaR para a construção, a proposta para as intervenções e os papéis dos diversos membros do GRUCOGEO foram frutos de um trabalho coletivo.

Durante a execução das oficinas, cada membro desempenhou seu papel de auxiliar do professor dando a ajuda aos alunos dentro dos parâmetros acertados.

O registro das situações ocorridos em cada grupo de alunos pôde ser produzido pelos diversos participantes do GRUCOGEO e possibilitou análises posteriores.

A análise das oficinas promoveu um fechamento da atividade com reflexões intercalando experiência, prática e teoria.

---

[49] A proof is more satisfactory if it not only demonstrates the truth of its assertions, but also helps to understand why the assertions are true. To do so, an explanatory proof makes use of well-known and well-understood properties of the mathematical objects involved. When it is explanatory, a proof can also contribute to systematization by bringing to light underlying relationships that place the result in its broader context. In addition, an explanatory proof may help the reader see why the result of the proof is worth knowing.

Dessa forma, entendemos que a atividade atendeu satisfatoriamente a este aspecto.

4.3.2.2 - A dupla dimensão da aprendizagem: para os professores escolares (conhecimento pedagógico) e para os futuros professores (conhecimento como conteúdo escolar)

Diante do que descrevemos acima, podemos inferir que a possibilidade de vivenciar a junção entre teoria e prática, planejamento e aplicação, expectativa e realizações, sucessos e frustrações foi significativa.

Além deste momento de prática docente reflexiva pôde-se agregar o conteúdo matemático, que apesar de não ser novo para os participantes, foi visto sobre uma nova perspectiva, talvez até mais significativo.

Para alguns alunos da graduação foi possível observar a dupla dimensão da aprendizagem: de conteúdo e sobre a docência.

> **Kelly:** Então, essa experiência assim, ajudou muito [se refere ao GRUCOGEO]. Eu participei da atividade do Paulo, quando ele trouxe as crianças aqui na universidade [pra realizar as atividades preparadas e aplicadas para discussão no grupo]. Participei também quando a Olga trouxe os alunos dela [Paulo e Olga são professores de Matemática da rede municipal de ensino de Itatiba, integrantes do GRUCOGEO]. Ai você começa a participar e as crianças começam a fazer perguntas, algumas você sabe e outras não, e a que você não sabe..., aí eu chamava quem estava mais próximo, profº. Paulo, profª. Adair, profª. Regina...
>
> E ai ela vai dando as dicas para o aluno que vai servindo para mim também, ai vai servindo para mim também essas dicas. E vai servindo de duas maneiras, primeiro como um aprendizado, porque a crianças não sabiam e nem eu, e a outra forma é a de lidar com a situação "Eu quando professora". Então eu procuro olhar e aprender duas coisas diferentes. Como aluna, porque eu ainda não sabia aquilo que os alunos de 5º e 6º série estavam aprendendo. E ter uma visão para quando eu for professora, que é para isso que eu estou estudando.[...] eu sempre procuro aprender, e quando possível, de duas maneiras, como aluna e procuro ter a visão de professora. (CARDIM, 2008, p. 110)

4.3.2.5 - As provas/validações como mobilizadoras no processo de (re)siginificação do conhecimento no contexto da matemática escolar

Entendemos que este aspecto aparece de forma mais significativa em dois momentos: na preparação das oficinas e na execução com os alunos escolares.

No primeiro momento, a partir da escolha do assunto, o grupo começou a se movimentar para a estruturação da oficina. As expectativas pela execução da tarefa, pela forma como os alunos poderiam interpretar e justificar suas explorações e quais são os conhecimentos prévios necessários, forçaram uma revisão sobre o assunto.

Conforme apresentamos anteriormente, também na discussão das duas provas (a que procurou aproximar-se da justificativa feita por meio do recorte do triângulo em três partes e a sua remontagem, unindo os vértices, formando assim um ângulo de 180°, e a outra, próxima à prova tradicional apresentada em livros didáticos), fez-se o movimento de retomada dos conteúdos geométricos envolvidos tais como paralelismo, os tipos de ângulos (internos, externos, correspondentes, complementares e alternos), teorema de Thales, dentro outros. Quando essa retomada é feita no contexto de preparação da oficina, ela assume uma dimensão diferenciada daquela feita para o estudo escolar a ser cobrado pelo professor, por isso, acreditamos que ela tenha um outro significado para os graduandos pertencentes ao GRUCOGEO, que tiveram também a oportunidade de auxiliar na execução das oficinas, uma vez que os futuros professores estão envolvidos com as argumentações e provas na sua ação pedagógica futura. Portanto, transcende a questão puramente de "resolução de um exercício ou uma demonstração", e assume o caráter de aprendizagem sobre a docência.

No segundo momento, o da execução das oficinas, pôde-se observar como a prova surge quase que espontaneamente como resultado da exploração da construção e do direcionamento dado pelos professores. Porém, acreditamos que isto só é possível a partir do momento que entendemos a prova dentro do contexto escolar não como um produto, mas como um processo, conforme discutimos anteriormente.

Dentro desta concepção as questões de intervenção assumem um papel significativo, pois buscam o raciocínio argumentativo dos alunos e o significado que estes atribuem aos conhecimentos matemáticos construídos. Podemos citar como exemplos o diálogo do professor Paulo em torno da definição dos pontos colineares e dos recursos usados no Cabri ("pauzinhos", retas e segmentos de retas), e da professora Olga com o valor da medida dos ângulos e da soma desses valores, e a justificativa de um de seus alunos, usando o CaR, para defender que um vértice do triângulo não poderia ter um ângulo igual ou maior que 180°.

Dessa forma, entendemos que essa atividade possibilitou, por meio das provas, uma (re)significação do conhecimento matemático, tanto dos integrantes do GRUCOGEO quanto dos alunos escolares que dela participaram.

4.4 Atividade 4: sólidos platônicos truncados

Esta quarta atividade foi desenvolvida praticamente durante todo o primeiro semestre de 2007. Apesar de ela ter sido iniciada na terceira reunião do GRUCOGEO é importante apresentarmos as reuniões anteriores para que se possa entender o movimento no qual ela se inseriu.

4.4.1 O gênesis da atividade

A primeira reunião do grupo em 2007 foi no dia 05 de março. Nela, o grupo definiu a linha de trabalho a ser seguida durante aquele semestre. Alguns integrantes solicitaram que fossem abordadas tarefas relacionadas à Geometria Espacial, pedido que já tinha sido feito no encerramento do segundo semestre de 2006, pois esse é um conteúdo de grande dificuldade de abordagem para a maioria dos professores e alunos.

Na reunião da semana seguinte, a do dia 19 de março, a formadora Regina e eu levamos a tarefa "Poliedros", retirada do livro Matemática para Todos – publicação portuguesa (APM). Nesta tarefa, é feita uma breve explanação sobre polígono, polígonos regulares e poliedros, e em seguida é apresentada uma seqüência de figuras de poliedros e é feito a seguinte solicitação:

> Observa os tipos de vértices e de faces que têm estes poliedros e vê se poderíamos chamar a algum destes de regular. Explica a tua idéia. Diz depois que seria a tua definição de poliedro regular.

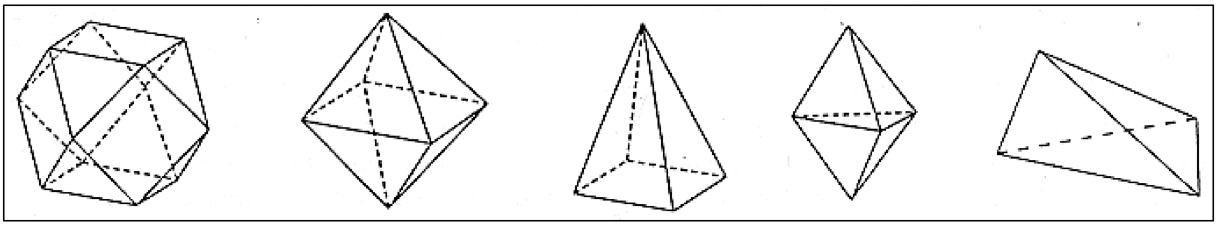


Figura 4.44 Poliedros da atividades

Nesta atividade já foi possível constatar a dificuldade existente em relação à Geometria Espacial. Várias dúvidas foram surgindo e sendo discutidas, tentando chegar a algumas definições. Essas dúvidas eram de diferentes tipos: de visualização, de linguagem, de conceitos etc.

A partir de uma dúvida levantada pela graduanda Kelly sobre o último poliedro da figura 4.44 acima, o grupo começa a tentar identificar esta figura entre os diversos poliedros de acrílico disponibilizados pela formadora Regina. Neste movimento de tentar responder à pergunta pôde-se observar a dificuldade de interpretação da figura espacial desenhada no plano, tentando aproximá-la do modelo tridimensional, e a associação com o objeto concreto.

Essa dificuldade que o professor ou o futuro professor tem em relação à Geometria Espacial gera uma conseqüência direta no ensino, conforme pode ser observado na preocupação da professora Olga:

> ***Professora Olga:*** *Agora uma questão [...] é que a imagem que ajuda muito a ter a idéia do poliedro. Aí o que acontece: e quando a gente não consegue enxergar, como é que a gente faz? Por que têm muitos* [poliedros] *ilustrados nos livros que acontece isso: que a gente não consegue enxergar qual é o poliedro. Então,* [...] *como desenvolver com o aluno se eu tenho essa dificuldade de enxergar? Tá escrito lá "olha o poliedro de tantas faces triangulares e tantas faces quadrangulares", só que você não consegue nem desenhar...*

Neste momento, uma intervenção da formadora Adair traz à reflexão os conceitos de Pais (1996) sobre a estruturação do pensamento geométrico e os elementos relacionados à experiência que ajudam na estruturação deste pensamento (veja quadro da página 30).

> ***Adair****: Foi a pergunta que eu fiz: não dá pra começar a trabalhar com a representação no desenho?*
>
> ***Professora Olga****: Eu acho que não.*
>
> ***Adair****: Porque é a representação do objeto real.* [...] *o Luiz Carlos Pais fala que tem que passar pelo objeto, pelo desenho para criar a imagem mental. Que não se consegue criar a imagem mental só pelo desenho.*
>
> **[**...]
>
> ***Regina****: Aí, é o que estávamos falando, não é Alice? Monta, desmonta, pega isto daqui, desenha em volta, tira, olha... Eu tenho que ter este movimento muito, muito... O recortar, o colar, eu tenho que ter muito este movimento. E não é só perguntar que figura é essa. Não. É "Por quê as propriedades da figura são essas?", "O que esta figura tem a ver com esta.. com este objeto que está aqui?". Fazer atividade em que você dá a planificação e perguntar que como eles acham que seria este objeto no espaço...* [...]

A forma proposta pela formadora Regina para se trabalhar com o objeto concreto, o desenho e relacioná-los com o conceito, afina-se com o pensamento de Pais (1996) para quem

> O objeto e o desenho são simplesmente recursos materiais auxiliares à construção de um conhecimento de natureza experimental e, por si mesmos, não caracterizam as noções geométricas. Mas, na construção do conhecimento teórico da geometria, que é constituído essencialmente pelos conceitos, faz-se necessário o recurso simultâneo tanto das bases intuitivas como da atividade experimental. (p.73)

Outras discussões ocorreram durante a reunião permitindo relembrar alguns tópicos da Geometria Espacial que se encontravam esquecidos, como por exemplo, a própria definição de poliedros, de poliedros regulares, poliedros irregulares, os sólidos de Platão, poliedros retos e oblíquos, os elementos dos poliedros (arestas, faces etc), dentre outros. A grande dificuldade conceitual foi percebida pelos alunos da graduação que manifestaram pouquíssimo conhecimento sobre Geometria Espacial, limitando-se à identificação e nomeação de alguns poliedros. Naquele momento percebemos que, também para nós, formadores e para os professores escolares algumas definições em Geometria Espacial necessitavam ser depuradas, como, por exemplo, quando a formadora Regina define que um poliedro é oblíquo quando a sua altura está no interior da base, ocorrendo em uma definição errônea.

4.4.2 Os sólidos platônicos truncados

Na reunião do dia 19 de março iniciou-se a tarefa dos sólidos platônicos truncados. Assim como a tarefa anterior, essa também foi retirada do livro Matemática para todos.

