UNIVERSIDADE SÃO FRANCISCO
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação

JEFFERSON TADEU DE GODOI PEREIRA

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: SIGNIFICAÇÕES PRODUZIDAS POR ALUNOS DO SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Itatiba
2019

JEFFERSON TADEU DE GODOI PEREIRA – R.A. 002201701057

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: SIGNIFICAÇÕES PRODUZIDAS POR ALUNOS DO SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco, como requisito parcial para a obtenção de título de Mestre em Educação.

Linha de Pesquisa: Educação, Sociedade e Processos Formativos.

Orientadora: Prof.ª Dra. Adair Mendes Nacarato

Itatiba
2019

371.399.512 Pereira, Jefferson Tadeu de Godoi.

P492d O desenvolvimento do pensamento algébrico: significações produzidas por alunos do sétimo ano do ensino fundamental / Jefferson Tadeu de Godoi Pereira. – Itatiba, 2019.

178 p.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco.
Orientação de: Adair Mendes Nacarato.

1. Pensamento Algébrico. 2. Material Curricular Oficial. 3. Perspectiva Histórico-Cultural. 4. Pesquisa Educacional. 5. Sala de Aula. 6. Práticas de Ensino. I. Nacarato, Adair Mendes. II. Título.

Sistema de Bibliotecas da Universidade São Francisco - USF
Ficha catalográfica elaborada por: Mayara Cristina Bernardino - CRB-08/9525

Aos profissionais da educação que, diariamente,
lutam por este país.

UNIVERSIDADE SÃO FRANCISCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU
EM EDUCAÇÃO

Jefferson Tadeu de Godoi Pereira defendeu a dissertação "O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: SIGNIFICAÇÕES PRODUZIDAS POR ALUNOS DO SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL" aprovada no Programa de Pós Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco em 22 de fevereiro de 2019 pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Adair Mendes Nacarato
Profa. Dra. Adair Mendes Nacarato
Orientadora e Presidente

Ana Paula de Freitas
Profa. Dra. Ana Paula de Freitas
Examinadora

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro
Examinador

AGRADECIMENTOS

Á Deus pela imensidão de sua presença.

À Universidade São Francisco pelo total apoio ao desenvolvimento dos estudos que aqui se apresentam, sem o qual esta realização não seria possível.

A minha esposa, Renata, e a minha mãe, Maria de Lourdes, que me deram todo o apoio possível para que eu pudesse alcançar mais este objetivo. Por meio delas, pude obter todo o carinho necessário para enfrentar as dificuldades deste processo, assim como a compreensão de minhas ausências durante a história que aqui se narra.

A minha orientadora, Professora Adair Mendes Nacarato, pelo profissionalismo, pela dedicação, pela competência e, acima de tudo, pelo amor à pesquisa. Em suas atitudes, encontrei a compreensão, a sabedoria, o carinho e a inspiração para a produção deste capítulo de minha história. Posso afirmar que esta trajetória se concretiza com grande intensidade de aprendizado.

A meus amigos e companheiros de trabalho da Universidade São Francisco, que sempre me motivaram para o ingresso e a continuidade no Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação.

Às Professoras Daniela Dias dos Anjos, Luzia Bueno, Maria de Fátima Guimarães e Milena Moretto, que contribuíram com seus ensinamentos para a significação dos conhecimentos que aqui se construíram.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação, que se demonstram companheiros nesta trajetória.

Às amigas, Kátia e Íris, com as quais constituí grupo de pesquisa, coordenado pela professora-orientadora deste trabalho, ação que se fez de imensurável valia para a concretização desta pesquisa.

À toda a equipe da escola estadual que foi o cenário de desenvolvimento desta pesquisa. Nessas pessoas, pude encontrar todo o apoio necessário para o progresso destas atividades.

Aos Professores Alessandro Jacques Ribeiro, Ana Paula de Freitas e Kátia Gabriela Moreira pela cuidadosa leitura deste trabalho, assim como pelas contribuições realizadas durante o exame de qualificação.

A meus queridos alunos da turma A, do sétimo ano, do Ensino Fundamental, que participaram desta pesquisa. Sou muito grato pela dedicação de todos.

Se fazemos alguma coisa com alegria as reações emocionais de alegria não significam nada senão que vamos continuar tentando fazer a mesma coisa. Se fazemos algo com repulsa isso significa que no futuro procuraremos por todos os meios interromper essas ocupações. Por outras palavras, o novo momento que as emoções inserem no comportamento consiste inteiramente na regulagem das reações pelo organismo. (VIGOTSKI, 2001b, p. 139)

PEREIRA, J. T. G. **O desenvolvimento do pensamento algébrico**: significações produzidas por alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. 2019. 178 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2019.

RESUMO

Esta pesquisa foi realizada em um sétimo ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública estadual, no município de Bragança Paulista/SP, durante o segundo semestre de 2017. Pautada em uma abordagem qualitativa, foi desenvolvida em uma das salas de aula em que o pesquisador atua como professor. Teve como objetivo investigar os modos de produção de significação do pensamento algébrico produzidos pelos alunos a partir de tarefas retiradas do material curricular oficial do estado de São Paulo. Tem como objetivos específicos: (1) investigar a elaboração do pensamento algébrico, tendo como foco as interações ocorridas entre os sujeitos participantes da sala de aula; (2) analisar os indícios da produção significações a partir do desenvolvimento de tarefas, as quais objetivaram a elaboração de generalizações algébricas, tendo como base a observação de padrões. A presente pesquisa se insere na perspectiva histórico-cultural de Lev S. Vigotski (1991, 1997, 2001, 2009), tomando por base, para a caracterização e a investigação do pensamento algébrico, as produções de Maria L. Blanton (2008, 2011), John Mason (2007), James J. Kaput (2001, 2008), Helen Drury (2007) e Luis Radford (2006, 2009, 2011, 2012, 2013). A produção de dados se deu a partir da videogravação das aulas, das produções escritas dos alunos e do diário de campo do pesquisador. As análises foram desenvolvidas observando o aporte metodológico da microgenética, focando-se nas minúcias do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Encontram-se organizadas em episódios, que foram selecionados entre os dados produzidos, buscando indícios ligados ao desenvolvimento do pensamento algébrico, especialmente pautado na percepção de regularidades, e a constituição de generalizações a partir de sequências simbólicas e/ou numéricas. Esta pesquisa aponta para potencialidades da utilização do material curricular oficial da rede paulista de educação, pautado na organização de uma sala de aula que toma por base a importância da produção de significações, e considera a relevância das interações sociais possíveis no ambiente escolar, sendo este constituído pelo pesquisador. Frisa-se que abordagem utilizada não consta nas orientações do material utilizado na rede estadual paulista. Os resultados apresentam indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico pelos alunos no movimento de uma linguagem natural para a linguagem simbólica, com identificação dos princípios de comunalidade, iconicidade e generalização.

Palavras-chave: Investigação em sala de aula. Perspectiva histórico-cultural. Pensamento algébrico. Material curricular oficial (*São Paulo Faz Escola*).

PEREIRA, J. T. G. **The development of algebraic thought: Meanings produced by students from the 7(seventh) grade.** 2018. 174 p. Dissertation (Master in Education). Universidade São Francisco, Itatiba, São Paulo.

ABSTRACT

This research was done in the seventh grade of Elementary School, on a state public school, in the city of Bragança Paulista, SP, during the second semester in 2017. Lined on a qualitative approach, it was developed in one of the classrooms where the researcher is a teacher. The main purpose was to investigate the production modes of the meaning of algebraic thinking produced by the students through tasks removed from the official curricular material from São Paulo State. It has as specific purpose : 1) investigate the elaboration of algebraic thinking, focusing on the interactions occurred between the participant students in the classroom. 2)analyze the production evidence of meanings according to tasks development, which objectified the elaboration of algebraic generalization, based on patterns observation. This research fits into the perspective historical- cultural historic from Lev S. Vigotski (1991,1997,2001,2009), based on, for the description and the investigation of the algebraic thiking, the productions of Maria L. Blanton (2008,2011), John Mason (2007), James J. Kaput (2001,2002), Helen Drury(2007) and Luis Radford (2006, 2009,2011,2012,2013).The data production happened through video recording of lessons, written production from the students and the researcher's field diary. The analyses were developed observing the microgenetic methodological contribution, focusing on the algebraic thought development of the students. They were organized in parts that were selected between the produced data, searching the clues connected to the algebraic thought development, especially based on the regularity perceptions, and the constitution of generalizations from symbolic sequences/numeric. This research points to the potentiality from the official curricular material from São Paulo's education sector in the organization of a classroom that has as main purpose the meaning productions, and considers the relevance of social interactions present in school places, constituted by the researcher. It emphasizes that the used approach it is not on the material orientation in São Paulo's sector. The results present indications from the algebraic thinking development for the students on the use of a natural tongue for the symbolic language, with identification on the principles of commonality, iconicity and generalization.

Keywords: investigation in the classroom, cultural-historical perspective. Algebraic thinking Official curricular material (São Paulo Faz Escola)

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em nossos dias, a instituição *escola* enfrenta grandes desafios, decorrentes das variadas demandas integradas à atividade escolar. Para mais, essa situação acarreta a necessidade de desenvolver uma intensa discussão sobre as metodologias e as formas de ensino, assim como debates sobre os objetivos de cada segmento de ensino.

Pautado nessas ideias, reflito sobre qual papel a escola precisa desempenhar na formação de seus alunos. É momento de questionar a prática de ensino que toma por base a transmissão de conceitos e sua reprodução de forma mecânica. Tendo isso em vista, apresento uma concepção de ensino que atende às demandas atuais e se constitui a partir de práticas de ensino que buscam a produção de significações, ou seja, que não pretendem transmitir conhecimento, mas sim construir saberes de forma que estes produzam sentido para o discente.

Essas premissas se validam com a teoria-histórico cultural. Ela se materializa com as produções de Lev Vigotski e de seus seguidores. De acordo com essa perspectiva, o conhecimento é produzido a partir das interações sociais, sendo este historicamente construído por meio dos sentidos que cada indivíduo atribui à situação observada.

Mais especificamente, direciono-me às questões sobre o ensino da matemática, disciplina marcada pela aplicação de metodologias que, de certa forma, visam apenas à memorização de algoritmos e a sua consequente repetição, sem que haja a atribuição de significação à ação que se desenvolve. Em especial, ao olhar para o ensino da álgebra, vejo que a repetição de algoritmos e procedimentos durante o processo de ensino se faz muito presente, de modo que o aluno não atribui sentidos aos conteúdos trabalhados.

Pautado nessas questões, construí esta investigação, que se focaliza nas possíveis significações produzidas a partir da investigação da elaboração do pensamento algébrico por estudantes da Educação Básica e se baseia em situações de generalização algébrica. Assim, o *objetivo geral* desta pesquisa é investigar os modos de produção de significação do pensamento algébrico produzidos por alunos de uma turma de sétimo ano do Ensino Fundamental a partir de tarefas retiradas do material curricular oficial do estado de São Paulo.

Como definição de pensamento algébrico, elegemos as produções de Radford (2006). Para o autor, esse tipo de raciocínio ocorre quando objetos são tratados de forma indeterminada, tais como incógnitas, variáveis ou parâmetros. Tais objetos, por meio do desenvolvimento dessa área do pensamento, podem ser tratados de forma analítica, possibilitando a operação com estes, mesmo diante de sua indeterminação.

Como nosso objetivo geral indica, para o desenvolvimento das investigações propostas nesta pesquisa, foi utilizado o material curricular oficial da rede estatual paulista de ensino. Fiz essa escolha porque atuo como professor na rede pública paulista e trabalho com esse material em minhas aulas. Ademais, essa opção se justifica pelos posicionamentos dos docentes integrantes dessa rede sobre o material. Não são raros os momentos em que me deparo com intensas críticas negativas sobre o conteúdo e a aplicabilidade desse material. Essa situação pode ser verificada nos estudos desenvolvidos por Catanzaro (2012), Leite (2014) e Silva (2014), os quais relatam as dificuldades encontradas pelos professores na aplicação dessa proposta de ensino, assim como as críticas destes à elaboração e à implementação do currículo oficial, o qual se consubstanciou na forma dos materiais integrantes do Programa *São Paulo Faz Escola*. .

A partir dessas justificativas, apresento os *objetivos específicos*:

- investigar a elaboração do pensamento algébrico, tendo como foco as interações ocorridas entre os sujeitos participantes da sala de aula;
- analisar os indícios da produção de significações a partir do desenvolvimento de tarefas que objetivem a construção de generalizações algébricas, tendo como base a observação de padrões.

A partir dessas afirmações, *justifica-se* a escolha do objeto de investigação desta pesquisa. A argumentação desta consolida-se por meio das premissas de que só há a construção real do conhecimento quando há a produção de significação por parte do indivíduo aprendiz.

Quanto à *metodologia*, utilizei as concepções da análise microgenética, que considera que a emergência da elaboração conceitual se dá nas minúcias das interações sociais. Para que tal observação pudesse se construir, esta pesquisa usou videogravações, anotações de diário de pesquisa e registros escritos produzidos pelos alunos participantes.

Visando à produção de dados que possibilitem o desenvolvimento de uma leitura com foco na observação dos detalhes dessas interações, a análise microgenética propõe a utilização de episódios[1]. Estes foram selecionados tendo como critério a emergência de conceitos relacionados à significação, à teoria histórico-cultural ou ao pensamento algébrico e a suas especificidades.

[1] Denomina-se por episódio um recorte de momento que retrata uma interação entre alunos ou entre alunos e professor na qual emergem os conceitos do pensamento algébrico. Tais episódios encontram-se organizados em formato de diálogo.

Por acreditar que todos os sujeitos participantes do espaço *sala de aula*, tanto professor como alunos, são importantes e atuantes perante as práticas de ensino e aprendizagem que se instauram na cultura desse ambiente, todas as descrições dos momentos analisados por esta pesquisa serão feitas em primeira pessoa. Dessa forma, assumo minha posição como professor que investiga a própria sala de aula, atuando na duplicidade de papeis: docente e pesquisador.

O presente relatório de pesquisa se organiza em seis capítulos. Eles buscam tecer as devidas ponderações sobre o objeto de pesquisa, buscando apresentar minhas conclusões sobre a temática aqui elegida.

No capítulo 1, apresento um memorial que descreve minha trajetória até aqui. Nomeio os fatos que, historicamente, constituíram-me e continuam a constituir minha história, assim como o objeto de pesquisa que aqui se apresenta. Neste capítulo, também contextualizo o cenário em que esta pesquisa se insere, elencando outras produções científicas que contribuem para a mesma temática.

Já no capítulo 2, exponho as questões metodológicas nas quais se baseiam as práticas investigativas aqui descritas.