Na primeira reunião desta atividade foram distribuídos a folha com a tarefa, papel e lápis. Os participantes tinham ainda à sua disposição vários sólidos construídos em diversos materiais (acrílico, cartolina e canudos) e várias peças do Polydron[50] que permitiam a construção de diversas superfícies de sólidos a partir do encaixe de polígonos. Após esta parte inicial, foi feita a leitura da tarefa e realizadas algumas explicações. Os participantes formaram dois subgrupos para executar o trabalho.

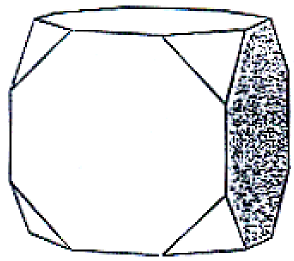
A tarefa proposta está apresentada a seguir na figura 4.45.

[50] Polydron é um produto didático para construção e manipulação de poliedros a partir de polígonos. O site da empresa é http://www.polydron.co.uk.

MATEMÁTICA PARA TODOS
investigações na sala de aula

25. Sólidos platónicos truncados

Imagina que vamos cortar cada vértice de um sólido platónico por um plano, de modo que as faces obtidas sejam polígonos regulares, tal como mostra a figura do cubo truncado.



1. Descreve qual deve ser a posição do plano de corte relativamente ao cubo, para que a secção obtida corresponda a um polígono regular. Faz o mesmo para os outros sólidos platónicos.
2. Quantos vértices, arestas e faces tem o cubo truncado? Compara esses dados com os do cubo original.
3. Faz o mesmo estudo para os restantes sólidos platónicos.
4. Qual a relação entre o número de vértices do sólido original e do sólido truncado? E entre o número de arestas? E de faces? Encontra uma justificação para cada relação encontrada.
5. No caso do cubo truncado, as faces correspondentes às secções são triângulos. Analisa o que acontece para os outros poliedros truncados.

Figura 4.45 – a tarefa dos Sólidos Platônicos Truncados

Como a atividade foi realizada em dez reuniões (não consecutivas) optamos por trazer algumas falas e episódios dentro de uma seqüência cronológica, apesar de alguns episódios acontecerem em mais de uma reunião.

4.4.2.1 As primeiras hipóteses sobre os cortes

O primeiro subgrupo levantou algumas hipóteses que foram se modificando aos poucos por meio de discussões dos seus membros. Este subgrupo iniciou suas discussões afirmando que um dos cortes deveria ser em um ponto que representasse menos da metade da aresta do cubo. Esta hipótese assumiu posteriormente outra redação, desta vez afirmando que se deveriam ter dois cortes dividindo a aresta em três partes, com isto, conseguir-se-ia nas secções, triângulos eqüiláteros e na face cortada, um octógono. Porém, um dos membros do subgrupo percebe que desta forma não se teria na face um polígono regular (octógono) conforme o solicitado pela tarefa. Para isso, o corte deveria ser feito de forma que o octógono tivesse como medida dos lados valores múltiplos de $\sqrt{2}$.

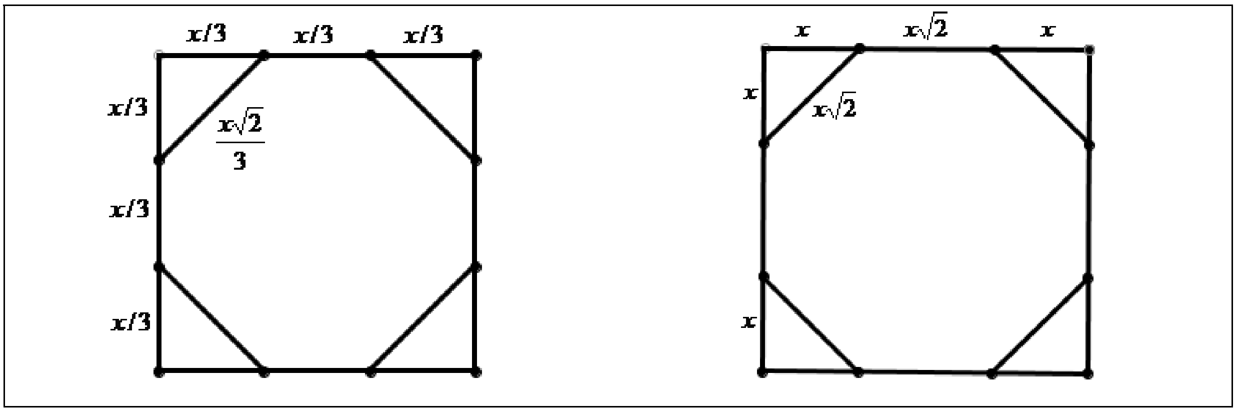


Figura 4.46 ilustração dos cortes da face do cubo

A partir deste ponto o subgrupo começa a discutir como se conseguiria definir estes valores para efetuar o corte, ou seja, como construir um octógono a partir de um quadrado.

O segundo subgrupo, partindo também do cubo, levantou duas hipóteses: (1) assim como o subgrupo anterior, achou que se conseguiria um octaedro fazendo-se os cortes em um terço da aresta; e (2) que se o corte fosse feito no ponto médio da aresta se obteria um outro cubo.

Quando o primeiro subgrupo socializou suas observações quanto ao octaedro foi que o segundo subgrupo percebeu que sua hipótese estava errada. A dúvida de como obter o corte com medida múltipla de $\sqrt{2}$ não foi resolvida.

Ao final da reunião, a formadora Regina sintetizou as conclusões do grupo, daquele dia:

- No cubo, fazendo a secção no ponto médio das arestas, tem-se outro cubo;
- No tetraedro, fazendo a secção no ponto médio das arestas, tem-se outro tetraedro;
- No tetraedro, fazendo a secção em 1/3 das arestas, tem-se um hexágono;
- No octaedro, fazendo a secção no ponto médio das arestas, obtém-se o cubo.

Porém, o clima de dúvida continuou. As dificuldades para se criar uma imagem mental do polígono que sobraria após os cortes foram grandes. Isto acaba reforçando a discussão feita na reunião do dia 05 de março, registrada acima, sobre a necessidade de vivenciar mais experiências com os sólidos geométricos e relacioná-las com os conceitos.

Em vários momentos, procurou-se por alguma outra mídia que pudesse auxiliar nas visualizações: linhas para demarcar os cortes nos sólidos disponíveis; sabão para cortar os poliedros (encontrou-se uma barra, porém ele estava muito dura não permitindo o corte); dobradura nos desenhos. Porém nenhuma delas conseguiu dar a segurança desejada.

4.4.2.2 Da desconstrução à reconstrução

No início da reunião do dia 26 de março foi feita uma retomada das conclusões da reunião anterior que pôde ser sintetizada no quadro a seguir.

Poliedro	Secção no 1/2 da aresta	Secção em 1/3 da aresta
Tetraedro	Obtém-se um novo tetraedro	Obtém-se um poliedro com 4 faces triangulares e 4 faces hexagonais
Cubo	Obtém-se outro cubo	Não se tem um polígono regular na face
Octaedro	Obtém-se um cubo	Não tem solução do grupo
Dodecaedro	Obtém-se um poliedro com faces triangulares e pentagonais	Não tem solução do grupo
Icosaedro	Obtém-se um poliedro com faces triangulares e pentagonais	Obtém-se um poliedro com faces pentagonais e hexagonais

Porém, quando a professora Olga chegou à reunião, essas conclusões tiveram que ser repensadas. O registro feito pela pós-graduanda Luana, e lido no início da reunião do dia 09 de abril pela formadora Regina, mostra o movimento feito pela professora Olga e que permitiu esta contestação:

> Ela [a professora Olga] falou que havia pensado neste problema a semana toda e que insatisfeita com nossa conclusão ela fez os poliedros com massa de modelar para poder cortar. Ela percebeu que estávamos equivocados, pois estávamos imaginando que quando cortasse ao meio não teríamos sobra no meio do poliedro anterior. Ela percebeu que qualquer corte no tetraedro daria um octaedro.
>
> Não acreditamos, num primeiro momento, no que a professora Olga estava falando. Fiquei indagada e comecei a confeccionar o sólido em superfície de papel para poder cortar e ver. Cortamos e vimos que estávamos esquecendo a parte triangular que sobrava. Todas as nossas conclusões tinham ido por água abaixo [Registro escrito feito pela pós-graduanda Luana].

Assim, como aconteceu com a construção do suposto ângulo de 30° na atividade 1, página 61, vemos que a opinião do grupo é questionada por um dos membros que continua o trabalho durante a semana e retorna suas conclusões para o grupo, mudando o resultado obtido até aquele momento.

Além desta contribuição, a professora Olga trouxe à discussão a questão do corte do cubo para a construção do octógono regular, também apresentado acima.

Uma vez que as conclusões tiveram que ser refeitas, a formadora Regina sugere que o grupo se concentre em duas questões que ao serem respondidas e sistematizadas ajudariam a, talvez, chegar a uma prova ou generalização. As duas questões são: (1) “Quantas faces vão ter cada sólido platônico truncado?”; e (2) “Quais as condições para que ele tenha nas faces polígonos regulares?”.

Nesta reunião foi usada “massa de modelar” como mídia auxiliar na realização da atividade. Conseguiu-se com ela uma maior facilidade para visualizar o proposto na tarefa, apesar dela ter a desvantagem de se deformar quando se vai fazer o corte.

4.4.2.3 O resultado das experimentações e das análises

Para o trabalho do grupo foi utilizada outra mídia: o isopor. Ao mudarmos de mídia , a tarefa ganhou um novo desafio, visto a dificuldade de construção de um tetraedro a partir de um bloco de isopor na forma de um paralelepípedo. Essa discussão e construção ocuparam grande parte do tempo dos participantes. Na verdade, o tetraedro regular foi esculpido no isopor e, para tanto, foram revistos novos conceitos e propriedades da Geometria Espacial para essa construção. Dessa forma, surgem análises e questionamentos sobre: instrumentos de medidas de ângulos poliédricos, conceito de tetraedro regular ou não, conceito de pirâmide (base quadrada?). Obtendo sucesso na construção o grupo produziu o quadro a seguir.

Sólido	Face	Aresta	Vértice
Tetraedro	4	6	4
Tetraedro truncado (aresta ao meio)	8 (4 + 4)	12 (3 x 4)	6 (3 x 8 / 2)
Tetraedro truncado (aresta dividida em três partes)	8 (4 + 4)	18 (3 x 4) + 6	12 (3 x 8)
Cubo	6	12	8
Cubo truncado (aresta ao meio)	14 (6 + 8)	24 (3 x 8)	12 (3 x 8 / 2)
Cubo truncado (aresta dividida em três partes)	14 (6 + 8)	36 (3 x 8) + 12	24 (3 x 8)
Dodecaedro	12	30	20
Dodecaedro truncado (aresta ao meio)	32 (12 + 20)	60 (5 x 12)	30 (3 x 20 / 2)
Dodecaedro truncado (aresta dividida em três partes)	32 (12 + 20)	90 (3 x 20) + 30	60 (3 x 20)

Icosaedro	20	30	12
Icosaedro truncado (aresta ao meio)	32 (20 + 12)	60 (12 x 5)	30 (5 x 12 / 2)
Icosaedro truncado (aresta dividida em três partes)	32 (12 + 20)	90 (5 x 12) + 30	60 (2 x 30)

Baseando-se no quadro acima, o grupo chega à seguinte relação:

Sólido	**Face**	**Aresta**	**Vértice**
Sólido	F	A	V
Sólido truncado (aresta dividida ao meio)	(F + V)	(3 x V)	(3 x V / 2)
Sólido truncado (aresta dividida em três partes)	(F + V)	(3 x V) + A	(3 x 8)

Com estas informações, partiu-se para verificar se a relação de Eüler era também válida para os sólidos truncados. Para isso, utilizou-se um quadro com os dados quanto ao número de faces, arestas e vértices e por meio do cálculo com a fórmula, fez-se a verificação.

Sólido	**Face**	**Aresta**	**Vértice**	**Rel. Eüler V+F=A+2**
Tetraedro	4	6	4	4 + 4 = 6 + 2
Tetraedro truncado (aresta ao meio)	8	12	6	6 + 8 = 12 + 2
Tetraedro truncado (aresta em três partes)	8	18	12	12 + 8 = 18 + 2
Cubo	6	12	8	8 + 6 = 12 + 2
Cubo truncado (aresta ao meio)	14	24	12	12 + 14 = 24 + 2
Cubo truncado (aresta em três partes)	14	36	24	24 + 14 = 36 + 2
Dodecaedro	12	30	20	20 + 12 = 30 + 2
Dodecaedro truncado (aresta ao meio)	32	60	30	30 + 32 = 60 + 2
Dodecaedro truncado (aresta em três partes)	32	90	60	60 + 32 = 90 + 2
Icosaedro	20	30	12	12 + 20 = 30 + 2
Icosaedro truncado (aresta ao meio)	32	60	30	30 + 32 = 60 + 2
Icosaedro truncado (aresta em três partes)	32	90	60	60 + 32 = 90 + 2

Chegou-se à conclusão que a relação de Eüler também é válida para os sólidos platônicos truncados. Essas conclusões trouxeram ao grupo uma satisfação muito grande em ter conseguido produzir algo em Geometria Espacial, além da simples nomeação de sólidos. O registro escrito da professora Joyce evidencia esse fato:

> A exaltação de meus colegas, em especial Olga, Regina, Kemella e Luana foi contagiante, após a "descoberta" dessas regularidades, afinal foram vários encontros, várias hipóteses que caíram por terra até se chegar a essas relações descritas na tabela. [Registro escrito da professora Joyce]

4.4.2.4 As possibilidades a partir da nova mídia: o Cabri3D

A partir da reunião do dia 07 de maio o grupo pôde experimentar uma nova mídia: o programa Cabri 3D[51]. Assim como os demais programas de Geometria Dinâmica, o Cabri3D permite a construção geométrica a partir de elementos primários da Geometria e pelo recurso de movimentação de pontos. Pôde-se verificar propriedades e relações entre os elementos da construção.

Apesar de ser também iniciante no uso deste programa, coube a mim apresentá-lo ao grupo. Fizemos uma explanação sobre seus conceitos básicos na expectativa de que os participantes do GRUCOGEO tivessem uma orientação mínima para o seu uso. Sua operação básica é relativamente simples e associando-se as técnicas de construção geométrica puderam-se alcançar resultados interessantes.

Conforme o registro feito pela professora Adriana,

> À passos lentos e, por vezes cambaleantes, fomos familiarizando-nos com a manipulação dos objetos. Confesso que, inicialmente, segui os passos sugeridos pelo Jorge, mas que no decorrer da atividade, tanto eu quanto a Luana, deixamo-nos guiar pela nossa curiosidade, pelo desejo de explorar. Empolgamo-nos com essa exploração, com a nossa viagem pelas ferramentas e ícones do Cabri 3D; ferramentas essas que, ainda não tinham sido utilizadas. [Registro escrito da professora Adriana]

Diante das limitações apresentadas pelas outras mídias, acreditamos que este programa se destaca como um recurso didático/pedagógico interessante, pois permite uma construção mais precisa e uma manipulação mais fácil dos objetos tridimensionais. Além disso, o recurso de girar o objeto sobre seus eixos garante uma melhor visualização.

Acreditamos que a parte mais complexa ficou por conta da construção geométrica. Podemos citar como exemplo os cortes feitos no cubo mantendo a face como um octógono regular. Conforme registramos anteriormente, a professora Olga e anteriormente um dos

[51] O programa Cabri 3D é *software* comercial de Geometria Dinâmica para Geometria Espacial. A página oficial deste programa na internet é http://www.cabri.com/.

subgrupos, chegaram à conclusão que o corte deveria manter na face do cubo um segmento de comprimento múltiplo de $\sqrt{2}$. O problema a ser resolvido é: como construir este segmento sobre a face do cubo, por meio de cortes, transformando esta face quadrada em um octógono regular?

Partindo do estudo do octógono regular, podemos concluir que a circunferência inscrita nele tangencia seus lados definindo com seu raio a apótema deste polígono, conforme ilustrado na figura 4.47 a seguir.

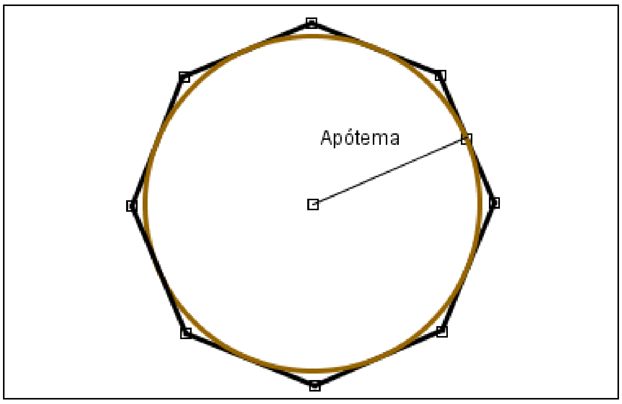


Figura 4.47 Apótema do octógono

Baseando-se nesta construção, puderam-se criar os cortes necessários no cubo, conforme ilustrado nas figuras 4.48 e 4.49, a seguir.

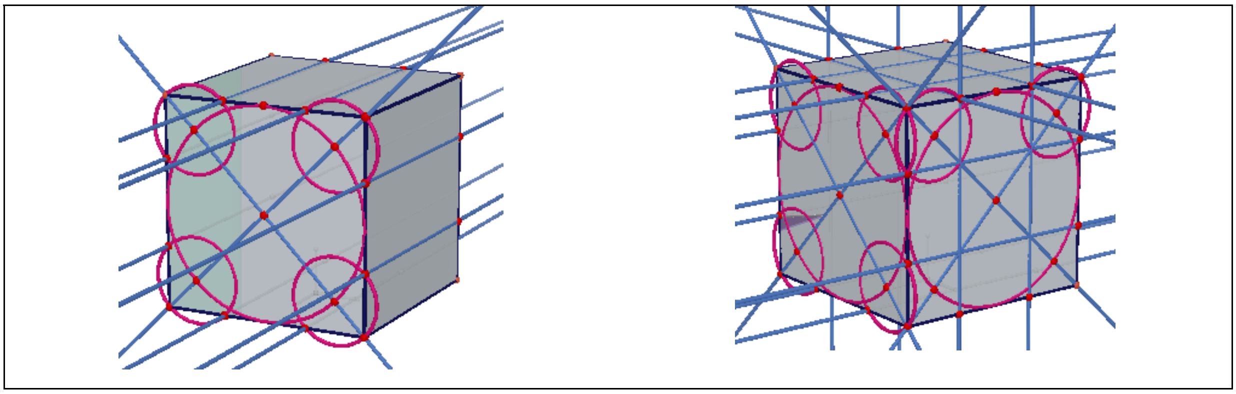


Figura 4.48 Cubo com as construções auxiliares para definição dos pontos de corte

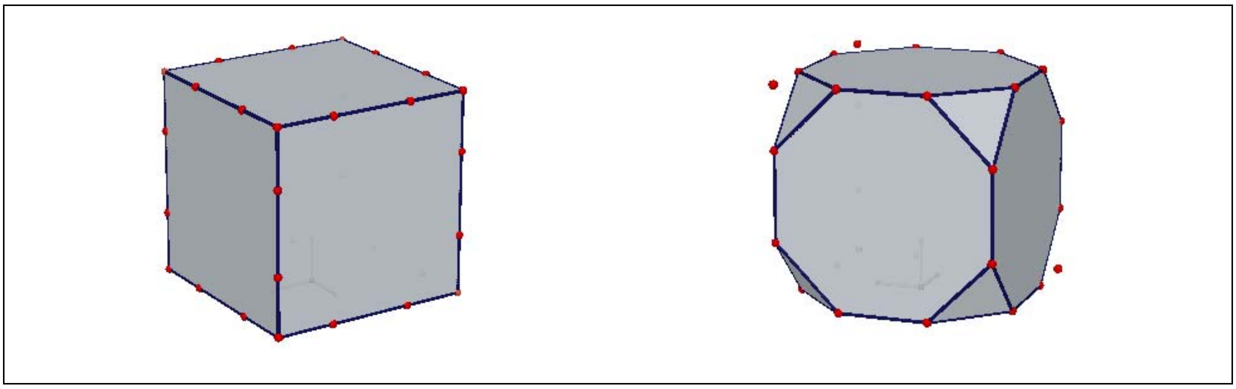


Figura 4.49 Cubo com pontos de corte definidos e os cortes efetivados

Os demais sólidos seguem a mesma linha de construção: (1) definem-se os pontos de corte; (2) Constrói-se o plano passando por estes pontos; (3) Efetiva-se o corte entre o plano e o sólido; e (4) Oculta-se o plano.

4.4.3 Síntese Geral dos aspectos analisados na atividade

Esta atividade nos possibilitou construções de imagem mental e conceitos dentro de uma área da Matemática pouco trabalhada na escola. As provas em Geometria Espacial são mais complexas que as provas em Geometria Plana. Além disso, tais provas dependem muito de um conhecimento depurado sobre Geometria Plana e de um conhecimento sobre Matemática Superior.

4.4.3.1 A potencialidade da atividade como incentivadora de formulação de provas (Como as atividades de investigação incentivaram as provas)

Desde o início da tarefa houve uma mobilização dos conhecimentos na tentativa de gerar provas.

Quando um dos participantes do subgrupo, no início da atividade, percebe que o corte do cubo não poderia ser feito no 1/3 da aresta para que se tivesse um polígono regular em sua face e quando a professora Olga também apresenta esta mesma conclusão para os grupos, foi necessário, nesses dois momentos, explicar o porquê da impossibilidade de ser feito o corte nos pontos imaginados inicialmente. A "prova" aparece subjetivamente na frase que não chegou a ser feita, mas que podia ser sentida: "Prove porque não pode." (Prove porque não é possível dividir a aresta em 3 partes de mesma medida e obter um octógono regular).

Outro momento que merece destaque é o de análise para a montagem da tabela dos sólidos platônicos, dos sólidos platônicos truncados no ponto médio e dos sólidos platônicos truncados em 3 partes. A busca pela regularidade e posteriormente a generalização mobilizou um pensamento argumentativo e lógico.

Apesar disso, não se conseguiu chegar à prova da fórmula de Eüler. Foi encontrada em alguns livros essa prova, porém, para o seu entendimento era necessário o domínio de uma Matemática do ensino superior o que levaria um tempo bem maior para nossos trabalhos. No livro "A Lógica do Descobrimento Matemático" de Inre Lakatos, o autor apresenta essa prova, discutindo-a com seus alunos imaginários, mostrando a dinâmica de um ambiente de verdades provisórias.

Dessa forma, acreditamos que a atividade mobilizou os integrantes do GUCOGEO para o processo de prova, e foi nesse movimento, que permitiu a construção do quadro com as relações entre os sólidos platônicos e sólidos platônicos truncados além de permitir a criação e verificação da validade da relação de Eüler tanto para os sólidos platônicos quanto para os sólidos platônicos truncados.

4.4.3.2 - Diferentes mídias na Matemática Escolar (Quais mídias foram mobilizadas?)

Reconhecemos, durante a execução da atividade, uma dificuldade muito grande na criação de imagens mentais propostas pelos cortes nos sólidos. As falas das formadoras Regina e Adair, fundamentadas em Pais (1996) ilustram a importância das mídias para a formação daquelas imagens. Mas como o próprio autor afirma, não é a mera manipulação destas mídias que farão com que se criem essas imagens e os conceitos associados a elas.

As tentativas de encontrar imagens mentais que se aproximassem das propostas feitas exigiram grandes esforços de interpretação e de abstração. Estas dificuldades foram diminuindo à medida que as mídias foram sendo incorporadas e exploradas.

Conforme relatamos acima, a primeira grande guinada na atividade aconteceu quando a professora Olga, em casa, cria os sólidos usando massa de modelar e faz os cortes. A massa de modelar dá suporte ao pensamento da professora que intuitivamente achava estranhas as conclusões do grupo, porém não tinha argumentos para convencer o grupo no momento da reunião.

Posteriormente, para gerar as tabelas com as fórmulas deduzidas a partir da observação também foram usados outros sólidos construídos com isopor ou massa de modelar e os sólidos em acrílicos.