No capítulo 3, anuncio o referencial teórico que sustenta as análises e as conclusões apresentadas por este estudo. Discorro tanto sobre a teoria histórico-cultural quanto sobre o pensamento algébrico.

No capítulo 4, revelo as análises sobre o material curricular oficial da rede paulista de ensino. Volto-me, especificamente, à ocorrência de referências ao pensamento algébrico no Ensino Fundamental.

No capítulo 5, evidencio a transcrição dos episódios selecionados. Revelo, ademais, os registros relacionados. Nele também são feitas as respectivas análises dos dados.

No capítulo 6, são apresentadas as considerações finais sobre esta pesquisa. Também sinalizo novos questionamentos para estudos futuros.

1 OS CAMINHOS TRILHADOS ANTERIORMENTE

Neste capítulo pretendo apresentar os caminhos que me conduziram até o presente objeto de pesquisa, no âmbito tanto pessoal como profissional. Diante de tal tarefa, o que desenvolvo em seguida é uma reflexão sobre as histórias que atravessaram meu percurso, as quais me constituem enquanto professor e pesquisador.

Tomando por base as teorias vigotskianas, Cerqueira (2006, p. 29) afirma: "As informações que recebemos presentes no outro, nos espaços externos, acionam nossas estruturas mentais movimentando nosso organismo, corpo, esferas dramáticas e cognitivas, transformando-se em conhecimento que se incorpora em nossos saberes." Assumir uma perspectiva histórico-cultural significa compreender que nós, enquanto indivíduos, formamo-nos a partir dos outros, na interação com o outro. Ou seja, cada indivíduo se faz significante, e nossa história contribui para a formação do que somos e para as formas com que significamos nossas aprendizagens.

A formação profissional do indivíduo carrega consigo representações das experiências que permearam a história vivenciada. Logo, as características que compõem este indivíduo são advindas dessas narrativas. Visto que os processos de constituição pessoal e profissional não se dissociam em momento algum, nestes escritos, tratá-los-ei paralelamente, pois estão imbricados.

Nesse sentido, a produção de um memorial de formação se faz de grande valia, pois, ao produzir tal documento, comporei uma narrativa. E, como mostram Connelly e Clandinin (1995, p. 11),

> [...] a razão principal para o uso da narrativa na investigação educativa é que nós seres humanos somos organismos contadores de histórias, organismos que, individual e socialmente, vivemos vidas relatadas. O estudo da narrativa, portanto, é o estudo da forma em que os seres humanos experimentam o mundo. Dessa ideia geral se deriva a tese de que a educação é a construção e a reconstrução das histórias pessoais e sociais, tanto os professores como os alunos são contadores de histórias e também personagens nas histórias dos outros e das suas próprias.

Produzir uma narrativa sobre os caminhos que levaram a minha constituição como pesquisador faz com que as experiências que me encaminharam até aqui se materializem nas formas do olhar de meu próprio detentor. Com isso, tomo consciência dos processos que emergiram durante minha trajetória.

Olhar para trás e tentar reconstituir tais momentos não se revela como uma tarefa fácil, mas sim desafiadora. Ao desempenhar tal ação, realizarei uma prática reflexiva. E, embora nossa formação contenha reflexos das relações com o outro, também somos sujeitos construtores de nossa história, como apontam Dayse Freitas e Souza Júnior (2004, p. 3): “O Memorial de Formação é coletivo e individual ao mesmo tempo. O seu caráter coletivo é perceptível na narrativa, uma vez que o professor (re)constrói a teia de relações na qual está inserido”.

Nos dizeres que seguem, tentarei (re)construir os passos que me direcionaram até aqui. Eles me constituem enquanto professor-pesquisador.

1.1 O começo desta história

Minha história começa no ano de 1989, no município de Pinhalzinho/SP[2]. Sou filho único de um casal com pouco acesso à escolarização. Minha mãe teve apenas um irmão, mas sua família tinha uma condição econômica e cultural que não possibilitou o avanço de sua escolarização, pois acreditava que mulheres não precisavam ter acesso aos estudos. Já meu pai cursou o ensino técnico em contabilidade, mas nunca chegou a exercer tal ofício. Embora a escola não tenha feito parte de grande parcela da vida de meus pais, eles sempre demonstraram a importância dessa instituição para meu desenvolvimento.

Outra figura que não posso deixar de citar é meu avô materno. Ele é um trabalhador rural, com uma história que nunca permitiu que frequentasse uma escola. Mesmo assim, aprendeu a ler e a escrever. Tinha conhecimentos matemáticos básicos, que adorava demonstrar aos netos. Ele sempre foi, para mim, fonte de inspiração, pois, quando criança, eu admirava sua habilidade com os números e sua vontade de ensinar o que sabia para todos que estavam a sua volta. Foram muitas horas a seu lado, ouvindo e praticando seus ensinamentos, momentos esses que se faziam mágicos ao olhar da criança que os vivenciava.

Esse era o cenário que se construía: um lar formado por pessoas que tiveram pouco ou nenhum acesso à escolarização, mas que atribuíam grande importância a esta para minha formação. Elas acreditavam que, mediante a escola, eu conseguiria ter uma vida melhor, com mais conforto, ou seja, atribuíam a função de ascensão social à instituição escolar.

De minhas vivências mais remotas de infância, recordo-me de muitos momentos em que a curiosidade se fazia presente. Compreender como as coisas funcionavam, para mim, era uma diversão, embora o acesso a essa informação não se demonstrasse tão fácil lá pelos anos 1990 e 2000, pois, por mais que isso nos pareça distante, vivíamos sem internet.

[2] Pinhalzinho é uma cidade basicamente agropecuária, situada no norte do estado de São Paulo, com população estimada, em 2017, pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, em 14.763 habitantes. A cidade se localiza a 114 km da capital, São Paulo. (IBGE, 2017)

Apesar de nossa família não ter uma condição financeira favorável, por meio do árduo trabalho de meus pais, sempre tive o que era essencial, não faltava nada de que realmente precisasse. Nesse cenário, destaco sempre o excepcional esforço que minha mãe empregava quando a questão era escola; qualquer fator que estivesse ligado à vida escolar era uma prioridade dentro de nosso orçamento. Lembro-me também de, desde muito cedo, participar do planejamento financeiro de minha casa. A educação financeira que se construía naquele lar era marcante.

Durante minha infância, antes de ingressar no ensino regular, eu e meus amigos brincávamos muitos de “escolinha”, eu adorava a ideia de ir a um lugar para ter acesso aos porquês que habitavam minha imaginação. Como gostava dessa brincadeira, foram horas e horas vislumbrando como realmente seria o ambiente escolar.

Quando tinha 6 anos de idade, no ano de 1995, estava pronto para ingressar na antiga pré-escola, na qual teria meu primeiro contato com um ambiente formal de educação. Era chegada a hora de comprar o material escolar. Nesse episódio, não cabia em mim a empolgação por realizar tal tarefa; aqueles cadernos, lápis e canetas, todos novinhos, faziam com que minha vontade de poder, verdadeiramente, vivenciar uma rotina escolar se expandisse cada vez mais. A escola em questão, Escola Municipal *Pedacinho do Saber,* a única pré-escola pública do município, ficava a apenas dois quarteirões de minha casa; mesmo assim, recordo-me de encarar esse ingresso como um desafio, acredito que devido à grande ansiedade que permeava o momento.

No primeiro dia, minha mãe me acompanhou até o portão da escola. Lembro-me bem de cada detalhe. Para acessarmos a sala de aula, tínhamos que subir uma escada. A classe era um pequeno espaço com estantes de livros nas paredes e mesas circulares espalhadas. Também não posso deixar de citar que, num primeiro momento, assustei-me com a situação de estar em meio a outras crianças desconhecidas, mas logo percebi que ali seria um local para novas descobertas. Do segundo dia em diante, tudo foi mais tranquilo, sempre saía de casa, com minha mãe observando do portão, e seguia meu trajeto até à escola.

Quanto à professora, recordo-me de atitudes um tanto quanto enérgicas. Não eram raros os momentos em que, ao tentar “dominar” a sala, ela nos dava broncas, muitas vezes, por falarmos muito.

Já no ano seguinte, 1996, entrei na antiga primeira série (atual segundo ano) do Ensino Fundamental. Passei a estudar em uma escolar maior, mais distante de minha residência. Devido à necessidade de tomar o transporte escolar para chegar a essa escola, as incertezas afloravam. Esse trajeto era realmente um desafio para mim, assim como para minha mãe, que, pela primeira vez, via o filho se dirigir à escola sem sua companhia ou mesmo sem seu olhar zelando pela segurança.

A escola em questão, Escola Estadual de Primeiro Grau *Padre Itamar da Silva*, na época, era a única que ofertava a primeira série no município. A escola fora construída há pouco tempo e se destinava a abrigar as salas da primeira à quarta série do Ensino Fundamental (chamado, na época, de Ensino Fundamental I). Cursei nela toda essa etapa educacional.

Quanto ao espaço da unidade escolar, as salas eram amplas, bem mobiliadas, e acomodavam todos os alunos de uma forma confortável. Contávamos com uma quadra poliesportiva e com uma biblioteca. É interessante frisar que este último espaço era quase um lugar secreto, ao qual só tínhamos acesso raras vezes, era sempre muito controlado por funcionários e professores.

É importante citar que, no ano em questão, a Lei n.º 9.394/96, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), ainda estava em tramitação no Congresso Nacional, sendo promulgada apenas em dezembro de 1996. Como esse ato legal prometia realizar grandes mudanças no cenário educacional do país, instaurava-se, nas instituições de ensino, grande instabilidade perante as incertezas dos rumos que seriam tomados nesse processo.

Nessa escola, sempre esperava por algumas aulas que me chamavam muito a atenção: as de matemática e as de redação. Para mim, elas eram mágicas, pois me permitiam ter contato com aquilo que mais me despertava curiosidade.

As aulas de matemática possibilitavam a aplicação dos conhecimentos obtidos nas conversas com meu avô. Esse histórico permitiu que eu sempre tivesse muita facilidade com matemática e, devido a isso, as professoras costumavam solicitar que eu auxiliasse os colegas que estavam com dificuldades. São fortes as memórias que me trazem a alegria que sentia em poder ensinar o que sabia.

Também gostava muito de escrever, desde as séries iniciais, por isso as aulas de redação eram um momento de diversão. Adorava criar histórias, expressá-las. Recordo-me, como se fosse hoje, do dia em que a professora decidiu pegar uma das redações que eu havia criado e contar a narrativa para a sala toda, não cabia em mim tanta felicidade.

Em meados de 1996, o país estava tentando se recuperar da forte crise econômica que o abalara, buscando colher os primeiros frutos das novas diretrizes econômicas, implementadas durante o ano de 1994 — o Plano Real —, sob o comando do presidente Itamar Franco. Em seguida, com as eleições, determinou-se o novo ocupante do executivo federal, Fernando Henrique Cardoso, ministro da fazenda do governo anterior. O novo presidente deu continuidade às metas estabelecidas pelo Plano Real e começou a se afastar dos cenários superinflacionários, observados nos anos anteriores. É fato que essa instabilidade chegou a todas as esferas de financiamento público, inclusive à educação. Embora a escola em que estudei nesse período estivesse em ótimas condições físicas, havia uma grande dificuldade em obter material de consumo para o desenvolvimento das aulas.

Tenho como marcas dessa fase o crescente apreço pela vida escolar, pois, nesses momentos, foram construídas minhas primeiras e reais experiências enquanto aluno. A escola em que estudei, hoje, está sob os cuidados da administração municipal e abriga os atuais primeiro e segundo anos do Ensino Fundamental.

1.2 Do Ensino Fundamental II ao Ensino Médio: novos desafios

Em 2000, ingressei no Ensino Fundamental II (quinta série, atual sexto ano). Passei a estudar em uma escola mais próxima de minha residência, que ficava apenas a um quarteirão de distância. Este momento se caracterizou como uma conquista, pois, a partir de então, comecei a ser aluno da “maior escola da cidade”. Essa instituição ofertava o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio, ambos sob os cuidados da gestão estadual.

No primeiro dia de aula, na nova escola, lembro-me da ansiedade que tomava conta de mim. Estava angustiado com a mudança em minha rotina escolar; não teria mais um professor apenas, mas sim vários professores. Como faria para compreender tantas pessoas diferentes ao mesmo tempo?

Aos poucos, percebi que, realmente, isso era um grande desafio. Intrigavam-me muito as formas diferentes de cada aula: o que podia fazer em cada uma? O que não podia? Como devia me portar? Essas e outras questões ficavam confusas nas entrelinhas dos discursos de cada professor.

Mesmo em outra instituição, a dificuldade na obtenção de material curricular ainda perdurava. Os livros didáticos eram desatualizados; faltava material básico para execução das tarefas. Tais situações eram vivenciadas por todos os alunos.

A partir da quinta série, deparei-me com uma matemática que se concretizava como desafiadora. A cada aula que se passava, esperava, ansiosamente, pela próxima. Sempre estava correndo atrás dos professores de matemática para obter informações ou mesmo para receber novos problemas para serem resolvidos. Ao chegarmos para o início das aulas no período da tarde, não eram raras as vezes em que nos deparávamos com o conteúdo lecionado aos alunos do período da manhã (séries mais avançadas) na lousa. Isso aguçava muito minha curiosidade, pois queria compreender o sentido de todas aquelas informações dispostas a minha frente.

Em especial, instigava-me muito a utilização de letras na matemática. Aquilo se revelava como uma grande interrogação. Eu me perguntava: “mas quanto vale cada letra?”. Na sétima série, quando fui apresentado ao conhecimento algébrico de uma forma sistematizada, fiquei maravilhado com o poder de tudo aquilo, com toda a simbologia e o potencial de representatividade daqueles conceitos. Cada vez mais me apaixonava pela matemática.

Em consonância com a crescente admiração pelos conhecimentos matemáticos, crescia também o gosto pelo ensinar. Como sempre me empenhava muito na compreensão das atividades, ajudava os colegas que estavam a meu redor a compreender o que estava sendo proposto. Na maioria das vezes, desempenhava essa função de uma forma natural, sem que o professor da sala solicitasse tal auxílio.

Em meados de 2003, quando cursava a antiga oitava série, todo o Ensino Fundamental da cidade passou pela municipalização, ou melhor, começou a ter uma gestão municipal. Nesse modelo de gerência, o estado apenas faz aportes financeiros, em forma de repasses, para a esfera municipal, a qual é responsável por administrar tais recursos, bem como por cuidar de todas questões operacionais das unidades escolares. Esse foi um período bem conturbado, devido a diversas questões, como a ocupação do mesmo prédio por duas gestões diferentes (municipal e estadual), a falta de professores contratados pela esfera municipal, as dificuldades de adaptação do município à gestão de um segmento de ensino no qual ainda não tinha experiência.