Entendemos que as diversas mídias deram suporte à observação e facilitaram a criação das imagens mentais necessárias para a resolução da tarefa. Com a inserção gradativa de novas mídias, do papel e lápis até o programa Cabri3D, ousamos afirmar que houve uma mudança significativa na percepção dos participantes do GRUCOGEO sobre os objetos tridimensionais e suas propriedades. Entendemos que a integração dos experimentos pela manipulação das mídias, das observações, das análises e das sínteses possibilitou esta mudança, tornando-se fundamental no desenvolvimento desta atividade. Cada mídia trazia uma nova dificuldade de representação, o que dependia do domínio sobre aquela mídia e, ao mesmo tempo, trazia limites de precisão, principalmente, e possibilidades de uma melhor visualização. Nesse sentido, podemos afirmar que as mídias se complementaram a fim de trazer suporte para as argumentações e provas da tarefa. A escolha de cada mídia tem a ver, muitas vezes, com o conhecimento sobre aquela mídia. Dessa forma, entendemos que se para alguns participantes a mídia computacional possibilita um instrumento de "convencimento", para outros a massa de modelar, ou mesmo o modelo em acrílico, assumia esse papel.

4.4.3.3 - A aproximação com o fazer matemático

Desde os primeiros movimentos dessa atividade, o grupo passou a viver um clima de permanente mudança. As conclusões construídas por observações ou por intuições podiam ser, a qualquer momento, substituídas por outras.

Este ambiente lakatosiano de verdades provisórias foi lembrado em um dos momentos do grupo. Após uma seqüência de argumentações, a formadora Regina, chega a uma conclusão:

> ***Regina:*** *Então dá!* [Silêncio]
>
> ***Jorge:*** *Olha o Lakatos...*
>
> [Risos]
>
> ***Regina:*** *É... Este é um ambiente lakatosiano. Lakatos é um filósofo que diz que a gente vive num ambiente de verdades provisórias. Acabamos de experimentar isto: tínhamos uma conclusão que não era possível* [risos]*, ai eu falei "temos que provar", ai a Terezinha que chegou depois* [...] *disse "olha aqui...".* [risos]
>
> *Aí o ambiente lakatosiano, que Lakatos vai falar, é que agora a gente vai embora pra casa e ainda continuamos produzindo muita matemática. [...] Se vocês lembrarem disso é bom ir escrevendo, porque no nosso próximo encontro da semana que vem a gente repensar as coisas que a gente tinha feito aqui. Como naquela atividade do Apolônio, que o Jorge foi pra casa, ficou incomodado com a demonstração de vocês* [alunos da graduação] *e no outro encontro ele veio e falou "não tá certo aqui...". Então, isto rompe com toda a perspectiva de uma matemática exata..*
>
> ***Terezinha:*** *Certinha, e é aí que ocorre a aprendizagem. Não é Regina?*
>
> ***Regina:*** *Porque na verdade você começa a perceber "o que é exata", "o que é uma ciência exata?"* [Transcrição da vídeo-gravação]

Na reunião seguinte a este diálogo, foi a que a professora Olga trouxe as observações, frutos de seu trabalho durante a semana, e que desconstruiu toda a conclusão do grupo. Esta característica também foi percebida pela pós-graduanda Luana que produz o registro relativo à reunião do dia 26 de março:

> Trabalhar com atividades investigativas é emocionante, mas um pouco assustador. Quando você está quase chegando numa solução, outros colegas comentam que esta solução não é possível, mas às vezes não conseguem te mostrar outra solução possível. [Registro escrito da pós-graduanda Luana].

Outro aspecto que, no nosso entender, aproxima essa atividade do fazer matemático, foi a seqüência de exploração, análise, síntese e sistematização na busca da regularidade das secções nos sólidos e a relação entre os sólidos truncados e os sólidos platônicos que os originou.

O grupo, a todo o momento, buscou produzir sínteses a partir de tabelas, estabelecendo generalizações a partir de um pensamento algébrico. Se, para alguns participantes a visualização nos objetos concretos satisfazia a curiosidade imposta pela tarefa, para a grande maioria dos participantes era necessário encontrar uma relação algébrica coerente com as conclusões obtidas. Esse movimento se aproxima de um trabalho de produção matemática.

Assim, entendemos que este aspecto foi atendido pela atividade.

4.4.3.4 - A dupla dimensão: para os professores escolares (como desenvolver na sala de aula) e para os futuros professores (como conteúdo escolar)

A mudança de conteúdo da Geometria Plana para a Geometria Espacial foi para atender a um objetivo que se aproxima deste aspecto: estudar, no grupo, um assunto que é uma dificuldade geral, tanto de professores (não só escolares) quanto de alunos (não só da graduação).

No registro escrito da professora Joyce, podemos perceber como a atividade atendeu este aspecto. Ela registra sua impressão sobre a reunião do dia 23 de março com as seguintes palavras: "aprendi muito durante os poucos encontros que estive presente e posso dizer que essas experiências contribuíram muito para a reflexão de minha prática". Nesse sentido, para os professores escolares do grupo representaram momentos de aprendizagem conceitual, bem como sobre a docência, uma vez que, ao experimentarem diferentes mídias, reconhecem o papel dos modelos concretos como necessários à produção da imagem mental e conceituação. Ir além da nomeação e identificação de algumas poucas propriedades em Geometria Espacial possibilitou a esses professores repensarem suas práticas em relação a esse conteúdo escolar. Além disso, os professores escolares manifestaram a existência de uns poucos materiais disponíveis sobre o ensino de Geometria Espacial, apontando a necessidade de novos materiais didáticos para as investigações neste conteúdo.

Para os alunos da graduação, a atividade contribuiu, principalmente, para uma aproximação com os conceitos relativos à Geometria Espacial. Embora, alguns dos alunos presentes tenham cursado uma disciplina na graduação que abordou esse assunto, o trabalho desenvolvido enfocava muito mais os cálculos de medidas (volume, massa) do que os conceitos básicos e as propriedades elementares. Dessa forma, a aprendizagem desses alunos aconteceu em um duplo sentido, tanto conceitual, quanto sobre a docência, no reconhecimento da necessidade de se trabalhar com diferentes mídias na abordagem metodológica desse conteúdo escolar.

Diante do que foi relatado acima entendemos que a atividade atendeu a este aspecto.

4.4.3.5 - A importância do trabalho colaborativo para os participantes na realização da atividade

Desde a primeira reunião até o seu encerramento, percebemos que houve um envolvimento dos membros do grupo e uma dinâmica constante para a aprendizagem, buscada coletivamente. Em todos os momentos as dificuldades surgiam dos mais diversos membros do GRUCOGEO e a busca pelo esclarecimento destas dúvidas também foi geral: a professora Olga pesquisando em casa e compartilhando com o grupo suas observações; Daniela, aluna da graduação, contribuiu com uma pesquisa na *internet* e trouxe para o grupo um material sobre os Sólidos de Arquimedes que se aproxima dos cortes que fizemos nos poliedros de Platão; a mini-oficina que ofereci sobre o Cabri3D para auxiliar os participantes do GRUCOGEO no uso das ferramentas deste programa para fazerem as explorações propostas na tarefa; e as contribuições teóricas das formadoras. Isso tudo evidencia o comprometimento de cada participante com o grupo em geral. A cada novo encontro, algum participante trazia alguma questão ou contribuição para as nossas discussões. Esse movimento foi compartilhado por todos e representa um momento em que o grupo assume a dimensão colaborativa uma vez que há pouca interferência direta das formadoras nos acontecimentos realizados naquele semestre e no caminho que a atividade teve.

Desta forma, entendemos que o trabalho colaborativo foi fundamental na execução e sucesso desta atividade.

4.4.3.6 - Como as provas/validações surgiram como mobilizadoras do processo de (re)siginificação do conhecimento no contexto da Matemática Escolar.

Esta atividade mobilizou uma grande quantidade de conhecimentos matemáticos novos e/ou que já haviam sido esquecidos.

As tentativas de encontrar imagens mentais que se aproximassem das propostas feitas exigiram grandes esforços de interpretação e de abstração. Estas dificuldades foram diminuindo à medida que as mídias foram sendo incorporadas, conforme destacamos anteriormente. Mas mesmo na manipulação destas mídias o conhecimento matemático foi fundamental, pois para se obter os cortes eram necessárias condições específicas.

As mídias analógicas usadas permitiram uma visualização aproximada da solicitação da tarefa, como por exemplo, o corte no cubo de massa de modelar para obter uma face com um octógono regular, porém as construções feitas no Cabri3D, apesar de também permitir uma construção "aproximada", exigiam um conhecimento matemático e geométrico bem maior. Retornando ao exemplo dos cortes para se obter a face octogonal regular, é possível obtê-la por meio da construção geométrica obtendo-se o valor esperado para manter a característica da face.

Outro momento em que esta mobilização se fez permanente foi na construção das tabelas com as análises dos sólidos truncados. A busca da regularidade, sua interpretação e a construção de um termo geral que representasse a relação entre os sólidos platônicos e os sólidos platônicos truncados foram os catalisadores desta mobilização.

CAPÍTULO 5 – ATÉ ONDE CHEGAMOS, SEM SIGNIFICAR UM FIM (C.Q.D.)

Nessa pesquisa, nos propusemos a investigar os processos de provas e validações em matemática escolar em atividades de investigações geométricas em diferentes mídias, num ambiente de dimensão colaborativa.

Ela permitiu-nos algumas considerações, que passamos a descrever.

5.1 Sobre a natureza das provas e validações para o contexto da matemática escolar, seja diretamente relacionado ao aluno ou relacionado à formação do professor

Reconhecemos a importância da prova tanto na Matemática Profissional quanto na Matemática Escolar, porém defendemos a idéia de que elas devem ter objetivos diferentes dentro de cada contexto.

Baseando-se nos dados de nossa pesquisa e no diálogo com outros autores que escrevem sobre o assunto, pudemos concluir que existe uma dificuldade geral com relação à prova na Matemática Escolar, levando-nos a deduzir que se fazem necessárias mudanças na sua concepção, função e em sua abordagem didático-pedagógica para que ela se incorpore no dia-a-dia escolar.

Nossas idéias apoiaram-se na concepção de que não é possível ter a prova somente como um processo de memorização, valorizando-a como um produto, mas sim, como um processo que é construído pela mobilização de conhecimentos matemáticos do aprendiz, seja ele professor, futuro professor ou aluno escolar. Além disso, é necessário cultivar o pensamento argumentativo onde o "Por quê?" não seja visto como uma pergunta capciosa de um professor que quer prejudicar o aluno.

5.2 Sobre os processos de provas e validações em atividades de natureza investigativa, em diferentes mídias, mais especificamente, na utilização de softwares de Geometria Dinâmica

Para que esse processo de mudança aconteça é necessário colocar o aprendiz em movimento e para isso, a prova deve assumir outras funções além daquela de validar uma proposição ou um teorema. O aprendiz poderá confrontar-se com tarefas que o envolva, estimulando-o a explorar, experimentar, fazer conjecturas e testá-las, estruturar seu raciocínio de forma lógica e comunicá-lo a seus pares.

Encontramos estes recursos nas tarefas exploratório-investigativas, onde a prova tem o papel de verificar a verdade de uma proposição e age como meio de explicação, de comunicação e de descoberta (DE VILLIERS, 1990, 2001).

Essas tarefas além de trazerem novas perspectivas para o trabalho dos alunos, ainda permitem ao professor detectar falhas conceituais, pois por serem de estrutura aberta e valorizarem os métodos e as estratégias usadas, dão “fala” e “ouvidos” ao processo de aprendizagem.

Ao serem feitas em grupos e/ou subgrupos, aquele que participa reconhece nos integrantes do grupo, os pares a quem deve convencer de seu ponto de vista, por meio de uma argumentação estruturada e lógica, e também, se coloca na outra condição quando ouve e analisa as argumentações dos outros membros.

Dessa forma, a Matemática Escolar aproxima-se da Matemática Profissional quebrando a sensação de que os conteúdos apresentados na Matemática Escolar foram concebidos de forma “milagrosa” por mentes privilegiadas e não por trabalho exaustivo e sistemático.

Para o desenvolvimento desse trabalho, os professores podem contar com as diversas mídias que dentro desta metodologia de trabalho apóiam a estruturação do raciocínio dedutivo por meio da experimentação, exploração e registro.

Sejam elas régua, compasso, papel, palitos, dados ou programas de Geometria Dinâmica, a principal função delas é auxiliar o entendimento de determinado conteúdo sob a coordenação do professor. Dessa forma, entendemos que o foco não é a mídia, mas o processo de aprendizagem e que muitas vezes pode ser enriquecido pela associação de mais de uma mídia para que a tarefa proposta alcance seu objetivo.