Embora demonstrasse maior interesse pelos conhecimentos mais próximos à área das ciências exatas, não perdi o gosto pela escrita, pois escrever continuava se caracterizando como uma tarefa prazerosa. Hoje, ao reconstruir estas memórias, vejo que buscava uma forma de unir essas duas paixões, procura que se concretizará durante estes relatos.

No ano de 2004, ingressei no Ensino Médio. Embora tivesse mudado de segmento de ensino, continuei a frequentar a mesma escola, pois, no momento em questão, o Ensino Fundamental II (sob a responsabilidade da esfera municipal) e o Ensino Médio (sob a tutoria do âmbito estadual) ocupavam as mesmas dependências físicas.

Acredito que essa transição do Ensino Fundamental II para o Ensino Médio se concretizou de uma forma bem tranquila, visto que as mudanças de rotina não foram grandes e o espaço era o mesmo que eu frequentava. Nesse período, era muito forte minha necessidade de decidir minha futura profissão. Muitas vozes diziam quais caminhos eu deveria seguir; para mim, diversos deles faziam sentido: o da tecnologia da informação, o de algumas áreas da engenharia, o das questões voltadas à administração e às finanças, e, por fim, o de me tornar professor.

Quando conversava com meus professores sobre essas possibilidades, quase todos eram muito categóricos: "*Faça o que quiser, mas não se torne professor, isso não é para você.*" Em contrapartida, havia uma docente, mais precisamente, uma professora de história que me dizia: "*faça o que realmente te motiva. Se escolher uma carreira na educação, saiba que não é uma tarefa fácil, mas sim uma função que precisa de pessoas determinadas. Precisamos que bons alunos se tornem bons professores, só assim podemos mudar a educação deste país.*" Destaco como muito importante a figura dessa educadora, tanto por sua postura e competência profissional quanto por sua grande influência em minha formação, fator que explorarei melhor nos próximos relatos.

Toda essa controvérsia ecoava em minhas ideias; eu, realmente, não sabia muito o que escolher. Hoje, ao recordar de tal momento, percebo que o que sempre me motivou foi a docência. Por mais que outras opções fizessem parte de meus questionamentos, elas surgiam muito mais por influências externas do que por meus reais desejos. No final do ano de 2006, quando cursava a terceira série do Ensino Médio, prestei o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), com o objetivo de conseguir uma bolsa de estudos para uma universidade por meio do Programa Universidade para Todos (Prouni)[3]. Durante esse processo de seleção, as dúvidas sobre qual carreira seguir continuavam a me rondar. Quando me inscrevi no Programa, escolhi como minhas opções de curso: engenharia civil, engenharia da computação, engenharia mecânica e matemática. O estudante tem que estabelecer uma ordem de prioridade para suas opções. Num primeiro momento, matemática era minha última escolha; aos poucos, mais precisamente, cinco vezes, mudei essa ordem, até que, no último dia para realizar essas alterações, esse curso passou a ocupar o primeiro lugar de minha lista.

Por fim, acabei conseguindo bolsa integral para o curso de licenciatura em matemática na Universidade São Francisco (USF), no *campus* Itatiba. Deve ficar claro que escolher esse curso foi realmente uma opção, pois minha nota no processo seletivo permitia o acesso a todas as outras possibilidades contidas em meus planos. E foi assim que encerrei o ciclo do Ensino Médio e segui o rumo ao Ensino Superior.

[3] O Programa Universidade para Todos (Prouni) tem como finalidade a concessão de bolsas de estudo integrais e parciais em cursos de graduação de formação específica, em instituições de ensino superior privadas. Criado pelo governo federal em 2004 e institucionalizado pela Lei n.º 11.096, de 13 de janeiro de 2005, oferece, em contrapartida, isenção de tributos àquelas instituições que aderem ao Programa (PROUNI, [2018]).

1.3 O ingresso no Ensino Superior e o início de uma carreira

No ano de 2007, finalmente ingressei no curso de licenciatura em matemática na USF. Esse momento foi uma grande conquista para mim e, em especial, para minha mãe. São muito fortes as lembranças de sua emoção ao saber que seu filho estudaria em uma universidade.

Embora tivesse conseguido bolsa integral, outro problema estava por ser resolvido. A distância, que, embora não fosse muito grande, era uma dificuldade a ser superada. Entre as cidades de Pinhalzinho e Itatiba não havia opções de transporte que possibilitassem o trajeto nos horários necessários. Na época, apenas um estudante de minha cidade se dirigia à cidade de Itatiba para estudar. No ano em que ingressei (2007), matricularam-se na faculdade mais seis estudantes (contando comigo). Éramos um grupo de sete pessoas, o que possibilitava que locássemos um veículo para irmos à universidade.

Vencida essa questão, era hora de começar. Muitas eram as expectativas e os medos com relação a esse início. Questões como estas inquietavam, a todo momento, meus pensamentos: será que fiz a escolha certa? Será que conseguirei me desempenhar bem? Embora esse começo não tenha sido fácil, aos poucos, entendi que o sucesso e o bom desempenho que buscava dependiam muito de mim e que não estaria sozinho. Constatei que o que deveria fazer, enquanto estudante, era reconhecer minhas deficiências e correr atrás de solucionar tais problemas.

Esses problemas não eram poucos. Com o tempo, percebi, com maior convicção, quão deficitária era minha formação básica. Muitos eram os conceitos que deveriam ter sido trabalhos no ensino básico sobre os quais, simplesmente, nunca tinha ouvido falar. Foram muitas horas debruçado sobre os livros, contando com a ajuda de muitas pessoas para que, aos poucos, compreendesse o conhecimento de que tanto necessitava para prosseguir com meus estudos.

Apesar de a escolha pela carreira da docência ter sido tomada de forma consciente, tendo por base meus desejos, ainda perduravam em mim as incertezas sobre a assertividade de tal escolha. No ano em questão, trabalhava na administração municipal da cidade de Pinhalzinho, emprego do qual gostava muito. Toda aquela dinâmica de gerenciar as finanças públicas do município e aplicar conceitos matemáticos para otimizar tais decisões me gerava certo fascínio, surgindo o interesse de encaminhar minha carreira para o ramo da administração pública. Por outro lado, ao realizar as atividades de estágio supervisionado, mais precisamente as de regência, percebia que o ato de ensinar realmente me tocava e me motivava muito. A possibilidade de construir conhecimento com alunos me chamava muito a atenção e gerava um grande embate entre esses dois caminhos.

Durante todo o trajeto vivenciado na graduação, emergiam diversas vozes, as quais tinham variadas origens e intenções e produziam discursos que tanto me direcionavam à carreira docente como me afastavam desta. Em meio a esse percurso, destaco o importante papel das disciplinas, cursadas durante esse período, voltadas às áreas pedagógicas. É fato que, nesses momentos, não compreendia muito bem como todas aquelas teorias se fariam úteis no desempenhar de minhas atividades, mas, naqueles instantes, surgiam inquietações que perdurariam minha formação enquanto professor no exercício da atividade. Nesse contexto, apareceu mais uma figura fundamental em minha formação, a qual produzia um discurso que ecoaria e me traria até o momento desta escrita: minha orientadora (sobre a qual discorrerei mais adiante).

Após três anos de muitos estudos, em 2009, concluí o curso de licenciatura em matemática. Esse encerramento foi muito marcante, pois, além de uma grande conquista pessoal, tal fato se concretizou como uma grande alegria para todos de minha família. Aqui finalizou-se mais um ciclo de minha formação, mas ainda perduravam as mesmas dúvidas.

De 2009 a 2010, participei de uma iniciativa, na cidade de Pinhalzinho, envolvendo alguns estudantes universitários e alguns profissionais recém-formados, a qual tinha por objetivo fornecer um curso preparatório para vestibular gratuito, destinado a estudantes da rede pública de ensino. Cito tal participação, pois ela foi determinante na escolha de meus caminhos; acredito que, sem essa etapa, seguiria outras direções, não a docência. Ao estar em contato com aquela experiência de ensino, cada vez mais, surgia em mim a vontade de ingressar verdadeiramente na atividade do magistério, mas faltava um estímulo final.

Ainda em 2009, estava trabalhando na administração pública quando, em conversa com um dos colegas de trabalho (o qual também tinha cursado licenciatura em matemática), ele me chamou a atenção para um concurso público que estava sendo realizado pelo estado de São Paulo para provimento de vagas de professores da Educação Básica. Num primeiro momento, não me interessei muito em participar, mas, devido à insistência desse amigo, decidi realizar a inscrição para o certame, no último dia possível.

Quando fiz a prova da primeira fase do concurso, estava ciente de que não tinha me preparado devidamente para tal tarefa, mas a encarei com seriedade. Ao terminar o teste, sai com um sentimento de "acho que não fui tão mal assim"; e fiquei aguardando o resultado. Para minha satisfação, deparei-me com o resultado *aprovado*. Isso realmente foi determinante em minha escolha, pois, a partir desse momento, decidi me empenhar de modo integral para o desenvolvimento de minha carreira docente.

No mesmo ano, fui convocado para a escolha de meu cargo efetivo na rede estadual, decidindo, assim, deixar de lado a carreira na administração pública e partir de vez para o magistério. Essa decisão não foi fácil, pois toda a mudança de direção produz grandes inseguranças, mas, munido de todos os fatos que me fizeram estar na condição de tal escolha, decidi ser “professor”. Escolher onde trabalhar foi mais um dilema, pois, em Pinhalzinho, onde residia, não havia vagas para a disciplina de matemática, a cidade mais próxima era Bragança Paulista. Ainda que ela fosse perto, não conhecia a realidade das escolas desse município, o que gerou muitas incertezas sobre qual escola escolher (praticamente todas estavam ofertando cargos). Sendo assim, utilizei o critério de proximidade física, e cheguei à escola onde trabalho até a presente data, na qual desenvolvi as atividades relacionadas a esta pesquisa.

Estava diante de um novo desafio: mudar minha atividade profissional para uma área que, embora me despertasse muitos anseios, apresentava grandes dificuldades. Quantos obstáculos se revelaram no primeiro ano (2011). A escola era pequena, localizava-se em uma região periférica da cidade. Muitos professores, inclusive a direção, tinham chegado à unidade escolar naquele ano. Ou seja, era um trabalho novo sendo implementado em uma realidade nada fácil. Só conseguimos realmente colher alguns frutos a partir do segundo ano de atuação.

Com o passar do tempo, cada vez mais, apaixonei-me pela docência; a cada dia, tornava-me mais professor. Essa situação de superação de constantes e novos desafios se tornou o combustível que precisava para motivar a busca por novos saberes, novas posições, novas transformações.

1.4 A carreira docente, seus desafios e suas transformações

Ao mergulhar no oficio docente, percebi que a cada dia surgem necessidades e demandas novas, as quais devem ser investigadas, sempre com o objetivo de aprimorar as práticas de ensino adotadas. Em meio a esse processo de constante reinvenção, notei que uma das principais convicções, tida até então como um pilar para os processos educacionais, não era totalmente verdadeira. Quando ingressei como professor na rede pública, tinha como preceito a noção de que conhecimento técnico sobre o assunto a ser lecionado garantiria o desenvolvimento de uma aula de qualidade. Com o avanço de minhas atividades, aos poucos, constatei que somente esse tipo de saber não era o suficiente para atender a todas as demandas presentes em uma sala de aula. Diante disso, cheguei à conclusão de que faltavam dois fatores importantes para a promoção de um ambiente propício para a construção de conhecimento: afetividade e saber pedagógico.

Conforme exercia minha função de professor, verifiquei que, quanto mais me aproximava de meus alunos, mais êxito conseguia em meus objetivos. A afetividade, que até então se constituía de uma forma espontânea, começava a demonstrar o potencial de promoção de ligações, as quais criavam vias de comunicação efetivas para o desempenho dos processos de ensino e aprendizagem. O que ficava ali demonstrado, é que, por meio da afetividade, do estabelecimento de uma relação humana, da consciência do papel social de professor e não somente da tarefa de reprodução de conteúdo, poderia promover situações com grandes potenciais de aprendizagem, levando ao que realmente temos como objetivo da educação: a formação integral do sujeito por meio da construção do conhecimento.

Observei que o trabalho em sala de aula jamais é solitário. Pelo contrário, é sempre coletivo, feito a várias mãos. Alunos e professores trabalham juntos, com um objetivo: a significação de toda uma cultura historicamente construída pela ciência.

Pautado nessas bases, fui modificando minhas práticas e, aos poucos, aproximei-me do conhecimento pedagógico. Na verdade, aconteceu uma convergência entre as questões oriundas de minhas práticas docentes e os estudos acadêmicos voltados à pedagogia.

Durante essa trajetória, na busca por aprimoramentos, ingressei, em 2012, em um curso de especialização em gestão escolar e em um curso de graduação em tecnologia em gestão financeira. A procura, em um mesmo momento, por conhecimentos tão diversos se deve às diferentes demandas que surgiam em minhas práticas. O interesse pela gestão escolar me fez perceber o quão complexas são as relações observadas no ambiente escolar, em seus diversos âmbitos — profissional, pessoal, legal, entre outros —, as quais necessitavam ser mais bem analisadas e compreendidas. Já o interesse pela área financeira vinha do desejo de aliar as práticas profissionais, experimentadas em fase anterior, à carreira docente, às práticas de sala de aula, obtendo, assim, mais conhecimento técnico sobre questões de aplicação matemática e diversificando os conceitos de demonstração e aplicação da disciplina em questão.

Como a perspectiva teórica aqui assumida pontua, somos seres historicamente construídos; sendo assim, somos atravessados pelos indivíduos que fazem parte de nosso trajeto. Exponho essa questão para apresentar uma figura que me serve de grande inspiração em minha trajetória enquanto docente. Ela é uma verdadeira professora e sempre demonstrou o grande amor pelo labor que desenvolve com tanta dedicação. Refiro-me a já citada professora de história que tanto me incentivou a caminhar rumo à docência, chamada por muitos de *Dona Sandra*. Quão edificante pode ser tornar o exercício de uma profissão? Acredito que tal questionamento se materializasse nas aulas dessa *Professora*. Sua dedicação, sua sabedoria e sua humanidade me formaram para a docência, plantaram a semente que hoje me faz professor. E assim se encaminha minha constante (re)construção enquanto docente.

1.5 O ingresso na docência do Ensino Superior e o caminho para o Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu

No ano de 2015, tendo concluído tanto o curso de especialização como a graduação em tecnologia, participei, e fui aprovado, em um processo seletivo para ministrar aulas no *campus* Bragança Paulista da Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo (Fatec). Essa era a primeira oportunidade de lecionar no Ensino Superior. Nesse momento, estava buscando novas perspectivas de ensino, e entrar nesse novo segmento de ensino e lecionar nele contribuiu para minha formação, assim como agregou novas inquietações a minhas motivações de estudo. Na ocasião, ministrava as disciplinas Matemática e *Matemática Financeira* para o curso de tecnologia em gestão financeira. Como se tratava de um contrato temporário, deixei a instituição no final de 2015.