Dentro desse contexto, reconhecemos que os programas de Geometria Dinâmica pela sua característica de permitir a manipulação de pontos na construção, mantendo a relação matemática entre os elementos relacionados a estes pontos, é um instrumento de grande potencial para a busca de regularidades e identificação de relações lógicas.

5.3 Sobre as contribuições para professores e futuros professores de um trabalho de dimensão colaborativa que visa os processos de provas e validações em Geometria

Apesar de termos literatura e pesquisa sobre as atividades exploratório-investigativas dentro do universo da Educação Matemática, esta não é uma forma muito comum de trabalho em sala de aula de formação inicial do professor de Matemática. Assim, reconhecemos que os grupos de estudo, pesquisa e trabalho, como o GRUCOGEO, são ambientes propícios para professores e futuros professores encontrarem uma complementação a essa formação. A diversidade de conhecimentos, experiências, pontos de vistas, recursos, dúvidas e necessidades encontradas nesses grupos potencializam-no como um ambiente de aprendizagem coletiva.

Dessa forma, entendemos que a associação das atividades exploratório-investigativas a grupos de trabalho, estudo e pesquisa cria um ambiente fértil para o trabalho com provas no contexto da matemática escolar, acrescentando-se ainda as diversas mídias como recursos didáticos de apoio ao trabalho docente, principalmente a informática com o uso dos programas de Geometria Dinâmica. Devemos ressaltar que durante nossa pesquisa tivemos a oportunidade de observar o que já era vinculado nas pesquisas com *softwares* desta categoria: a mudança da postura do professor é fundamental para que se tenha sucesso no uso desse recurso.

Essa mudança não é apenas em relação ao uso do programa, ela é principalmente conceitual e conceptual, ou seja, além de reconhecer a necessidade de aprofundar seu conhecimento nos conceitos matemáticos, mais especificamente geométricos, é preciso que o professor reflita sobre sua forma de conceber aprendizagem, ensino, matemática e a relação de sua matéria com o contexto social, histórico e cultural.

5.4 Sobre as contribuições para minhas mudanças

Chegar ao final desta escrita ajuda-nos a perceber o tamanho da mudança ocorrida. O processo de formar-se pesquisador está longe de ser finalizado, se é que algum dia ele se finalizará. As concepções que trouxemos por tantos anos, vez por outra, reaparecem em nossas análises, mostrando-nos o quanto o tempo de nossa preparação foi pequeno para tantas mudanças. A aproximação com os pares de nossa comunidade acadêmica é fundamental para manter o interesse pela pesquisa e pelas mudanças que se fazem necessárias no contexto educacional, superando a rotina diária que pode transformar-se em fator de acomodação.

Se esta pesquisa respondeu as questões iniciais que me interessavam, ela trouxe com seu término uma quantidade maior de outras questões. Como trazer uma mudança efetiva para a sala de aula de Geometria dentro do atual contexto educacional? Qual o nosso papel de professores-formadores dentro desta realidade? Como agir no meu contexto escolar tentando promover essas mudanças? Se estas questões parecem poucas ou pequenas, para mim, são desafios que espero que me motivem por muito tempo.

A experiência vivida nessa pesquisa mudou ainda minha forma de perceber a importância das mídias, incluído a informática. Antes eu acreditava que esta seria a mais importante e com ela os alunos ou professores poderiam mudar a situação atual do ensino. Hoje, não diminuo a sua importância, mas deposito nas outras mídias semelhante valor, acreditando ainda que em cada uma delas encontramos características que facilitam a criação de imagens mentais, favorecendo a construção do conhecimento matemático. Como resultado desta reflexão, oferecemos uma oficina onde utilizamos dobraduras, cortes e geometria dinâmica com resultados animadores.

O convívio de quase dois anos com o GRUCOGEO me sensibilizou para a criação de um grupo de estudos semelhante em minha cidade. Pudemos observar como a valorização do saber e da prática docente é importante para o contexto escolar e seus frutos podem alcançar outras regiões. As experiências vividas no grupo, e os textos produzidos a partir destas experiências e dos relatos de experiência de seus membros, transformaram-se em livros[52], artigos e pesquisas.

Correndo o risco de cair em lugar comum podemos dizer que o caminho se faz no caminhar. As possibilidades do que temos a fazer, só é possível de ser vislumbrada porque já nos colocamos em movimento.

[52] NACARATO, Adair Mendes; GOMES, GOMES, Adriana Aparecida Molina; GRANDO, Célia Regina (Orgs). EXPERIÊNCIAS COM GEOMETRIA NA ESCOLA BÁSICA narrativas de professores em (trans)formação. São Carlos: Pedro & João Editores, 2008.

GRANDO, Regina Célia; TORICELLI, Luana; NACARATO, Adair Mendes. DE PROFESSORA PARA PROFESSORA conversas sobre iniciAção matemática. São Carlos: Pedro & João Editores, 2008.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ABRANTES, Paulo. Investigações em geometria na sala de aula. In: VELOSO, E., FONSECA, H., PONTE, J. P., ABRANTES, P. (Orgs.) **Ensino da Geometria no virar do milênio.** Lisboa: DEFCUL, 1999.

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lurdes; OLIVEIRA, Isolina. **A Matemática na Educação Básica.** Portugal, Lisboa. Ministério da Educação. Departamento de Educação Básica, 1999.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem.** ANPED, 2007.

ANDRADE, José Antônio Araújo; NACARATO, Adair Mendes. **Tendências didático-pedagógicas para o ensino de Geometria**. ANPED: 27 reunião anual, 2005. Disponível em <http://www.anped.org.br/reunioes/27/gt19/t197.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2007.

ANDRÉ. Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional.** Brasília: Líber Livro, 2005.

BARBOSA, Kelly Cristina B. A.; SILVA, Henrique Gomes da; BARROS, Carina Silva. Uma atividade... diferentes olhares... aprendizagens (com)partilhadas. In: NACARATO, Adair Mendes (Org.) ; GOMES, Adriana Aparecida. Molina (Org.) ; GRANDO, Regina Célia (Org.). **Experiências com geometria na escola básica: narrativas de professores em (trans)formação.** São Carlos: Pedro e João Editores, 2008, p.223-239.

BOAVIDA, Ana Maria; PONTE, João Pedro da. Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional.** Lisboa: APM, 2002, p. 43-55.

BORBA, Marcelo C.; PENTEADO, Miriam G. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001.

BORBA, Marcelo C.; Villarreal, Mónica E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.** New York: Springer, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio.** Brasília: MEC/SEMTEC, 1999. 4v.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. SEF. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental.** Brasília, 1998.

BRASIL. MEC. SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília, 2000. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 20 dez. 2007.

BRAUMANN, Carlos A. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: SPCE. **Actividades de investigação na aprendizagem da**

Matemática e na formação de professores. Coimbra, 2002. Disponível em <http://www.spce.org.pt/sem/02braumann.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2007.

CARDIM, Viviane Rocha Costa. **Saberes sobre a docência em Geometria na formação inicial de professores de Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade São Francisco, Itatiba, 2008.

CARDIM, Viviane Rocha Costa; GRANDO, Regina Célia. Saberes Sobre a Docência em Geometria na Formação Inicial de Professores de Matemática. In: **VI Encontro de Pós-Garduação, 2006, Itatiba. Comunidade e Ciência - Intersecção necessária, inclusão promovida**. Itatiba: 2006.

CASTRO, Juliana Facanali. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) – FE – UNICAMP, Campinas, 2004.

CERQUEIRA, Jonir Bechara; FERREIRA, Elise de Melo Borba. Recursos didáticos na educação especial. In: **Revista Benjamin Constant**, ed. 05, Dez/1996. Disponível em <http://200.156.28.7/Nucleus/?catid=4&itemid=47>. Acesso em: 11 out. 2007.

CHARLOT, Bernard Charlot. **Da relação com o saber: elementos para uma teoria.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

CHARLOT, Bernard Charlot. **Relação com o Saber, Formação dos Professores e Globalização.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

CRESCENTI, Eliane Portaloni. **Os professores de Matemática e Geometria: opiniões sobre a área e o seu ensino.** Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A Experiência Matemática.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DE VILLIERS, Michael. de. **Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad.** Educação e Matemática, nº 62 p.31-36, mar/abr, 2001. Disponível em <http://www.apm.pt/apm/revista/educ63/Para-este-numero.pdf >. Acesso em: 24 jul. 2007.

DE VILLIERS, Michael. de. **The role and function of proof in Mathematics.** Pythagoras, n. 24, p. 17-24, 1990.

DIC MICHAELIS. **Dicionário Michaelis.** 2001. CD-ROM.

DUARTE, Aparecida Rodrigues Silva; SILVA, Maria Célia Leme da. Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, PR, v. 1, n. 1, p. 87-93, jan.-jun 2006.

FERNANDO, Domingos; FONSECA, Lina. Argumentação e Demonstração no Contexto da Formação Inicial de Professores. In: **A Matemática na formação do professor**. Portugal: SPCE, 2003. Disponível em <http://www.spce.org.pt/sem/03Domingos.pdf>. Acesso em: 22 dez. 2007.

FIORENTINI, Dario. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando Luís Pereira; CRISTOVÃO, Eliane Matesco. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.** Porto: 2005. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Acesso em: 20 jan. 2008.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

FONSECA, H., BRUNHEIRA, L. & PONTE, J. P. (1999) As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. Actas do ProfMat 99 (pp. 91-101). Lisboa: APM.

GALVÃO, Izabel; DANTAS, Heloysa. O lugar das interações sociais e das emoções na experiência de Jean Itard com Victor do Aveyron. In: BANKS-LEITE, Luci; GALVÃO, Izabel (orgs.). **A educação de um selvagem: as experiências pedagógicas de Jean Itard.** São Paulo : Cortez, 2000.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. **Bolema**, ano 15, nº 18 . Rio Claro: UNESP, 2002. p. 91 - 99.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. **Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: IGCE-UNESP, 1995.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: **Anais do Simpósio Brasileiro de Informática na Educação.** 1996, p. 1-13.

GÓES, Maria Cecília Rafael. A natureza social do desenvolvimento psicológico. **Cadernos CEDES.** Campinas : Papirus, nº 24, p. 17-24, 1991.

GRANDO, Regina Célia *et al*. **Os modos matemáticos de pensar que emergem de tarefas investigativas em um contexto de formação docente.** Texto para o seminário luso-brasileiro, Portugal, Lisboa, julho/2005.

GRANDO, Regina Celia (Org.) ; TORICELLI, Luana (Org.) ; NACARATO, Adair Mendes (Org.) . **De professora para professora: conversas sobre iniciação matemática.** São Carlos: Pedro e João Editores, 2008.

GROTHMANN, René. Home page Z.u.L, C.a.R. Internatinal Version. Disponível em <http://www.z-u-l.de>. Acesso em: 10 abr. 2007.

HANNA, Gila. BARBEAU, Ed. What is proof? In: Baigrie, B. (Ed.). **History of Modern Science and Mathematics. (4 volumes).** New York: Charles Scribner's Sons, 2002, Vol. 1, 36-48.

HANNA, Gila. Proof and its Classroom Role: A Survey. In: **Annual Conference on Mathematics Education**. Portugal, Fundão, 2000. Disponível em <http://www.spce.org.pt/sem/GH.pdf >. Acesso em: 30 out. 2007.

HOUAIS. **Dicionário Houais da língua portuguesa.** Disponível em <http://houaiss.uol.com.br/>. Acesso em: 12 Out. 2007.

JAMELLI, Sueli Maffei. **Abordagens no ensino da prova e a argumentação na Matemática Escolar:** uma análise de uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado Profissional) - Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

JARAMILLO, Diana; FREITAS, Maria Teresa Menezes; NACARATO, Adair Mendes. Diversos caminhos de formação: apontando para outra cultura profissional do professor que ensina Matemática. In: NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Espasadin. **Escrituras e leituras na Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005, p.163-190.

KNIJNIK, Gelsa ; WANDERER, Fernanda . Educação Matemática e oralidade: um estudo sobre a cultura de jovens e adultos camponeses. In: IX EGEM - Encontro Gaúcho de Educação, 2006. **Anais do IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática**. Caxias do Sul : Editora da Universidade de Caxias do Sul, 2006.

LEVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.** Rio de Janeiro: Editora 34, 1997.

LOPES, Antônio José. Erros: mentiras que parecem verdades ou verdades que parecem mentiras. **Cadernos de Educação Matemática - CEM,** S. Paulo, ano 2, n. 2, 1990.

LOPES, Antonio José. Gestão de interações e produção de conhecimento matemático em um ambiente de inspiração lakatosiana. In: **Educação Matemática em Revista**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 6, n. 7, 1999. p. 19-26.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides.** São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MOREIRA, Plinio C. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica.** Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação - UFMG, 2004.

MOREIRA, Plínio; DAVID. M. Manuela. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké ,v.11, n.19**, p. 57-80, 2003.

NACARATO, Adair M; PASSOS, C. L.B. **A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectivada prática pedagógica e da formação de professores.** São Carlos: EdUFSCar, 2003.

NACARATO, Adair Mendes. **Professores e licenciandos produzindo saberes em Geometria: trabalho colaborativo na universidade**. Projeto de pesquisa. 2005.

NACARATO, Adair Mendes *et al*. Professores e futuros professores compartilhando aprendizagens: dimensões colaborativas em processos de formação. In: NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Org.). **A formação do professor que ensina matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p.197-212.

NACARATO, Adair Mendes (Org.) ; GOMES, Adriana Aparecida. Molina (Org.) ; GRANDO, Regina Célia (Org.). **Experiências com geometria na escola básica: narrativas de professores em (trans)formação.** São Carlos: Pedro e João Editores, 2008.

NASSER, Lílian; TINOCO, Lúcia A. A. **Argumentação e provas no ensino de Matemática.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática – Projeto Fundão – UFRJ, 2001.

NCTM. **Standards for School Mathematics: Geometry**. Disponível em <http://standards.nctm.org/document/chapter3/geom.htm>. Acesso em: 25 jul. 2007.

OLIVEIRA, Fátima Inês Wolf de, BIZ, Vanessa Aparecida, FREIRE, Maisa. Processo. de inclusão de alunos deficientes visuais na rede regular de ensino: confecção e utilização de recursos didáticos adaptados. In: **Revista ciência e extensão, volume 1, suplemento, 2004, p.445-454**. Disponível em <http://www.unesp.br/proex/repositorio/revista/rev_cien_ext.htm>. Acesso em: 11 out. 2007.

OLIVEIRA, Hélia Margarida *et al*. Os professores e as actividades de investigação. In: ABRANTES, Paulo *et al* (Orgs.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo.** Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p. 97-110.

OLIVEIRA, Hélia Margarida; SEGURADO, Maria Irene; PONTE, João Pedro da. **Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática.** Actas do ProfMat96, Lisboa: APM, 1996 (p. 207-213).

OLIVEIRA, Roberto Cardoso de. Olhar, ouvir e escrever. In: **Aula inaugural**, IFCH/UNICAMP, p. 5-27, abril, 1994.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender matemática.** São Paulo: Autêntica, 2006.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. **Zetetiké. Vol. 4. N. 06**. Unicamp. Campinas. 1996.

PAIS, Luiz Carlos. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria.** ANPED, 2000.

PAMFILOS, Paris. **Paris Pamfilos home page on Geometry, Philosophy and programming**. 2004. Disponível em <http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/>. Acesso em: 10 abr. 2007.

PEREZ, Geraldo; COSTA, Gilvan L. Machado; VIEL, Silvia Regina. Desenvolvimento Profissional e Prática Reflexiva. In: **Bolema**, n. 17, p. 52-113. UNESP: Rio Claro, 2002.

PIETROPAOLO, Ruy C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), 2005, 249p. São Paulo: PUC.

PONTE, João Pedro da, et al. Investigando as aulas de investigações matemáticas. In . ABRANTES, Paulo et al (Orgs.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p.133-151.

PONTE, João Pedro da; BROCADO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PONTE, João Pedro da. Educação matemática de hoje e de sempre: Comentário ao livro “Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas” In: **Bolema**, n. 17, p. 74-113. UNESP: Rio Claro, 2002.

PONTE, J. Pedro. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. In: **Investigar em Educação.** Portugal: 2003.

PONTE, João Pedro da, *et al*. A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. In: **Revista Portuguesa de Educação**, vol.20, n.2, p.39-74. ISSN 0871-9187. Portugal: 2007, Disponível em <http://www.scielo.oces.mctes.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0871-91872007000200003&lng=es&nrm=iso>. Acesso em: 04 fev. 2008.

RIBEIRO, Deolinda. **As interacções na actividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no 1.º ciclo do ensino básico.** Disponível em < www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Deolinda.doc>. Acesso em: 26 jan. 2008.

SANTOS, Sandra Augusta. Exploração da linguagem escrita nas aulas de Matemática. IN: NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Espadasandin. **Escrituras e leituras na Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SERRALHEIRO, Tatiana Dias. . **Formação de professores: conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstrações.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), 2007, 147p. São Paulo: PUC.

SERRÃO, Alberto Nunes. **Geometria no plano.** Rio de Janeiro: AO Livros Técnicos, 1968

SILVA, Elaine Quintino da ; MOREIRA, D. A. ; SANTOS JUNIOR, J. B. . Computadores no Ensino - Uma Abordagem Voltada para o Suporte aos professores no Desenvolvimento de Atividades Didáticas. In: XI Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2000, Maceió. **Anais do XI Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, 2000. v. 1. p. 81-88.

SILVA, Albano, et al. O currículo de matemática e as actividades de investigação. In . ABRANTES, Paulo et al (Orgs.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p.69-85.

TAYLOR, R. **The computer in education: Tutor, tool and tutee**. New York:Teachers College Press, 1980.

VALENTE, José Armando. Diferentes Usos do Computador na Educação. In: VALENTE, José Armando (Org.); **Computadores e Conhecimento: repensando a educação** (pp.1-23). Campinas, SP: Gráfica da UNICAMP, 1995.

VARANDAS, José Manuel; NUNES, Paula. Actividades de investigação: Uma experiência no 10º ano. In ABRANTES, Paulo et al (Orgs). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p. 169-173.

VILELA, Denise Silva. Matemáticas nos usos e jogos de linguagem: ampliando concepções na Educação Matemática. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Campinas – UNICAMP, Campinas, 2007.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch. O instrumento e o símbolo no desenvolvimento da criança. In: **A formação social da mente.** (Org.) Michael Cole *et al*. Tradução de José Cipolla Neto *et al*. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

ZULATTO, Rúbia Barcelos Amaral. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica:** suas características e perspectivas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, campus Rio Claro, São Paulo, 2002.

Anexo I

CRONOGRAMA DOS ENCONTROS	
Data do Encontro	**Temática(s)**
06/03/2006	Apresentações, Discussões sobre a participação dos alunos da Licenciatura em matemática no Grupo e Leitura e discussão do artigo Compartilhando saberes em Geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos.
13/03/2006	**Retomada de algumas reflexões sobre a leitura do encontro anterior. Proposta de Tarefa exploratória investigativa (construção de Apolônio), solução na mídia lápis e papel.**
20/03/2006	Continuação da atividade de Apolônio.
03/04/2006	Discussão sobre a divulgação do trabalho do grupo em congressos com propostas de mini-cursos e relatos de experiência. Socialização das construções da atividade de Apolônio.(lápis e papel e outra com dobradura)
10/04/2006	Demonstração e conclusões de outros grupos sobre a construção de Apolônio. Algumas reflexões sobre o material utilizado e suas potencialidades para determinadas construções. Foi solicitada a descrição desta tarefa pelos grupos (registro reflexivo).
17/04/2006	Leitura e reflexão sobre alguns recortes dos registros reflexivos produzidos pelos grupos no encontro passado. Discussão sobre os sólidos de Platão. Leitura e discussão sobre o texto Argumentações e Provas no ensino de Matemática.
24/04/2006	Reflexões sobre Demonstrações como forma de validação.
08/05/2006	Construção da atividade de Apolônio no Cabri.
22/05/2006	Retomar a construção da atividade do Apolônio (variação na construção proposta apresentada pelas professoras)
29/05/2006	**Levantamento de algumas propostas de atividades para serem aplicadas com os alunos, discussões sobre a aceitação destas atividades, possíveis dificuldades com instrumentos régua e compasso e com o software. Discussão sobre as potencialidades do Cabri nas construções da atividade do Apolônio. Foram propostas atividades: desigualdade triangular, relações trigonométricas e relação perímetro e área.**
05/06/2006	Apresentação de uma construção feita no Cabri, por um aluno da pós-graduação, para trabalhar com a desigualdade triangular. Levantamento de hipóteses quanto esta relação, discussão sobre as potencialidades deste tipo de aplicação.
12/06/2006	Aplicação de uma das tarefas propostas no encontro do dia 29/05 para ser realizada no grupo. Discussões sobre Demonstração e validação.
26/06/2006	Preparação de atividades no Cabri.
07/08/2006	**Socialização da atividade aplicada com alunos da rede municipal, pela sua professora, membro do grupo.**

	Discussões sobre as dificuldades dos alunos em trabalhar com área e perímetro.
14/08/2006	**Socialização da atividade aplicada com alunos da rede municipal, por seu professor, membro do grupo. Discussões quanto a socialização dos alunos, limitações administrativas para o uso de laboratório de informática da escola, as possibilidades do software. Profª propõe aplicação para outra turma.**
21/08/2006	Discussões sobre a desigualdade triangular, protótipos, comparação de instrumentos como palitinhos e o software Cabri.
28/08/2006	**Foi proposta uma tarefa investigativa para se trabalhar volume e área. (uso de malha quadriculada)**
04/09/2006	**Oficina com o CaR: Apresentação do Software CaR, realização de algumas atividades para exploração da ferramenta.**
11/09/2006	**Continuação da Oficina com o CaR, realização de atividades no software.**
18/09/2006 **25/09/2006**	**Proposta de seqüência de tarefas, usando o programa CaR, com alunos da rede pública. Discussão quanto à adição das medidas dos ângulos internos do triângulo e a viabilidade da solicitação de registros para alunos.**
27/09/2006	Aplicação de atividade para alunos da rede pública, na universidade: adição das medidas dos ângulos internos e externos. Professor Paulo
02/10/2006	Aplicação de tarefas para alunos da rede pública da professora Olgas, na universidade: Adição das medidas dos ângulos internos.
23/10/2006	Discussão das Vídeos-gravações da Oficina (soma dos ângulos-internos) discutida em no encontro anterior. Professor Paulo.
30/10/2006	Discussões sobre a Jornada em Educação que aconteceu na Universidade; continuação da reflexão sobre o vídeo apresentado no encontro anterior.
06/11/2006	Programação para a produção textos narrativos sobre o semestre pelo grupo; discussão sobre a aplicação da atividade para os alunos da rede em 02/10/2006.
05/03/2007	Apresentações. Definições sobre o foco do trabalho no semestre: atividades investigativas com Geometria Espacial. Classificações de poliedros.
12/03/2007	**Sólidos de Platão. Prova da existência de apenas 5 sólidos que satisfazem as condições para serem sólidos de Platão.**
19/03/2007	**Atividade investigativa com os sólidos truncados. Experimentações com desenhos.**
26/03/2007	Produção coletiva de uma tabela síntese sobre as secções nos sólidos de Platão, ao meio e por 1/3. Experimentações com modelos de papel e produção de imagem mental. Experimentações com massa de modelar refutam os dados obtidos na tabela do encontro anterior. Novas interpretações para o problema.