Em 2016, recebi o convite para integrar o corpo docente da Universidade São Francisco. Aí se concretizava uma conquista profissional ímpar, pois retornar ao berço de formação acadêmica, agora como docente, foi mais que representativo para meus objetivos profissionais. Vejo que o ambiente acadêmico alimenta nossas ambições por novos conhecimentos, faz com que busquemos nos transformar constantemente, ação indispensável ao professor consciente de seu papel. Poder reencontrar doutores e mestres que, por meio de seus saberes, conduziram-me à trajetória aqui descrita foi um momento indescritível.

Movido pelos desafios da atividade docente, tanto na esfera básica como na superior, no segundo semestre de 2016, me inscrevi para o processo seletivo de alunos especiais para o Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco, no qual fui aprovado. Tive a oportunidade de ter o primeiro contato com tal vertente do meio acadêmico. Cursei a disciplina *Relações de Ensino e práticas educativas*, ministrada pela Prof.ª Dra. Ana Paula de Freitas e pela Prof.ª Dra. Daniela Dias dos Anjos. Tais momentos abordaram conceitos fundamentais à compreensão das teorias vigotskianas, gerando alguns dos preceitos que deram origem à presente pesquisa. Com essa experiência, constatei que a aproximação entre o conhecimento pedagógico e as práticas de ensino era inevitável, pois muitos de meus questionamentos, feitos durante minhas aulas, poderiam ser investigados, ou até mesmo respondidos, tomando por base as teorias trabalhadas pela ciência da educação.

Já no primeiro semestre de 2017, participei no processo seletivo de alunos regulares, para o mesmo programa de pós-graduação, sendo aprovado em todas as fases do certame. Esse período foi permeado por indescritível emoção, pois, por intermédio dessa formação quebrava todas as expectativas de sucesso, e mais do que isso, tinha a oportunidade de construir novos conhecimentos mediante pesquisa.

Ao participar do processo seletivo citado, havia investigado as produções que eram realizadas pelos grupos de pesquisa do Programa de Pós-Graduação. Constatei que havia um grupo de pesquisadores que estudavam questões voltadas à produção de significações em aulas de matemática, tema que convergia com meus interesses iniciais de pesquisa. Ao averiguar o docente do programa responsável por tais produções, cheguei à Prof.ª Dra. Adair Mendes Nacarato. Na verdade, o que se dava a partir daquele momento era um reencontro. Quando descrevo, neste memorial, minha trajetória na graduação, ao citar uma pessoa que fora importante para minha trajetória até estes escritos, refiro-me à professora orientadora desta pesquisa. Acredito que o que vemos materializado na forma desta pesquisa muito se desenhou a partir dos questionamentos produzidos durante as aulas de graduação dessa mesma professora das quais participei como estudante.

1.6 A trajetória no Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação

Tendo ingressado no Programa de Pós-Graduação, busquei um objeto de pesquisa que, de forma significativa, contribuísse para meu desenvolvimento acadêmico. Embora já tivesse alguma ideia sobre algumas possibilidades de investigação, ainda não conseguia definir exatamente quais as situações a serem investigadas.

Refletindo sobre essas possibilidades, cheguei à conclusão de que as questões que verdadeiramente me mobilizariam para uma pesquisa significativa estavam presentes dentro da sala de aula, ou seja, gostaria que minha investigação acontecesse dentro de uma de minhas salas de aula. Com base em tais preceitos e em minhas experiências profissionais, as quais me dirigiram até aqui, a temática geral para meu estudo foi se construindo em torno do ensino e da aprendizagem de álgebra, especificamente para o segmento do Ensino Fundamental.

Contudo, embora já tivesse definido a temática de minha investigação, ainda faltavam os caminhos metodológicos a serem aplicados para a realização desta. Nesse momento, contei com a inestimável parceria com minha orientadora, Professora Adair. Aos poucos, delineamos os caminhos a serem trilhados, sempre pautados no aberto diálogo que mantínhamos. Logo, definimos que seria realizada uma pesquisa em sala de aula, focada nas significações produzidas por alunos do Ensino Fundamental, mediadas pelo professor, quando eles trabalham com conceitos algébricos. Chegar a essa conclusão não foi uma tarefa linear e simples, mas sim um processo cheio de idas e vindas, pois ainda era muito difícil compreender as limitações que deveriam ser adotadas para construir um objeto de estudo claro e, suficientemente, descritível, observando a complexidade que uma dissertação de mestrado requer.

Durante as disciplinas as cursadas, para a obtenção dos créditos do Programa de Pós-Graduação, tive a oportunidade de ter contato com algumas áreas de estudo dentro da ciência da educação, fato que contribuiu para a real elaboração de meu objeto de pesquisa. Refletir sobre temáticas diversas fez com que se estabelecesse uma relação entre o pesquisador que aqui se constrói e as práticas de investigação voltadas ao âmbito educacional.

Dessa diversidade de perspectivas, podemos destacar algumas temáticas que se fizeram presentes nesta jornada, tais como: os conceitos de letramento, em especial o letramento matemático; as pesquisas no/do cotidiano; os estudos voltados aos gêneros do discurso; a metodologia de pesquisa para as ciências humanas; e a teoria histórico-cultural. De forma direta ou indireta, esses pontos de vista contribuíram para a formação dos resultados apresentados nesta pesquisa. Foram dois semestres de muita aprendizagem.

Embora o contato com todos esses saberes tenha somado em minhas práticas, também criou um movimento de instabilidade em minhas convicções, e acredito que não poderia ser de forma melhor. Eu estava muito longe de minha zona de conforto, pois me aventurava em caminhos desconhecidos, trabalhando com questões que necessitavam de muitas horas de reflexão para encontrar uma possível resposta.

No primeiro semestre de 2017, cursando as disciplinas *Estudos sobre letramento* e *Pesquisas no e do cotidiano escolar*, tive a oportunidade de refletir sobre a importância das práticas de leitura e escrita em nossa sociedade. Além disso, estudei questões voltadas às minúcias do cotidiano que estão a nossa frente, mas passam despercebidas.

Já no segundo semestre do mesmo ano, cursando as disciplinas *Tópicos especiais I*, *Seminários de pesquisa* e *O urbano e seus lugares de memória e educação* entrei em contato com vários fatores. Na primeira, observei questões voltadas à análise de gêneros, textuais ou não, assim como suas aplicações para a pesquisa. Na segunda, conheci, por exemplo, metodologias de pesquisa voltadas às ciências humanas e aspectos direcionados à investigação em sala de aula feita com narrativas. Já na última, refleti sobre lugares de memória, físicos ou não, que nos transformam e reformam, educando-nos e demonstrando a influência do passado sobre o presente.

Também nesse semestre, foram realizadas as produções dos dados que integram esta pesquisa. Essa tarefa envolveu um grande movimento de questionamentos quanto aos processos desenvolvidos durante as aulas observadas. Certamente, direcionar nossos olhares para nossas práticas, tendo a oportunidade de rever e, posteriormente, refletir sobre a realidade captada pela produção dos dados, é um momento de intensa produção de perguntas, as quais, por meio da pesquisa, devem se tornar conhecimentos.

Todo esse percurso produziu diversas inquietações. Tais indagações, por sua vez, geraram a necessidade de estabelecer discussões teóricas e realizar muitos estudos. O que se constitui a partir disso estabeleceu esta pesquisa.

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, participei de um grupo de estudos liderado pela orientadora deste trabalho, Prof.ª Dra. Adair Mendes Nacarato, e composto por mais duas pesquisadoras, Prof.ª Ms. Katia Gabriela Moreira e Prof.ª Ms. Iris Aparecida Custódio. Durante as atividades desse grupo, desenvolvemos, de forma conjunta, estudos voltados à compreensão do pensamento algébrico, ação que muito contribuiu para a elaboração desta pesquisa.

1.7 A pesquisa sobre o pensamento algébrico em sala de aula

Em nosso país, as investigações voltadas à observação do pensamento algébrico em sala de aula se encontram em uma fase muito inicial. Ainda há poucas produções científicas sobre o assunto em nossas bases de dados.

Ao consultar o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), utilizando como descritor para busca os termos *pensamento algébrico*, no recorte temporal de 2013 a 2018[4], encontrei 96 resultados relacionados ao tema. Quando realizei uma busca mais minuciosa, constatei que, desse montante, apenas 6 produções tratam especificamente de investigações realizadas em salas de aula dos anos finais do Ensino Fundamental, segmento de ensino ao qual se direciona esta pesquisa. Esses estudos constam no Quadro 1; é importante destacar que todos são dissertações de mestrado.

[4] Tal recorte de tempo se justifica devido à abrangência da Plataforma *Sucupira*, implementada em 2013.

Quadro 1 – Levantamento de dissertações e teses sobre pensamento algébrico do catálogo da Capes (2013–2018) feito em maio de 2018

Ano	Título	Autor	Instituição
2013	*Estratégias de generalização de padrões matemáticos*	Fernando de Mello Trevisani	Universidade Estadual Paulista *Júlio de Mesquita Filho* (Unesp/Rio Claro)
2013	*Aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano em um experimento de ensino*	Edilaine Pereira da Silva	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
2014	*Atividades algébricas no 6° ano do ensino fundamental com materiais manipuláveis*	Luciana Pinto Freitas	Universidade Estadual do Norte Fluminense *Darcy Ribeiro* (UENF)
2015	*Introdução ao estudo da aritmética e da álgebra no ensino fundamental*	Daiana Dallagnoli Civinski	Universidade Regional de Blumenau (Furb)
2016	*A álgebra na perspectiva histórico-cultural: uma proposta de ensino para o trabalho com equações de 1° grau*	Beatriz Aparecida Silva Alves	Universidade Federal de Uberlândia (UFU)
2016	*Construção de conceitos algébricos com alunos do 7° ano*	Ayrton Goes de Magalhães	Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social (Univates)

Fonte: Organizado pelo autor a partir do Catálogo de Teses e Dissertações da Capes[5]

A pesquisa desenvolvida por Trevisani (2013) tem como foco a formação do pensamento algébrico e observa a generalização de padrões feita por meio do *software Migen*. Essa investigação foi desenvolvida em uma escola pública municipal, em Rio Claro/SP, com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. Como resultado de pesquisa, o autor apresenta a possibilidade da utilização do *software Migen* para a introdução e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Edilaine Silva (2013) investiga a elaboração do conceito de equação e as diferentes linguagens que podem ser utilizadas para a representação do pensamento algébrico voltado à construção de igualdades. Essa pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública municipal, em Palotina/PR, com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Apresenta como resultado a importância da utilização de diferentes linguagens para a representação do pensamento algébrico.

O estudo de Luciana Freitas (2014) discorre sobre a formação do pensamento algébrico, observando a formação de generalizações de padrões e o conceito de equação. Foi desenvolvido em uma escola pública municipal, em Campos dos Goytacazes/RJ, com alunos do sexto ano do

[5] Disponível em: http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/. Acesso em: 18/01/2019

Ensino Fundamental. Aponta, como resultados, o potencial da utilização de sequências didáticas para a promoção de um ambiente de aprendizagem favorável à constituição do pensamento algébrico. Também destaca a importância da introdução de tarefas que levem a esse tipo de raciocínio nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

A pesquisadora Civinski (2015) trabalha com a observação de generalizações a partir de padrões e os possíveis significados atribuídos ao sinal de igual na formação do pensamento algébrico. Para isso, desenvolveu seu estudo em uma escola municipal, em Brusque/SC, com alunos do terceiro ao sexto ano do Ensino Fundamental. Como resultados, destaca as dificuldades que os alunos encontram na utilização do sistema formal alfanumérico para a representação do pensamento algébrico. Também nos mostra o potencial da utilização de sequências didáticas voltadas ao desenvolvimento deste proporcionado pelo uso de diferentes linguagens para a sua representação.

Alves (2016) constrói sua pesquisa observando a formação do pensamento algébrico a partir do conceito de equações de primeiro grau. Essa investigação foi desenvolvida em uma escola pública municipal, em Uberlândia/MG, com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. Além disso, o autor analisou materiais didáticos utilizados pela rede de ensino em que a escola, cenário de sua pesquisa, insere-se, buscando construir uma forma de abordar o pensamento algébrico com esses materiais. Essa produção apresenta como resultados a importância de compreender a elaboração conceitual para a formação do pensamento algébrico e a construção de significações, tomando por base a teoria histórico-cultural.

Já Magalhães (2016) mostra em sua pesquisa a formação do pensamento algébrico por meio da investigação de padrões de generalização simbólico-geométricos. Esse estudo foi desenvolvido em uma escola pública municipal, em Santana/AP, com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. Como resultados, apresenta a incidência de dificuldades para a elaboração das generalizações, tais desafios são relativos à leitura e à interpretação da situação-problema apresentada e à falta da elaboração de conceitos relacionados à aritmética.

As contribuições de Luciana Freitas (2014), Civinski (2015) e Magalhães (2016) são convergentes para meu objeto de pesquisa. As três narram o desenvolvimento de uma sequência de tarefas voltadas à elaboração do pensamento algébrico por meio de sequências simbólicas e/ou numéricas. No entanto, diferentemente desta investigação, os autores não tomam o material da rede paulista para a seleção das tarefas.

Ao voltar-me às produções científicas publicadas nos periódicos nacionais relacionados à área de educação matemática, elegi como fonte de busca os *sites* oficiais das seguintes publicações: *Boletim de Educação Matemática* (*Bolema*), da Unesp de Rio Claro; *Boletim*

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), sediada no Rio de Janeiro; *Educação Matemática e Pesquisa*, da Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo; *Perspectivas da Educação Matemática*, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, localizada em Campo Grande; ; e *Zetetiké – Revista de Educação Matemática*, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), alocada em Campinas.

Em cada uma das bases de dados disponibilizadas pelos periódicos citados, foram realizadas buscas utilizando os termos *álgebra* e *pensamento algébrico*; adotamos como recorte temporal as publicações feitas a partir do ano de 2008[6]. O Quadro 2 revela os quantitativos classificados como resultados primários dessa busca.

Quadro 2 – Quantitativo de resultados da busca pelos termos *álgebra* e *pensamento algébrico*

	Termo buscado	
Periódico	Álgebra	Pensamento Algébrico
Bolema	84	64
Boletim Gepem	8	1
Educação Matemática e Pesquisa	26	9
Perspectivas da Educação Matemática	4	4
Zetetiké	11	5

Fonte: Organização do autor a partir do *site* oficial de cada periódico[7]

Nas produções encontradas, busquei artigos que tratassem de investigações alinhadas com o objeto de pesquisa definido por esta investigação. Portanto, procurei estudos voltados ao processo de formação do pensamento algébrico por meio de generalizações, tendo como cenário a sala de aula, ou análises do material curricular oficial da rede paulista voltadas ao pensamento algébrico. Destacaram-se os artigos dispostos no Quadro 3.

[6] Esta definição se justifica porque o ano de 2008 se caracteriza como o momento de implementação da política pública *São Paulo Faz Escola*, medida pela qual foram criados os currículos oficiais vigentes, assim como o material curricular analisado por esta pesquisa.

[7] Listo a seguir os *links* nos quais podem ser acessadas as revistas:

- *Bolema*: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema.
- *Boletim Gepem*: http://www.gepem.ufrrj.br/.
- *Educação Matemática e Pesquisa:* https://revistas.pucsp.br/emp.
- *Perspectivas da Educação Matemática*: http://seer.ufms.br/index.php/pedmat.
- Zetetiké: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike.

Quadro 3 – Publicações selecionadas conforme o objetivo de pesquisa definido e feitas no período de 2008 a 2018

Periódico	Ano	V.	N.	Título	Autor
Bolema	2011	24	38	“Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal”	Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino e Hélia Margarida de Oliveira
	2013	27	47	“Comparison of 6th-8th graders’ efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns”	Yaşar Akkan
	2014	28	48	“Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria”	María Luz Callejo e Alberto Zapatera
	2015	29	51	“Apropriação como produção coletiva na atividade e internalização como resultado desta atividade: um exemplo de álgebra elementar na sala de aula”	Eveline Vieira Costa e Angela Santa-Clara
	2016	30	54	“Pensamiento aritmético-algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la escuela secundaria”	José Carlos Cortés, Fernando Hitt e Mireille Saboya
Boletim Gepem	2009	54	1	“Uma análise do pensamento e da linguagem algébrica expressos na produção escrita de alunos da escola básica”	João Ricardo Viola dos Santos e Regina Luzia Corio de Buriasco
	2013	62	2	“Análise de erros na resolução de problemas com equações algébricas do 1º grau: um estudo com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental”	Yasmini Lais Spindler Sperafco, Beatriz Vargas Dorneles e Clarissa Seligman Golbert
Educação Matemática e Pesquisa	2012	14	2	“Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental: uma contribuição para o Caderno do Professor de Matemática do oitavo ano”	Antonia Zulmira da Silva
	2018	20	1	“A importância da função discursiva de designações de relações algébricas para o desenvolvimento do pensamento algébrico”	Célia Finck Brandt, Méricles Thadeu Moretti, Carine Scheifer e Fátima Aparecida Queiroz Dionizio
Zetetiké	2007	15	1	“Uma perspectiva histórico-cultural para o ensino de álgebra: o Clube de Matemática como espaço de aprendizagem”	Wellington Lima Cedro e Manoel Oriosvaldo de Moura

Fonte: Organização do autor com base nos dados obtidos por meio dos *sites* oficiais de cada periódico

Em seu artigo, Cyrino e Oliveira (2011) apresentam um estudo realizado em uma escola de ensino básico em Portugal, onde são investigados três alunos. Cada um cursa o fim de um ciclo escolar (quarto, sexto e nono ano). Em suas investigações, as autoras assinalam que tais estudantes eram participantes de um projeto extracurricular intitulado *Clube da Matemática*;

esse grupo reúne os discentes que se interessam pela investigação e pela resolução de problemas matemáticos. Por meio do relato sobre as tarefas investigativas, voltadas à observação de generalizações aritméticas e algébricas, o estudo busca identificar as diferentes formas com que o pensamento algébrico pode se manifestar nas respostas elaboradas por esses alunos.

A investigação de Akkan (2013) tem como foco a observação da capacidade de criação de estratégias e representações de generalizações relacionadas a padrões lineares e quadráticos. Utiliza testes e entrevistas aplicadas a 246 estudantes, distribuídos do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental de uma escola situada na cidade de Trabzon, na Turquia. Essa investigação procura reconhecer os diferentes níveis de capacidade de generalização em alunos, considerando os distintos momentos de sua escolarização.

Já Callejo e Zapatera (2014) apresentam um estudo realizado com 96 alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, com idade entre 12 e 16 anos. Durante a investigação, foram propostas tarefas que tinham como foco a observação de padrões numéricos, buscando sua generalização. Esse artigo tenciona revelar a flexibilidade possível na elaboração de estratégias de resolução, destacando as soluções pautadas ou não na recursividade (generalizações aritméticas e/ou algébricas).

Em Costa e Santa-Clara (2015), encontrei um estudo desenvolvido com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública da região metropolitana de Recife/PE. As autoras apresentam suas conclusões quanto à proposta e à resolução de tarefas voltadas à observação do conceito de equivalência por meio de equações. Esse artigo desvela a forma com que se dá a apropriação desse conceito, tendo como base a teoria histórico-cultural de Lev Vigotski e as contribuições de Mikhail Bakhtin sobre a produção de texto/enunciado e suas diferentes representações semióticas.

Cortés e Saboya (2016) voltam-se à investigação da elaboração de padrões numéricos com alunos de 14 a 15 anos. Durante esse processo, os pesquisadores buscaram indícios da elaboração do pensamento aritmético e do algébrico, expondo possíveis divergências entre estes.

Santos e Buriasco (2009) retratam um estudo envolvendo alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Esses estudantes realizaram tarefas que tinham como foco a utilização de estruturas aritméticas por meio do pensamento relacional. Com isso, os autores analisaram a construção de generalizações das produções dos discentes por meio do pensamento algébrico.

Em Sperafco, Dorneles e Golbert (2013), relata-se uma investigação realizada com 38 alunos do 8° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, na cidade de Porto Alegre/RS.

O estudo pautou-se no desenvolvimento de tarefas relacionadas à resolução de problemas que envolvessem equações do 1.° grau. Essa pesquisa teve como foco os possíveis erros cometidos por esses alunos durante a resolução, observando a importância da reflexão sobre tais equívocos para a constituição do pensamento algébrico.

Silva (2012) nos apresenta uma pesquisa documental realizada a partir da publicação da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo intitulada *Caderno do Professor*; mais especificamente, analisa o volume dessa publicação destinado ao nono ano do Ensino Fundamental. Nesse estudo, a autora busca observar a ocorrência de potenciais fatores para a elaboração do pensamento algébrico relacionado à resolução de problemas que abordam equações do primeiro grau.

Já em Brandt *et al.* (2018), desenvolve-se uma pesquisa envolvendo 115 alunos do 8.° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, no Paraná. Nessa investigação foram empregadas tarefas que buscavam observar a formação do pensamento algébrico por meio da noção de equivalência. O artigo sinaliza os diferentes objetos do conhecimento possíveis de serem mobilizados para a construção desse conceito mediante exercícios que englobavam equações.

Cedro e Moura (2007) fizeram um experimento de ensino com 12 alunos do 6.° ano do Ensino Fundamental, os quais integravam um projeto extraclasse desenvolvido pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE/USP). Nesse estudo, foram desenvolvidas tarefas com o objetivo de investigar a potencialidade da utilização das equações de 1.° grau para a formação do pensamento algébrico, em sua forma relacional. Foram usadas possibilidades de manipulação de quantidades relacionadas ao conceito de equivalência presente nas equações.

No âmbito das publicações internacionais, elegi os periódicos *Quadrante – Revista de investigação em Educação Matemática* e *ZDM – Mathematics Education*. Para esse levantamento, utilizei o termo *álgebra*, sem filtro temporal. Sendo assim, encontrei os resultados registrados no Quadro 4.

Quadro 4 – Quantitativo de resultados da busca pelo termo *álgebra*

	Termo buscado
Periódico	Álgebra
Quadrante – Revista de investigação em Educação Matemática	11
ZDM – Mathematics Education	27

Fonte: Organização do autor, a partir do *site* oficial de cada periódico[8]

[8] Quadrante – Revista de investigação em Educação Matemática: http://www.apm.pt/portal/quadrante.php.

Busquei situações de investigação voltadas à observação da formação do pensamento algébrico, por meio de generalizações, em anos/séries correspondentes ao Ensino Fundamental. Encontrei os artigos elencados no Quadro 5.

Quadro 5 – Publicações selecionadas conforme o objetivo de pesquisa definido

Periódico	Ano	V.	N.	Título	Autor
Quadrante – Revista de investigação em Educação Matemática	2015	24	2	"A resolução de problemas com a folha de cálculo na aprendizagem de métodos formais algébricos"	João Pedro da Ponte, Nélia Amado e Sandra Nobre.
ZDM – Mathematics Education	2005	37	1	"Algebra in elementary school: developing relational thinking"	Thomas P. Carpenter, Linda Levi, Megan Loef Franke e Julie Koehler Zeringue
	2007	40	1	"Early algebra and mathematical generalization"	David W. Carraher, Mara V. Martinez e Ana Lúcia D. Schliemann

Fonte: Organização do autor com base nos dados obtidos por meio dos *sites* oficiais de cada periódico

Nobre, Amado e Ponte (2015) apresentam seus estudos sobre a implementação de uma experiência de ensino que busca produzir uma aprendizagem significativa em torno do tema *álgebra* por meio da investigação de problemas voltados ao conceito de incógnitas e ao de variáveis. Para isso, propõem a utilização de um *software* de planilhas eletrônicas como ferramenta para a dinamização das investigações propostas. Para tanto, selecionaram duas alunas de uma mesma turma do nono ano de escolaridade. Esse artigo se alinha com o trabalho aqui apresentado na medida em que estabelece relação entre a linguagem algébrica e outras possibilidades de expressão do pensamento algébrico.

Carpenter *et al.* (2005) relatam experimentos que tinham por objeto de investigação a realização de entrevistas com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. O foco de seu trabalho é a análise da formação do pensamento algébrico relacional na aprendizagem de questões aritméticas por meio de generalizações. Nesse artigo, foram entrevistados dois alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental. Essa produção se alinha ao objeto de pesquisa definido por este trabalho porque salienta a potencialidade do pensamento algébrico, voltado à elaboração de generalizações, para a construção conceitual do pensamento matemático.

O estudo de Carraher, Martinez e Schliemann (2007) foi realizado com alunos do 9.° ano do Ensino Fundamental e tem como propósito observar a elaboração de generalizações a

ZDM – Mathematics Education: https://link.springer.com/journal/11858.

partir do pensamento algébrico funcional. Para isso, foram selecionados 15 alunos para participar do experimento. Durante o desenvolvimento desse estudo, foram propostas aos alunos tarefas que objetivavam investigar sequência numéricas, com a meta de elaborar uma generalização para o objeto analisado. Esse artigo se aproxima desta pesquisa por tratar da elaboração de generalizações a partir de sequências numéricas, fazendo menção à formação do pensamento algébrico funcional.

Desse conjunto de publicações, destaco os trabalhos de Cyrino e Oliveira (2011), Callejo e Zapatera (2013), Cortés e Saboya (2016) e Carraher, Martinez e Schliemann (2007). Esses estudos tratam especificamente de investigações envolvendo alunos do Ensino Fundamental a partir da utilização de tarefas voltadas à observação de generalização algébrica-aritmética por meio de padrões numéricos, situação esta que se alinha com as definições propostas pelo cenário de pesquisa que descrevo aqui.

Como é possível notar, ao definir o período temporal e os termos de busca vinculados ao objeto desta investigação, não encontrei um grande contingente de produções científicas. Além disso, não identifiquei materiais acadêmicos sobre o material da rede estadual paulista desenvolvido em sala de aula.

Quando me voltei às pesquisas cujo foco é a análise do material curricular oficial da rede paulista de ensino, especificamente relacionado à disciplina de matemática, realizei uma pesquisa no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Utilizei o descritor *São Paulo Faz Escola* (título do programa de implementação do material curricular) e defini como recorte temporal o período de 2013 a 2018. Encontrei, inicialmente, 79 publicações, das quais apenas duas tratam da utilização do referido material curricular no segmento do Ensino Fundamental e na disciplina de matemática, ambas dissertações de mestrado, como indicado no Quadro 6.

Quadro 6 – Levantamento de dissertações e teses publicadas de 2013 a 2018 no catálogo da Capes com o descritor *São Paulo Faz Escola*

Ano	Título	Autor	Instituição
2014	*A leitura dos enunciados dos problemas matemáticos e as estratégias para a resolução por alunos do 9° ano do ensino fundamental*	Lidiane Camilo Sossolote Leite	Universidade Estadual Paulista *Júlio de Mesquita Filho* (Marília)
2014	*Apropriação dos cadernos de matemática do programa São Paulo faz escola pelos professores dos anos finais do ensino fundamental*	Ana Lúcia Nunes Urtado Silva	Universidade Nove de Julho

Fonte: Organização do autor com base nos dados obtidos no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, coletados em maio de 2018

Leite (2014) investiga a forma como alunos do nono ano do Ensino Fundamental interpretam os problemas propostos pelo material curricular oficial da rede paulista, na disciplina de matemática, assim como as estratégias construídas por esses alunos a partir dessa interpretação. A pesquisa, ainda, propõe a análise do referido material curricular e apresenta o modo como os docentes que o utilizam visualizam sua aplicação e percebem o papel do professor diante do desenvolvimento do programa *São Paulo Faz Escola* (esses dados foram produzidos a partir de questionários respondidos pelos professores).

A partir dessa investigação, chega-se a duas conclusões. Quanto à utilização do material curricular por parte dos alunos, o que se aponta é a dificuldade encontrada por muitos para interpretar as situações propostas. Além disso, ressalta-se que, por si só, o material não promove a interação entre os sujeitos participantes da sala de aula nem o diálogo entre o aluno e o conceito proposto pela tarefa do material. Já quanto à relação do professor com o instrumento didático, a pesquisa aponta certa resistência dos docentes em utilizá-lo ou mesmo em estabelecer um contato mais crítico com ele. Os professores apresentam como justificativa para tal posição o fato de não terem participado da elaboração dessas publicações.

Ana Lúcia Silva (2014) desenvolveu um estudo sobre as formas de apropriação de professores de matemática ao usar o livro didático aqui referenciado. Durante suas ponderações, a autora analisa a forma com que os docentes da rede estadual paulista de ensino visualizam as prescrições realizadas pelos materiais integrantes do programa *São Paulo Faz Escola*, sendo que a produção dos dados se deu por meio de entrevistas[9].

Esta revisão bibliográfica evidencia a preocupação de pesquisadores com a temática *álgebra*. Os enfoques são variados, mas nenhuma investigação tratou especificamente do objeto desta pesquisa. Portanto, este trabalho busca se integrar ao cenário de pesquisa em educação matemática e contribuir para essa temática tão importante no desenvolvimento do pensamento matemático.