02/04/2007	Fórum Paulista de Formação de Professores de Matemática. USF/ SBEM paulista.
09/04/2007	Produção de uma nova tabela. Incômodos com relação à "perfeição" nos cortes realizados. Necessidade de outras mídias.
16/04/2007	Produção dos sólidos em placas de isopor na tentativa de melhor visualização das secções. Novos problemas surgem....Como construir um tetraedro regular a partir de um bloco de isopor?
23/04/2007	Exploração da relação de Euler para os sólidos truncados. Produção de novas tabelas.
30/04/2007	Generalização dos dados da tabela. Produção de sínteses. Pesquisa sobre a mídia computacional que possibilitasse melhor visualizar as secções..
07/05/2007	Familiarização dos participantes do GRUCOGEO com o software Cabri 3D.
14/05/2007	Exploração da atividade investigativa dos sólidos platônicos truncados no Cabri 3D. Visualização e verificação dos resultados da tabela produzida anteriormente para as secções ao meio.
21/05/2007	Tentativas de estabelecer as secções em 1/3. Cálculos por Teorema de Tales; construções no Cabri 3D. Visualização e verificação de resultados.
28/05/2007	Tentativas de provas e validações dos resultados obtidos com os sólidos truncados na tela do computador.
04/06/2007	Tentativas de provas e validações dos resultados obtidos com os sólidos truncados na tela do computador. Exploração de diferentes formas de produção de sólidos no Cabri 3D.
11/06/2007	Pesquisa sobre demonstrações formais a cerca do problema investigado. Dificuldades de compreensão da demonstração formal (exigência de Matemática de Ensino Superior, como Topologia).
18/06/2007	Leitura e discussão do texto de De Villiers sobre as funções das provas e demonstrações na Matemática escolar.
25/06/2007	Avaliação do semestre. Produção de narrativas pelos participantes do processo vivenciado nos 2 anos de projeto.

Quadro 3.1 Atividades desenvolvidas pelo GRUCOGEO no período de Março/2006 a Junho/2007. Fonte: Relatório final de pesquisa relativa ao processo MCT/CNPq nº 473697/04-1.

Anexo II

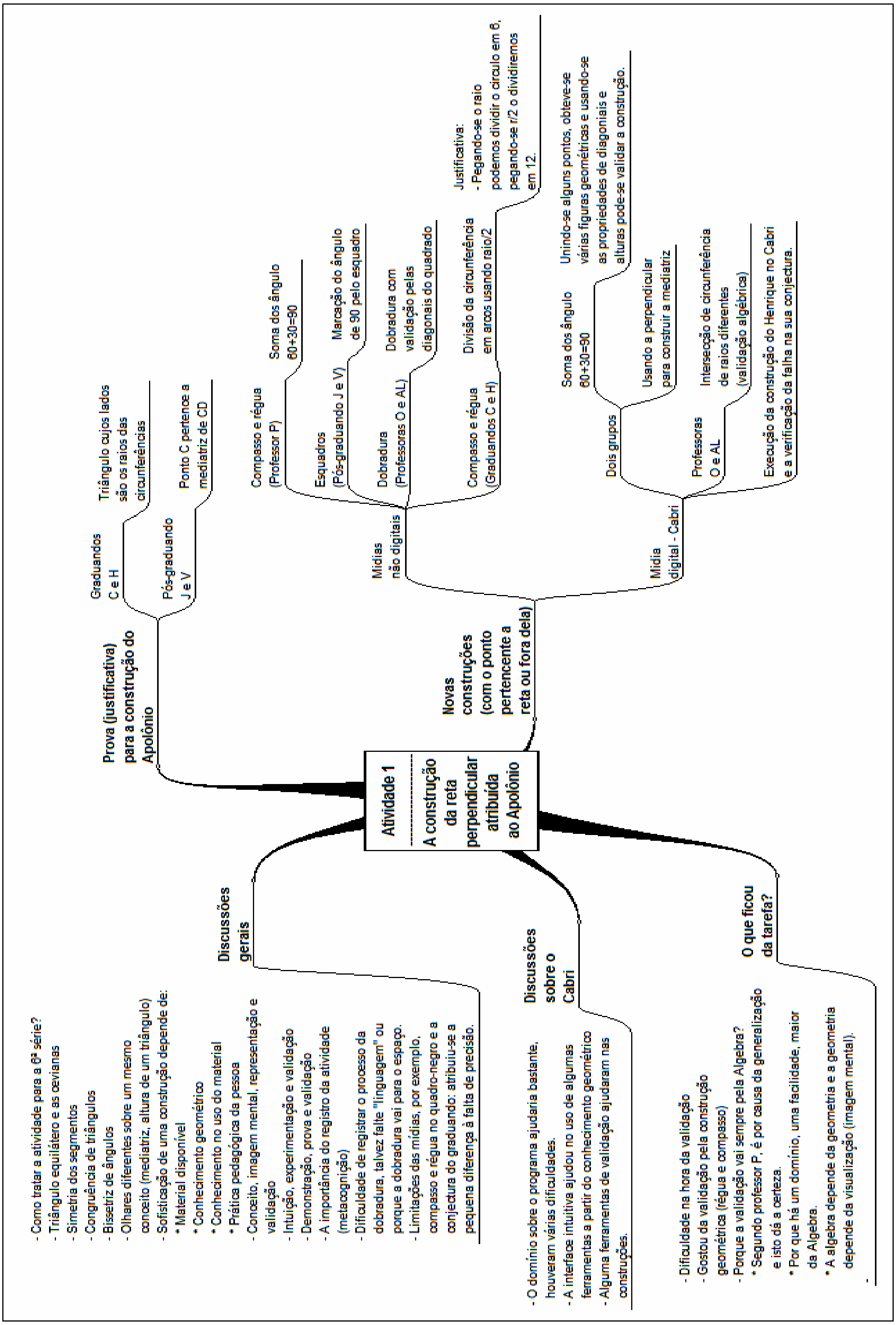


Figura A1: estrutura com os dados das reuniões sobre a Atividade 1

Anexo II

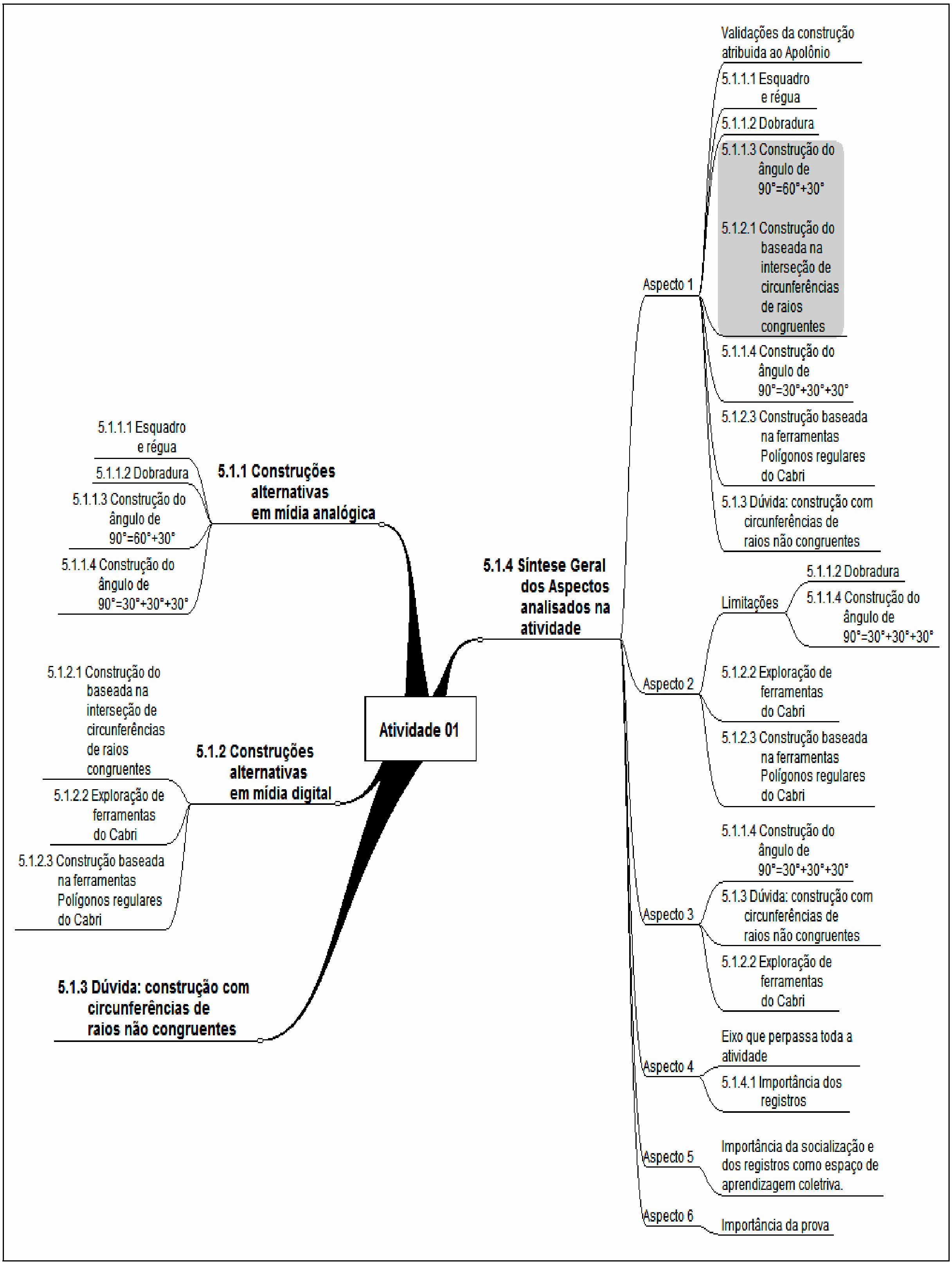


Figura A2: reorganização dos dados da Atividade 1 a partir dos aspectos relevante