No capítulo seguinte, apresento as opções metodológicas utilizadas para a produção dos dados. Ademais, delineio os caminhos adotados para sua posterior análise”

[9] Embora tivesse muito interesse nesse trabalho, não consegui acesso ao texto completo. A página do programa acusava erro, fiz uma solicitação ao programa, porém não fui atendido até a finalização deste relatório.

2 PROCEDIMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresento os aspectos metodológicos que estabeleceram as diretrizes para a produção e a análise dos dados utilizados nesta pesquisa. Em seu desenvolvimento, descrevo o caminho percorrido durante a investigação, assim como apresento o cenário no qual as práticas aqui relatadas se inserem.

Parto dos pressupostos da teoria histórico-cultural e reconheço que somos seres historicamente construídos e, devido a isso, perpassados pelas vozes de outros seres. Tendo isso em vista, apresento, a princípio, as motivações que me levaram ao cenário de pesquisa.

2.1 A escolha pela pesquisa em minha sala de aula

Em minhas práticas, desde os tempos de aluno da Educação Básica, sempre tive apreço por observar os detalhes que permeavam os processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula. Esse gosto foi aguçado quando ingressei no curso de licenciatura em matemática; aí iniciou-se o processo de tomada de consciência sobre as dinâmicas presentes no espaço escolar.

Em 2011, quando comecei verdadeiramente minha carreira docente, lecionando na escola estadual na qual trabalho até hoje, que se caracteriza como cenário para esta pesquisa, percebi, em maior grau, a complexibilidade de todas as relações existentes nesse ambiente. Surgiu, assim, uma grande inquietação sobre compreender melhor o que ocorria diante de meus olhos.

Ao me inscrever no processo seletivo do programa, precisava construir um projeto de intenção de pesquisa. Embora tivesse algumas ideias de caminhos a serem adotados, via a minha frente um emaranhado de possibilidades. Elas precisavam ser esclarecidas ou mais bem definidas para um objeto que realmente fosse pertinente e, mais do que isso, que fizesse parte de minhas indagações enquanto professor. Dessa forma, durante a entrevista do processo seletivo para o ingresso no Programa de Pós-Graduação, identifiquei o que realmente me instigava: a pesquisa em sala de aula.

Diante dessa definição, ficavam os seguintes questionamentos: em qual sala de aula faria a investigação? Seria o caminho realizar uma parceria com outro professor, em outra escola? Dirigiria meu estudo para a Educação Básica ou para o Ensino Superior? Deveria optar por analisar minha própria sala de aula?

Aos poucos, percebi que a última opção seria a mais intrigante. Assim, desenvolveria a pesquisa dentro de minha própria sala de aula. Por mais obscura que, em um primeiro momento, essa tarefa se apresentasse, sentia que esse objeto me chamava, instigava-me e, acima de tudo, desafiava-me.

Estudar minha própria prática permitiria construir conhecimento sobre as ações que eu desenvolvia em sala de aula. Essa prática investigativa era uma oportunidade de refletir sobre os resultados obtidos a partir de uma atividade pedagógica. Assim, eu ocupava uma posição, enquanto docente, não apenas de executor de práticas metodológicas pré-determinadas para assumir uma postura crítica, mas também de pesquisador consciente das ações desenvolvidas.

Ponte (2002, p. 06), quando define a prática investigativa da atuação docente, afirma:

> Trata-se, simultaneamente, de uma atividade intelectual, política e de gestão de pessoas e recursos. Torna-se necessária a exploração constante da prática e a sua permanente avaliação e reformulação. É preciso experimentar formas de trabalho que levem os seus alunos a obter os resultados desejados. Para isso, é indispensável compreender bem os modos de pensar e as dificuldades próprias dos alunos. Um ensino bem sucedido requer que os professores examinem continuamente a sua relação com os alunos, os colegas, os pais e o seu contexto de trabalho. Além disso, uma participação ativa e consistente na vida da escola requer que o professor tenha uma capacidade de argumentar as suas propostas. A base natural para essa atuação tanto na sala de aula como na escola, é a atividade investigativa, no sentido de atividade inquiridora, questionante e fundamentada.

Assim, desenvolver investigações voltadas à própria prática docente é um momento privilegiado de produção de conhecimento, pois, por meio dessas ações, é possível a (re)formulação de práticas pedagógicas que potencializem a elaboração do conceito indicado como objeto de investigação da aula que se observa e, posteriormente, analisa-se. Por meio da investigação de sua própria prática, o professor pode verificar quais os conhecimentos e os processos mobilizados por suas ações pedagógicas, o que permite sua (re)construção consciente enquanto docente.

A pesquisa da própria prática, inserida na Educação Básica, é um grande desafio aos docentes. Muitos questionamentos sobre a forma e as possibilidades de investigação permeiam os pensamentos dos professores que se predispõem à execução dessa tarefa. Daí a importância união de esforços entre a academia e a Educação Básica (LIMA; NACARATO, 2009).

Tinha consciência desse desafio. Porém, outro se fazia presente: escolher uma das salas de aula em que lecionava. Primeiramente, defini que faria a pesquisa na Educação Básica, mais precisamente no Ensino Fundamental, pois ali observava um grande potencial de participação dos alunos. Embora já tivesse em mente o ensino da álgebra como temática central, precisava definir para quais aspectos do pensamento algébrico me direcionaria. Nesse momento, duas importantes diretrizes desta pesquisa se construíram: o olhar para a compreensão das significações produzidas com a investigação de situações de generalização, tomando por base o pensamento algébrico; e a turma na qual seria desenvolvida a pesquisa, que seria a turma *A* do sétimo ano para a qual lecionava.

Como citarei mais adiante, a escola que se caracteriza como cenário desta pesquisa faz parte da rede de ensino do estado de São Paulo; sendo assim, o currículo oficial é definido pelo documento *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*. Nele, é estabelecido como momento em que o docente deve introduzir conceitos do pensamento algébrico nas práticas escolares dos alunos o sétimo ano do Ensino Fundamental. Daí se justifica a opção do ano de escolaridade observado. Por sua vez, a referida turma foi escolhida por ser muito participativa e expressiva, o que propicia o desenvolvimento de investigações.

Assim, defino o cenário de pesquisa — minha sala de aula, minha turma A do sétimo ano. Aqui existe intencionalidade; fiz uma escolha que me auxiliasse a encontrar respostas para os questionamentos que constituem este trabalho e, assim, poder apontar possibilidades de compreensão desse desafiador momento do ensino da matemática que esses adolescentes vivenciam: a introdução do pensamento algébrico[10].

2.2 Contexto da pesquisa

A escola onde foram desenvolvidos os dados que deram origem a esta pesquisa está situada em uma região periférica da cidade de Bragança Paulista, no interior do estado de São Paulo. Tal unidade escolar integra a rede estadual de educação, atendendo a cerca de 260 alunos dos anos finais do Ensino Fundamental (distribuídos nos períodos matutino e vespertino) e 250 discentes do Ensino Médio (matriculados no período matutino ou no noturno).

Quanto à estrutura física da escola, é notável a conservação das dependências. Na entrada da unidade, há uma área composta por árvores e bancos, que configura um ambiente agradável para diversas atividades escolares. Ao passarmos por essa área, ingressamos no pátio que dá acesso às dependências do prédio. Essa área se constitui em um vão-livre no próprio prédio. Nesse mesmo piso, estão dependências como refeitório, sala de informática, secretaria, sala dos professores e diretoria. O pátio também dá acesso às escadas, que nos levam às salas de aula, que ficam no piso superior.

Tanto no piso inferior quanto no superior, estão dispostos nas paredes diversos trabalhos realizados pelos alunos, gerando um ambiente colorido e instigante. Esses trabalhos formam

[10] Conforme o *Currículo Oficial da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo*, as primeiras menções à introdução do pensamento algébrico nas práticas de ensino devem ocorrer durante o sétimo ano do ensino fundamental (SÃO PAULO, 2011). É importante destacar que essa publicação, feita em 2008, foi editada e atualizada no ano de 2011. Contanto, tais produções são anteriores aos parâmetros definidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a qual propõe a introdução de tais conceitos a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017).

uma identidade visual da escola, pois os alunos frequentemente fazem menções aos símbolos de identificação da instituição, tais como o brasão e as iniciais do patrono do estabelecimento de ensino.

Nas salas de aula, também têm algumas produções realizadas pelos alunos com diversas temáticas. Nesse ambiente, existem estantes para a acomodação de livros didáticos utilizados pelas turmas, que ocupam determinada sala nos diferentes períodos.

Como visto, há diversas características harmoniosas no cenário da pesquisa. De uma forma geral, os aspectos observados contribuem para a constituição de um ambiente acolhedor aos integrantes da comunidade escolar.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, foi escolhida a turma do 7.° ano A, composta por 32 alunos, com idades entre 12 e 13 anos. A grande maioria reside no mesmo bairro da localização da escola.

Visando à promoção de um ambiente propício à produção de interações para a execução das tarefas, organizei os alunos em grupos. Para a definição destes, foi solicitado aos discentes que formassem grupos de quatro a cinco alunos, conforme afinidades. Em alguns casos, foram realizadas intervenções nessas formações, buscando, assim, a construção de conjuntos de participantes com um maior potencial de interação. A formação é explicitada no Quadro 7.[11]

Quadro 7 – Relação de alunos separados em grupos de trabalho

Grupo	Aluno
1	Kely
	Raissa
	Isabela
	Paula
	Andressa
2	Jade
	Alessandra
	Gisele
	Ana
3	Julia
	Daiane
	Eliana
	Enzo
4	Willian
	Valentin
	Joaquim
	Gustavo
	Lucas

Grupo	Aluno
5	Eloá
	Isadora
	Gabriele
	Mateus
	Eliana
6	Alice
	Lorenzo
	Artur
	Talita
7	Antônio
	Ivo
	João
	Eduardo

Fonte: Acervo do pesquisador

[11] Visando à preservação da identidade dos indivíduos participantes desta pesquisa, os nomes reais foram suprimidos, de modo que os nomes constantes neste estudo são fictícios.

Os habitantes do bairro onde se localiza essa unidade escolar se apresentam, em seus aspectos socioeconômicos, como classe média-baixa, de modo que ele é composto, em sua grande maioria, por pequenas e simples residências. Classificando-se como uma região periférica do município, esse bairro sofre com problemas de ordem social, tais como a baixa escolaridade, o desemprego e o tráfico de drogas. Nos últimos anos, na região, foi implementada uma escola pertencente à expressiva instituição privada do *Serviço Social da Indústria de São Paulo* (Sesi/SP) e uma unidade da Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo (Fatec). Tais modificações no espaço em questão proporcionaram novos olhares para a região, a qual, aos poucos, deixa de lado a imagem de um espaço marcado apenas por seus problemas sociais.

Facilmente, em um primeiro contato, percebe-se o grande potencial de interação que esses alunos estabelecem tanto em aspectos relacionais como em fatores ligados ao ensino e à aprendizagem. A curiosidade se faz presente na grande maioria deles nas discussões desenvolvidas durante as aulas. O ano de 2017 foi o segundo ano que lecionei para essa turma; e acredito que, devido a essa continuidade de trabalho, foi possível a manutenção de cenário permeado por relações de muita afetividade que se estabelecem entre os integrantes desse espaço, “a sala do sétimo ano A”.

Nesse contexto de pesquisa, também se insere um professor, minha figura enquanto professor. Há sete anos lecionando nessa escola, meus laços com a comunidade em que se insere essa instituição não podem deixar de ser citados. São muitas as relações de afetividade que se construíram durante esse tempo.

Essas relações me constituíram, e continuam a me constituir, enquanto professor. A história que se apresentou me fez acreditar que o sucesso nos processos educacionais só é possível por meio dessa relação de afetividade, que se deve constituir de forma direta e, acima de tudo, humanizada. Professor e aluno devem se completar, trabalhar como parceiros, em uma dinâmica na qual um aprende com o outro.

Parto dos pressupostos da teoria histórico-cultural. No arcabouço de suas contribuições, Góes (2000, p. 4) chama a atenção para o fato “de que a gênese das funções psicológicas está nas relações sociais e de que a constituição do funcionamento humano é socialmente mediada, num curso de desenvolvimento que abrange evoluções e, sobretudo, revoluções.”

Baseado nessa proposição, defini que as tarefas propostas para o desenvolvimento das investigações seriam realizadas não individualmente, mas sim coletivamente, em grupos de alunos. Nessa organização, evidenciam-se com maior clareza as relações sociais, as quais são constituintes das citadas evoluções e revoluções, em nosso caso, do pensamento algébrico.

Após as discussões em grupo e a consequente resolução das tarefas, eram realizadas socializações sobre os caminhos de solução adotados pelos grupos e sobre as produções concretizadas por eles. O objetivo central desse momento era promover um espaço em que os alunos identificassem possíveis pontos de convergência ou divergência entre as diferentes soluções encontradas para uma mesma situação, instigando o levantamento de hipóteses, argumentos e contra-argumentos para aceitar ou rejeitar as colocações realizadas pelos grupos. Assim, construía-se uma situação propícia à observação da elaboração conceitual proposta pelas tarefas realizadas.

Quanto à dinâmica de aula, o cenário que se objetivou foi pautado na liberdade dos alunos em exporem seus pensamentos sobre as tarefas propostas, sem se preocuparem com a noção de certo ou errado. Desde o início, expus que o mais importante não estava no que era produzido, na resposta certa ou errada, mas sim no processo, no caminho que se estabeleceu por meio das interações sociais realizadas pelo grupo.

Como indicado, a temática escolhida, voltava-se ao pensamento algébrico, mais precisamente à análise de sequências que priorizam a relação entre o campo aritmético e o algébrico. Nesse contexto, buscavam-se elaborações de regras e generalização para a previsão de termos inacessíveis. Essa opção se justifica, pois, segundo minhas práticas profissionais, esse assunto se caracteriza como um grande desafio para a maioria dos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. Isso porque é nesse momento que os discentes se deparam pela primeira vez com um pensamento que os leva à tomada de consciência sobre o campo algébrico da matemática. É importante destacar que, quando me refiro à introdução desse conteúdo nos anos finais do Ensino Fundamental, embaso-me na definição dada pelo *Currículo Oficial do estado de São Paulo,* especificamente na seção destinada ao quarto bimestre do sétimo ano.

2.3 A organização das aulas baseada na resolução de problemas e nas discussões matemáticas

Pautado no conceito da produção de significações, por meio de práticas de ensino que visem à construção do conhecimento, direciono-me a uma organização de aula baseada na resolução de problemas. Como Van de Walle (2009, p. 57) afirma,

> quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa. Enquanto os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, descobrindo que métodos funcionam e quais são funcionam e justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas.

A ação pedagógica que inclui a resolução de problemas tem grande potencialidade para a promoção de um ensino voltado não para a transmissão de saber, mas sim para a produção de conhecimento. É por meio desse recurso que desenvolvi as práticas investigativas aqui analisadas, que buscavam a formação dos conceitos do objeto deste estudo. Na obra *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*, Hiebert *et al*. (1997) discutem importância de um ensino da matemática voltado à compreensão, o qual envolve os alunos na atribuição de sentido aos conceitos trabalhados em sala de aula. Os princípios defendidos por esses autores sustentam a realização desta pesquisa.

Hiebert *et al.* (1997) destacam que o entendimento conceitual é fundamental, pois o conhecimento construído dessa forma pode ser utilizado com flexibilidade em diversos casos, tornando possível uma aplicação em outras situações de um mundo mutável e imprevisível. Por meio do ensino da matemática que tem por referência tais preceitos, possibilitamos a realização de uma leitura de mundo capaz de nos inserir na produção do conhecimento e a reflexão sobre nossas produções.

As contribuições desses autores podem ser relacionadas à teoria histórico-cultural. Isso se deve a eles defenderem que, para a construção dessas significações, são necessários processos cognitivos de reflexão e comunicação, os quais se darão em um meio social definido.

Visando a traçar um possível caminho para a edificação de um ensino de matemática orientado para a produção de significações, Hiebert *et al.* (1997) analisam cinco dimensões. Elas discorrem sobre os aspectos que devem ser observados para que esse objetivo possa ser alcançado. Delineio-as no Quadro 8.

Quadro 8 – Princípios e ações

DIMENSÃO	PRINCIPAIS RECURSOS
1. Natureza das tarefas em sala	• Apresentar uma matemática problemática. • Trabalhar com uma matemática que se conecte com o momento em que os alunos estão. • Deixar para trás, como produto da tarefa, algo de valor matemático, conceito que os autores denominam como *resíduos*.
2. Papel do professor	• Selecionar as tarefas visando aos objetivos. • Compartilhar informações essenciais. • Estabelecer a cultura da sala de aula.
3. Cultura social da sala de aula	• Alinhar ideias e métodos à aprendizagem do grupo.

	• Permitir que os alunos escolham e compartilhem seus métodos. • Considerar que erros são aprendizagens para todos. • Saber que a correção reside no argumento matemático.
4. Ferramentas matemáticas como suporte de aprendizagem	• Seguir a ideia de que os significados das ferramentas matemáticas devem ser construídos por cada utilizador. • Usá-las com propósito de resolver problemas. • Utilizá-las para a comunicação e para pensar.
5. Equidade e acessibilidade	• Construir tarefas acessíveis a todos os estudantes. • Envolver todos os alunos. • Permitir que todos os discentes contribuam. • Acreditar que todos podem aprender matemática.

Fonte: Adaptado de Moreira (2015, p. 37) e de Hiebert et al. (1997)

Quando definem a primeira dimensão, Hiebert *et al.* (1997) abordam a importância da escolha de tarefas que realmente levem a um processo de significação do objeto do conhecimento que está sendo investigado. É por meio da definição da *natureza da tarefa* que podemos proporcionar um ambiente problematizador, no qual o aluno possa desenvolver práticas investigativas, o que leva à produção de novos conhecimentos.

Nas definições, optei por utilizar o termo *tarefa* em vez de *atividade*. Tal escolha se justifica perante a definição da palavra *tarefa* que assumo, a qual considera que esta, em um primeiro momento, é apenas uma proposição do professor. À medida que significados são atribuídos a sua resolução, a tarefa se transforma em atividade; ou seja, quando o aluno se mobiliza para sua realização, a tarefa passa a ser uma atividade. Sendo assim, a elaboração da tarefa é função do professor; já seu desenvolvimento enquanto atividade deve ser compreendido como uma ação conjunta de todos os integrantes do processo de aprendizagem (POWELL; BAIRRAL, 2006). No entanto, vale ressaltar que o material do estado de São Paulo utilizado faz uso do o termo *atividade*.

Para Hiebert *et al.* (1997), uma tarefa bem elaborada ou selecionada deve garantir que o ensino da matemática seja o foco principal da ação. Em outras palavras, afirmamos que uma tarefa que se apresente como potencial para a construção do conhecimento matemática deve ser compreendida pelos alunos como uma problemática a ser solucionada. Isto é, o que se busca é o fazer matemática por meio da resolução de problemas. No caso desta pesquisa, as tarefas já estavam elaboradas; nosso papel foi reorganizá-las para que os alunos as resolvessem.

Os autores ainda chamam atenção para a necessidade de garantirmos a potencialidade da reflexão e da comunicação das construções realizadas em torno da tarefa proposta. Segundo Hiebert *et al.* (1997, p. 18, tradução minha[12]), “refletir significa transformar algo em sua cabeça pensando novamente sobre isso, tentando relacionar esse algo com outro saber preexistente.” Por conseguinte, o processo de aprendizagem se faz a partir da ação de relacionar internamente as significações possíveis com o objeto investigado e externar essa produção por meio da comunicação com o outro. Durante o diálogo, surge a possibilidade refletir mais profundamente sobre as produções já realizadas, pois, ao ouvir opiniões sobre o método de resolução apresentado, pensa-se novamente sobre aquilo que já foi elaborado.

Portanto, a seleção das tarefas a serem transformadas em atividade é um importante momento para a promoção de um ambiente propício à produção de significações. Deve ficar claro que não há uma receita pronta para a elaboração ou a escolha de uma tarefa, mas sim se deve partir de um objetivo geral: a apresentação de uma situação que se caracterize como desafiadora ao aluno. Nesse sentido, entendo que as tarefas (atividades) propostas no material aproximavam-se de minhas intenções de pesquisa e tinham potencialidades para elaborar pensamento algébrico. Restava-me fazer as adaptações nas tarefas e organizar o ambiente de sala de aula para sua realização.

A segunda dimensão proposta pelos autores é o *papel do professor*. Embora o docente não seja o centro das práticas de ensino, ele é de inegável importância para a materialização de uma prática pedagógica voltada à resolução de problemas. A construção do espaço educativo deve ser pautada em tais preceitos e executada por todos os envolvidos no ambiente da sala de aula; ou seja, aluno e professor são coautores do mesmo processo.

Minha função como professor se concretizou na ação de fornecer orientações para a realização das tarefas propostas. Fiz orientações que permitissem desenvolver o conhecimento que pretendia que fosse construído pelos alunos com produção de significações. Minhas intervenções e mediações possibilitariam que houvessem tais produções.

Hiebert *et al.* (1997, p. 36, tradução minha[13]) frisam: “se os professores dizem muito, os alunos não terão que desenvolver suas próprias habilidades de resolução de problemas; se os professores dizem pouco, os alunos não farão muito progresso.” Logo, cabe ao professor a instauração e a manutenção de ambiente propício à discussão, à reflexão e à comunicação.

---

[12] “Reflecting means turning something over in your head, thinking again about it, trying to relate it to something else you know” (HIEBERT et al., 1997, p.18)

[13] “If teachers tell too much, students will not need to develop their own problem- solving abilities; if teachers tell too little, students will not make much progress.” (HIEBERT et al., 1997, p. 36)

Assim, estabelece-se uma cultura de sala de aula investigativa, buscando sempre o diálogo e a análise em torno das respostas e dos procedimentos que emergem durante a solução do problema proposto.

Ao relacionar as duas dimensões até aqui citadas, a tarefa e o papel do professor, constato o quão intercaladas elas se fazem. A realização ou a escolha de uma tarefa que possa ser transformada em atividade depende muito da função que o docente desempenha com seus alunos; e, mais do que isso, seu sucesso depende de uma cultura de atividade que se deve instaurar na sala de aula. Dessa forma, parto para a terceira dimensão, a ser discutida aqui, a *cultura social da sala de aula*.

Para que possamos pensar em aulas que, realmente, tenham como objetivo estabelecer um espaço de pensamento e reflexão, uma cultura voltada à comunicação deve ser construída, como apontam Hiebert *et al.* (1997). Segundo os autores, nessa cultura, alunos e professores devem estar engajados em objetivos comuns, em específico, na construção e na compreensão do significado do objeto investigado.

Nessa perspectiva de diálogo entre os atores do processo educativo, o ato de socializar as produções dos alunos se faz fundamental. É por meio dele que podemos construir um ambiente de aprendizagem no qual a voz de todos é emitida e ouvida, de modo que se proporciona uma elaboração social do conceito estudado.

Hiebert *et al.* (1997, p. 45, tradução minha) salientam:

> Incentivando os alunos a compartilhar e discutir os métodos de solução, eles têm a oportunidade de esclarecer suas ideias — para si e para os outros. Quando estratégias intuitivas dos alunos são tornadas públicas, elas podem ser analisadas mais profundamente, e todos podem aprender com elas. [14]

Assim, implementar um processo de reflexão sobre as soluções criadas para o problema proposto deve passar pela socialização dessas construções. A partir dessa dinâmica, será necessária elaboração de uma justificativa para a estratégia de resolução apresentada. Tendo em vista essas premissas, mais importante que olhar para uma resposta final, é entender como e o por que os estudantes chegaram a tal resolução.

Nessa perspectiva, o erro assume um importante papel na construção do conhecimento. Em um ambiente voltado à discussão e à reflexão, uma solução errada, quando surge, caracteriza-se como um valioso objeto de estudo, pois o que se busca não é simplesmente um resultado certo ou equivocado, mas sim uma justificativa para essa classificação. Dessa forma,

---

[14] "By encouraging students to share and discuss methods of solution, they have the chance to clarify their ideas - for themselves and for others. When students' intuitive strategies are made public, they can be analyzed more deeply, and everyone can learn from them

todos os integrantes do processo de aprendizagem terão a possibilidade de pensar sobre a resposta encontrada e comunicar suas conclusões. O erro, na maioria das vezes, é considerado como o levantamento de hipóteses.

Em suma, destaca-se a grande relação entre as dimensões *tarefa*, *papel do professor* e *cultura social da sala de aula*, pois é por meio delas que se constrói um potencial ambiente de aprendizagem. Para tanto, atentemos às *ferramentas matemáticas* necessárias para estruturar uma solução para a tarefa proposta.

Definimos a dimensão das ferramentas matemáticas como aquela composta por todos os possíveis suportes de aprendizagem, que não são apenas físico/manipulativos. Eles envolvem desde ferramentas constituídas a partir da linguagem oral, da notação escrita ou de qualquer outro instrumento por meio do qual o aluno possa pensar matematicamente. De maneira definida, Hiebert *et al.* (1997) apresentam os três tipos de ferramenta: linguagem, material e símbolos.

A introdução de ferramentas para a resolução de um problema pode partir tanto do professor como do aluno. A observação deve se concentrar na forma e no uso que se faz dela. Todavia, é o aluno que deve escolher mobilizar ou não determinado recurso, assim como decidir a forma de seu uso.

Segundo Hiebert *et al.* (1997, p. 10, tradução minha[15]),

> A atividade matemática requer o uso de ferramentas, e as ferramentas que usamos influenciam nossa forma de pensar sobre a *tarefa*. Em outras palavras, as ferramentas são um recurso essencial e um apoio para a construção de compreensão matemática.

É por meio das ferramentas que devemos manipular o objeto de estudo. Assim, buscamos a construção da significação em torno do conceito em elaboração.

A última dimensão proposta é a *acessibilidade do ensino de matemática para todos os alunos*. Segundo Hiebert *et al.* (1997), todos, sem qualquer distinção, podem acessar o conhecimento matemático. Assim, quando o professor propõe uma tarefa para sua sala, deve elaborar meios para que todos consigam desenvolvê-la, considerando a heterogeneidade do grupo discente.

Essa acessibilidade se sustenta à medida que todos podem refletir e significar a solução apresentada por cada um. Quando possibilitamos que todos conheçam o pensamento desenvolvidos por cada um, socializamos o conhecimento em construção. Assim, promovemos

---

[15] Texto original: "Mathematical activity requires the use of tools, and the tools we use influence the way we think about the activity. Another way to say this is that tools are an essential resource and support for building mathematical understanding […]."

um ambiente de discussão. Nessa perspectiva, é tarefa do professor fornecer meios para que todos os alunos participem da interação.

É a partir dessas cinco dimensões que formei um ambiente pedagógico pautado na resolução de problemas e na produção de significações para a realização desta pesquisa. Diante de tais afirmações, reasseguro a necessidade de aulas que sejam problematizadoras, que levem o aluno ao pensamento conceitual por meio da resolução de problemas. Por mais que essa definição esteja consolidada, tal atividade não é de fácil execução, pois, como apontam Smith e Stein (2012), a maioria das tarefas propostas por nossas escolas ainda é pautada na resolução de uma situação com um método previamente apresentado, não havendo, assim, a investigação e a construção de uma possível situação para a questão observada.

Em meio a essas demandas, o professor busca subsídios para a constituição de um ambiente adequado à promoção de discussões e investigações em torno do objeto do conhecimento a ser estudado. Smith e Stein (2012, p. 01, tradução minha[16]) afirmam:

> Criar oportunidades baseadas em discussões para o aprendizado dos alunos exigirá aprendizado por parte de muitos professores. Primeiro, os professores precisarão aprender como selecionar e configurar tarefas de instrução cognitivamente desafiadoras em suas salas de aula, uma vez que tais tarefas de alto nível fornecem a base para debates valiosos. [...] Em segundo lugar, os professores devem aprender a apoiar seus alunos à medida que estes se envolvem e discutem suas soluções para tarefas cognitivamente desafiadoras.

A habilidade de ser capaz de orquestrar uma aula que vise à produção de significações, a partir da resolução problemas é um constante aprendizado tanto para o professor como para seus alunos. Isso porque o que se propõe é uma dinâmica de sala de aula capaz de potencializar as discussões em torno dos conceitos a serem trabalhados. Para auxiliar a organização desse momento, Smith e Stein (2012) sugerem que uma aula que tome por base a resolução de problemas seja desenvolvida em três fase: o lançamento, a exploração e a discussão.

Compreendo a fase do *lançamento* como o instante em que o professor apresenta o problema a ser resolvido, assim como as ferramentas disponíveis para tal tarefa. Também nessa etapa, o docente deve deixar claro qual a natureza/forma dos produtos que precisam ser produzidos a partir do desenvolvimento da tarefa proposta. Para Van de Walle (2009), esse momento é denominado *antes* e tem a mesma função: planejar a tarefa e introduzi-la em sala de aula, dando os esclarecimentos necessários para sua resolução.

---

[16] Texto original: "Creating discussion-based opportunities for student learning will require learning on the part of many teachers. First, teachers will need to learn how to select and set up cognitively challenging instructional tasks in their classrooms, since such high-level tasks provide the grist for worthwhile discussions. Second, teachers must learn how to support their students as they engage with and discuss their solutions to cognitively challenging tasks."