Anexo III

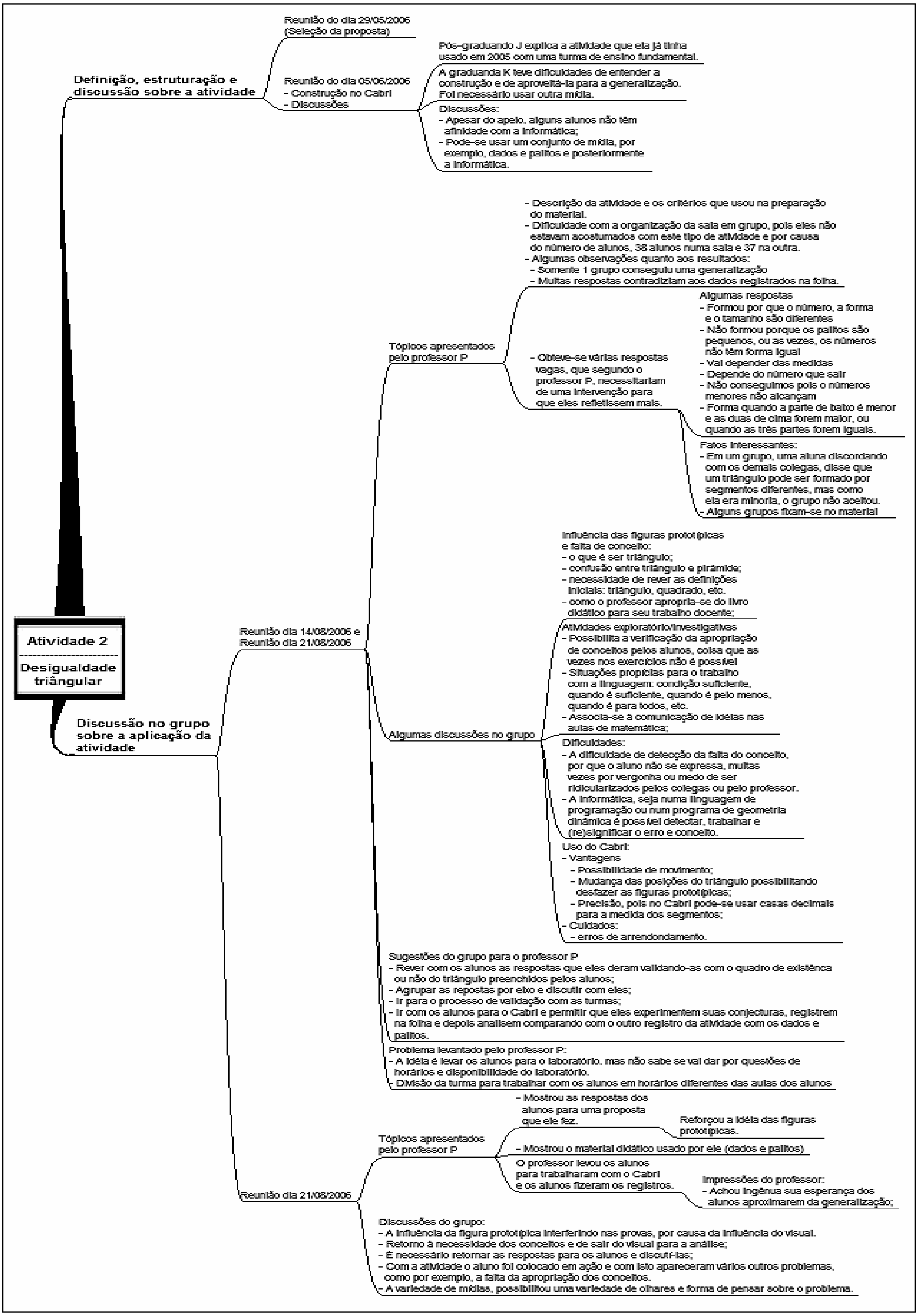


Figura A3: estrutura com os dados das reuniões sobre a Atividade 2

Anexo IV

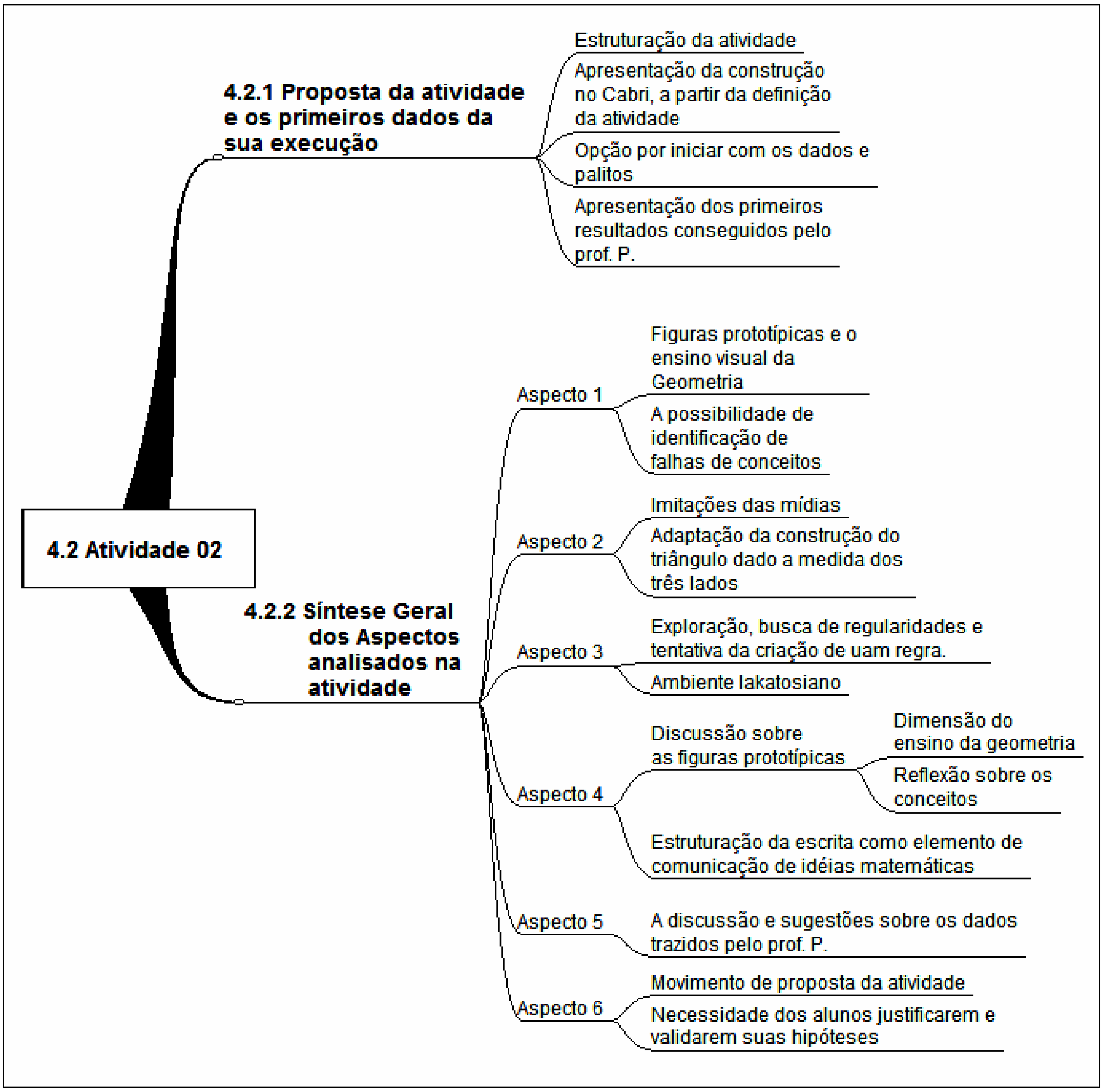


Figura A4: reorganização dos dados da Atividade 2 a partir dos aspectos relevante

Anexo V

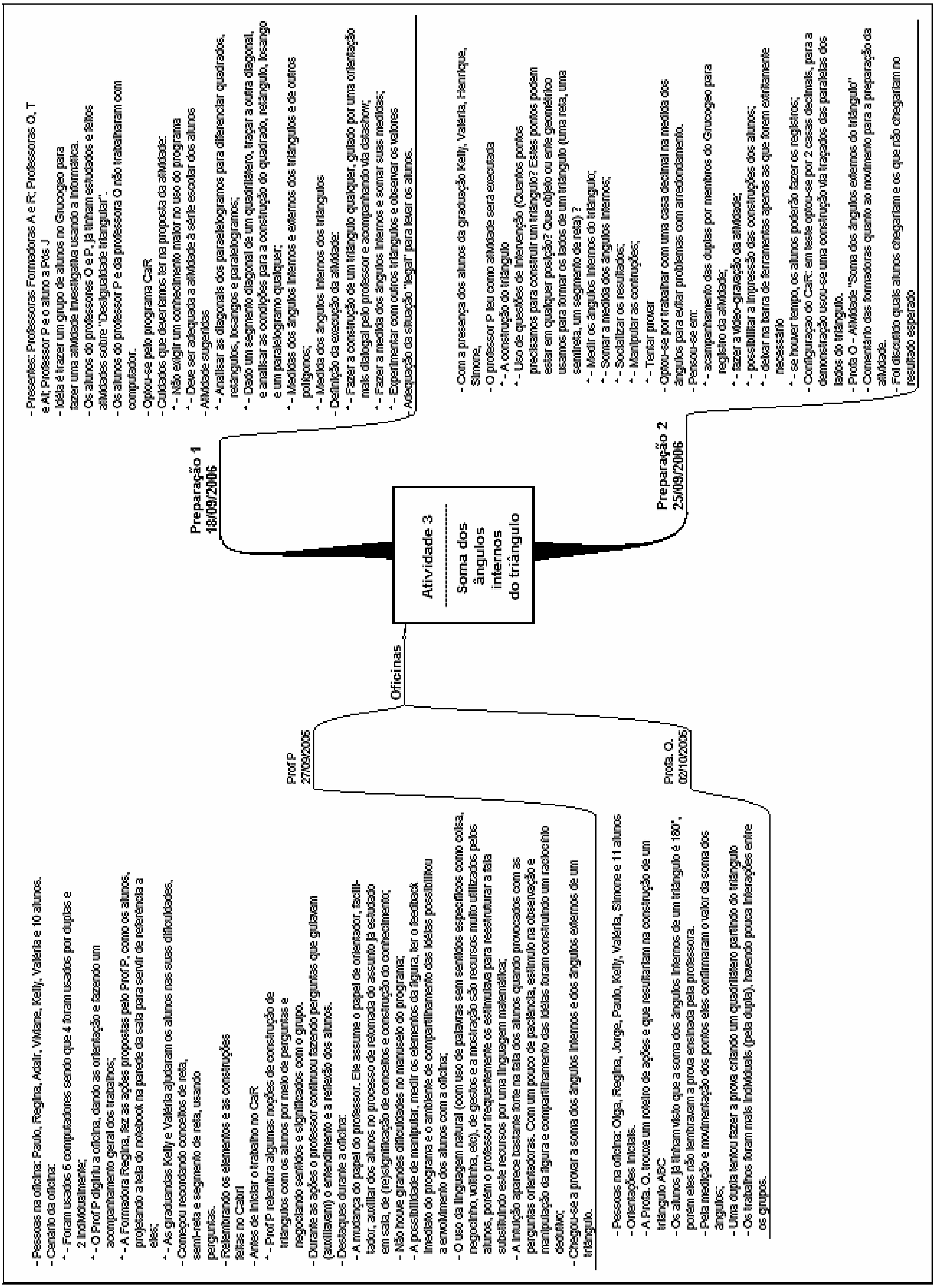


Figura A5: estrutura com os dados das reuniões sobre a Atividade 3

Anexo VI

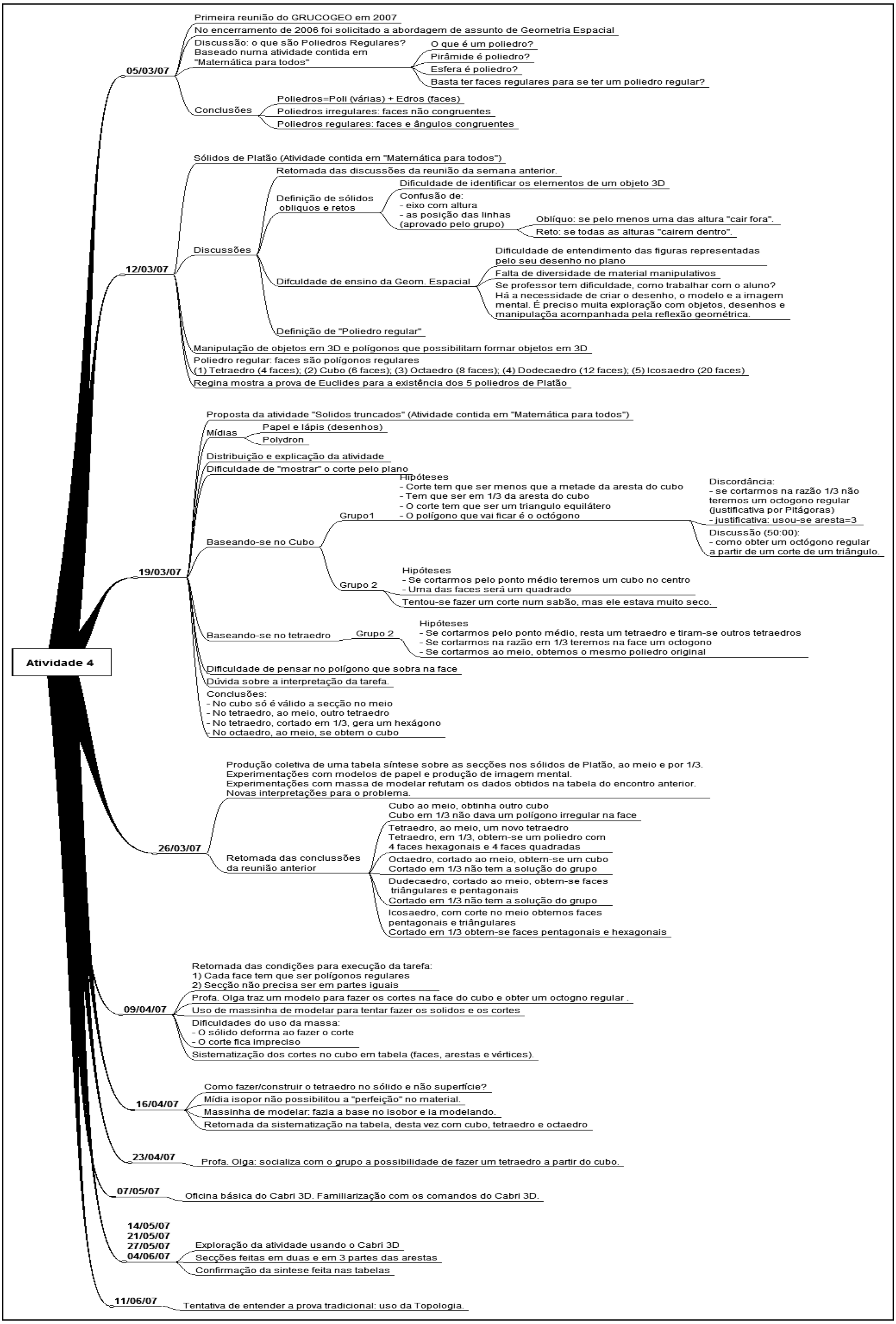


Figura A6: estrutura com os dados das reuniões sobre a Atividade 4