Para o desenvolvimento da primeira tarefa proposta por esta pesquisa, após entregar o material contendo as situações a serem investigadas, os grupos foram orientados a desenvolver discussões sobre o que a tarefa solicitava. Já nas outras tarefas, o material foi apenas entregue a cada um dos grupos, não havendo instruções prévias sobre os procedimentos a serem adotados, visto que os alunos já tinham se apropriado da dinâmica das aulas.

Logo após a fase do lançamento, está a *exploração*, momento em que são desenvolvidas as discussões sobre o problema a ser solucionado. Como apontam Smith e Stein (2012), essas discussões devem ser realizadas em pares ou grupos, priorizando a interação. Durante esse estágio, o papel do professor consiste em incentivar os alunos a resolverem o problema proposto da forma como julgarem adequada, ressaltando sempre que estes devem ser capazes de explicar para os colegas a estratégia de resolução adotada, justificando os caminhos percorridos. Van de Walle (2009) denomina esse momento de *durante*, quando os alunos irão resolver a situação proposta.

Durante a exploração das tarefas aqui propostas, percorri os grupos, observando e monitorando as discussões que se desenvolviam. Com base nessas constatações, realizei intervenções com o objetivo de auxiliar na elaboração conceitual que se apresentava. Algumas dessas mediações foram gravadas e transformadas em episódios para análise.

Por fim, há a fase do *discutir e resumir*. Nela, os alunos deverão apresentar as soluções elaboradas, assim como suas explicações e suas justificativas. O que se busca não é uma homogeneidade de respostas (corretas e incorretas), mas sim a ocorrência de contrastes entre as diferentes soluções, com o objetivo da formação de significações em cada caminho descrito pelos alunos. Em meio a essa dinâmica, é preciso montar um ambiente propício para discussões, as quais devem tencionar a construção do conceito que a tarefa em questão objetiva tratar. Para Van de Walle (2009), esse é o momento *depois*, em que ocorre a socialização e a discussão das estratégias dos alunos, seguidas da síntese do professor.

O momento do discutir e resumir se fez presente nas aulas que constituem objeto de observação deste trabalho. Assim que os grupos finalizavam suas discussões, partíamos para a socialização das produções, seguida da síntese das ideias trabalhadas.

De forma intencional, devemos focar grande parte de nossos esforços na promoção de um ambiente que priorize essas discussões. Smith e Stein (2012) afirmam que alunos aprendem e, consequentemente, formam significações quando são encorajados a se tornar autores de suas próprias ideias, sendo responsabilizados por raciocinar e entender diferentes ideias.

Essas autoras propõem uma forma de organização e planejamento de aulas pautadas na resolução de problemas que auxilia na edificação de um ambiente como o descrito. Indicam cinco práticas capazes de orquestrar discussões, as quais nortearam minha ação em sala de aula. O foco dessas práticas não é a produção de respostas imediatas às produções dos alunos, mas sim o ato de planejar e tentar antecipar os possíveis caminhos a serem traçados pelos alunos durante a execução da tarefa. Elenco as etapas sugeridas pelas pesquisadoras: antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e conectar.

Smith e Stein (2012) descrevem o *antecipar* como o emprego de esforços do professor para visualizar de modo ativo como seus alunos podem abordar matematicamente a tarefa a ser desenvolvida. Friso que essa prática se encontra antes do lançamento da tarefa proposta. As autoras destacam:

> Isso envolve muito mais do que simplesmente avaliar se uma tarefa está no nível certo de dificuldade ou de interesse para os estudantes e vai além de considerar se eles estão ou não obtendo a resposta “certa”. Antecipar as respostas dos alunos envolve estabelecer expectativas ponderadas sobre o modo como os alunos podem interpretar matematicamente um problema, o conjunto de estratégias — corretas e incorretas — que podem ser usadas para enfrentá-lo e a forma como essas estratégias e interpretações podem estar relacionadas aos conceitos matemáticos, às representações, aos procedimentos e às práticas que o professor gostaria que seus alunos aprendessem. (SMITH; STEIN, 2012, p. 8, tradução minha[17])

O que se espera dessa prática é que o professor seja capaz de analisar as possibilidades de convergência das potenciais estratégias de solução a serem elaboradas por seus alunos com o conhecimento objetivado por sua aula. O antecipar, nas práticas aqui descritas, teve como ponto de partida as instruções dadas pelo material curricular *Caderno do Professor*, o qual revela algumas possibilidades de produções acerca da tarefa proposta. Também destaco que, com base nas observações realizadas em cada aula desenvolvida, as antecipações foram se dando de uma maneira mais direcionada à realidade que se apresentava. A partir dessa antecipação, vejamos a segunda prática elencada: monitorar.

Define-se como a prática de *monitorar* o ato de o professor observar a elaboração das estratégias traçadas pelos alunos durante a execução da tarefa, buscando, assim, já selecionar quais raciocínios e alunos deverão ser focados durante as discussões que seguirão na dinâmica da aula. Geralmente, essa prática é desenvolvida pelo professor ao circular entre os grupos formados.

[17] Texto original: “This involves much more than simply evaluating whether a task is at the right level of difficulty or of sufficient interest to students, and it goes beyond considering whether or not they are getting the “right” answer. Anticipating students’ responses involves developing considered expectations about how students might mathematically interpret a problem, the array of strategies—both correct and incorrect—that they might use to tackle it, and how those strategies and interpretations might relate to the mathematical concepts, representations, procedures, and practices that the teacher would like his or her students to learn.”

As autoras ressaltam que

> é importante notar, no entanto, que o monitoramento envolve mais do que apenas assistir aos alunos e ouvi-los. Durante esse período, o professor também deve fazer perguntas que tornem o pensamento dos estudantes visível, ajude-os a esclarecer sua lógica, assegure que os membros do grupo estejam engajados na atividade e pressione os discentes a considerar aspectos da tarefa que precisam resolver. Muitas dessas questões podem ser planejadas antes da aula, com base nas soluções antecipadas. (SMITH; STEIN, 2012, p. 10, tradução minha[18])

Portanto, monitorar não se caracteriza como uma ação passiva de simples observação, mas sim como um momento em que o professor deve auxiliar os alunos na elaboração e na expressão de seus pensamentos. A prática do antecipar auxilia este período da aula, uma vez que o docente já tem algumas expectativas sobre os possíveis caminhos a serem adotados por seus alunos para a resolução da tarefa proposta. No caso desta pesquisa, durante a exploração das tarefas propostas, enquanto eu realizava as intervenções, já selecionava produções a serem salientadas durante o instante do discutir e resumir.

Com a finalização da prática do monitorar, encerra-se a fase da exploração, partindo, assim, para a etapa do discutir e resumir. Para que ela possa se concretizar de uma forma produtiva, utiliza-se o *selecionar*, que consiste em, após um cuidadoso monitoramento das estratégias desenvolvidas pelos alunos, elencar quais discentes devem socializar suas produções durante a discussão.

Essa seleção deve ser utilizada pelo professor de forma intencional para que haja um controle da discussão, sempre priorizando a temática elencada como objeto de estudo proposto para a aula em questão. Para isso, o professor pode, previamente, informar ao aluno (ou grupo de alunos) que ele vai socializar suas construções ou, à medida que a discussão se desenvolve, solicitar que grupos específicos apresentem suas construções (sem antes ter comunicado a eles). Outra alternativa seria a ação de solicitar que os alunos, voluntariamente, apresentem suas construções e, a partir dessas falas espontâneas, eleger as próximas socializações. Por meio dessa prática, o professor pode demonstrar o interesse e a valorização das produções realizadas pelos grupos, como nos afirma Smith e Stein (2012).

Nas práticas desta pesquisa, a ação do selecionar se deu de forma concomitante aos momentos de observação e intervenção nos grupos. A partir dessa análise, eu já selecionava os

[18] Texto original: “It is important to note, however, that monitoring involves more than just watching and listening to students. During this time, the teacher should also ask questions that will make students’ thinking visible, help students clarify their thinking, ensure that members of the group are all engaged in the activity, and press students to consider aspects of the task to which they need to attend. Many of these questions can be planned in advance of the lesson, on the basis of the anticipated solutions.”

aspectos que deveriam ser ressaltados, buscando construir uma discussão orientada para o objeto de investigação definido para aquela aula.

Por meio da seleção definida, podemos aplicar a prática do *sequenciar*, a qual consiste em eleger uma ordem de socialização das produções. Com isso, tentamos, por meio de uma ação intencional e planejada, maximizar a potencialidade da produção de significações em torno do conceito tido como meta da aula em questão.

Smith e Stein (2012) apresentam algumas estratégias para a construção de uma sequência que objetive a produção de significações. As autoras apontam que, por exemplo, podemos organizar o momento as apresentações dos grupos ressaltando uma determinada estratégia utilizada pela maioria dos grupos. Assinalam ainda que o professor pode partir de uma resolução construída a partir de um pensamento mais concreto (uso de desenhos ou materiais concretos) para prosseguir com soluções mais abstratas (uso de linguagem algébrica).

As autoras salientam alguns caminhos para a construção de uma sequência que tenha por objetivo a produção de significações:

> Essa abordagem — passando do concreto para o abstrato — serve para validar soluções menos sofisticadas e permite conexões entre métodos adotados. Se um equívoco comum for subjacente a uma estratégia usada por vários alunos, o professor pode querer que ele seja abordado primeiro para que a turma possa esclarecer esse mal-entendido e desenvolver formas mais bem-sucedidas de lidar com o problema. (SMITH; STEIN, 2012, p. 11, tradução minha[19])

Nas propostas das autoras, o professor pode definir diferentes estratégias para realizar as discussões, devendo sempre ficar claro para ele a justificativa da escolha de uma ou outra estratégia, pois, como já mencionado, todas as ações aqui elencadas devem ser desenvolvidas de forma intencional e consciente de seus reflexos para a elaboração de significações. Em minhas práticas, busquei criar um sequenciamento de socializações que priorizasse o objeto definido para a aula em questão. Quanto às estratégias, em alguns momentos, optei por gerar uma sequência que se organizasse tendo em vista as soluções construídas a partir das mesmas características. Em outros instantes, optei por evidenciar os contrapontos entre diferentes soluções. Houve também casos em que parti de uma solução que apresentasse algum problema para que os outros grupos propusessem adequações a ela, criando comparações com as táticas já construídas.

[19] Texto original: “This approach—moving from concrete to abstract—serves to validate less sophisticated approaches and allows for connections among approaches. If a common misconception underlies a strategy that several students used, the teacher might want to have it addressed first so that the class can clear up that misunderstanding to be able to work on developing more successful ways of tackling the problem.”

Por fim, há a prática do *conectar*, a qual se faz a partir da ação do professor de auxiliar os alunos a criar conexões entre as produções apresentadas. Assim, tenciona-se a elaboração do conceito tido como foco da aula em questão. Smith e Stein (2012, p. 11, tradução minha[20]) afirmam que

> o professor pode ajudar os alunos a fazer julgamentos sobre as consequências de abordagens diferentes para a gama de problemas que podem ser resolvidos, sobre a precisão e a eficiência em resolvê-los e sobre os tipos de padrões matemáticos que podem ser mais facilmente discernidos. Em vez de ter discussões matemáticas que consistem em separar as diferentes maneiras de resolver um problema em particular, o objetivo é fazer com que as socializações dos alunos se construam umas sobre as outras para desenvolver ideias matemáticas poderosas.

É por meio da prática do conectar que o professor deve auxiliar os alunos a estabelecer possíveis relações entre as resoluções apresentadas. Assim, elabora-se o conceito tido como meta, enfatizando os possíveis pontos de convergência ou divergência entre as estratégias apresentadas. No caso deste trabalho, após o desenvolvimento das socializações e das discussões entre os grupos, propus o estabelecimento de conexões entre as diferentes produções apresentadas, com vistas à organização das ideias.

É possível relacionar as definições de Smith e Stein (2012) com as Van de Walle (2009) quanto às fases de desenvolvimento de uma aula pautada na resolução de problemas, assim como conectar essas fases com as cinco práticas introduzidas por Smith e Stein (2012). Tal vínculo pode ser observado no Quadro 9:

Quadro 9 – Relação entre as ideias de Smith e Stein (2012) e Van de Walle (2009) sobre os momentos e a organização de uma aula pautada na resolução de problemas

<table>
<tr><th colspan="2">Fases da aula</th><th>Prática de discussões</th></tr>
<tr><th>Smith e Stein (2012)</th><th>Van de Walle (2009)</th><th>Smith e Stein (2012)</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2">Antecipar</td></tr>
<tr><td>Lançamento</td><td>Antes</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exploração</td><td rowspan="3">Durante</td><td>Monitorar</td></tr>
<tr><td>Selecionar</td></tr>
<tr><td>Sequenciar</td></tr>
<tr><td>Discutir e resumir</td><td>Depois</td><td>Conectar</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo pesquisador

[20] Texto original: “The teacher can help students to make judgments about the consequences of different approaches for the range of problems that can be solved, one’s likely accuracy and efficiency in solving them, and the kinds of mathematical patterns that can be most easily discerned. Rather than having mathematical discussions consist of separate presentations of different ways to solve a particular problem, the goal is to have student presentations build on one another to develop powerful mathematical ideas.”

Observa-se, assim, a correspondência entre os conceitos relacionados às fases propostos por Smith e Stein (2012) e Van de Walle (2009). Posso, ainda, estabelecer uma relação entre as práticas voltadas ao desenvolvimento das discussões (SMITH; STEIN, 2012) na qual cada uma delas pode ser vinculada a uma das fases citadas. Compreendo que a prática do *antecipar* deve ser vista como um momento anterior ao *lançamento/antes*, uma vez que envolve um planejamento e uma estimativa prévia das possibilidades de estratégias de resolução. As práticas *monitorar, selecionar* e *sequenciar* são alocadas no nível *exploração/durante*, uma vez que ocorrem durante o desenvolvimento das investigações dos alunos. Já a prática do *conectar* é relacionada à etapa do *discutir e resumir/depois* por se caracterizar como a ação de relacionar as diferentes estratégias apresentadas.

A partir do cenário aqui descrito, organizei as tarefas que possibilitariam as explorações aqui elencadas. Parti de uma concepção de aula que utiliza a investigação e a resolução de problemas para a construção dos conceitos tidos como meta.

2.4 As tarefas

Apresento a seguir o Quadro 10, que descreve as tarefas realizadas no caminho percorrido por esta pesquisa. Nele, exponho a data de aplicação, uma breve descrição da tarefa e suas potencialidades dentro da sequência proposta.

Quadro 10 – Cronograma de tarefas propostas: investigando sequências por meio da aritmética e da álgebra

Data	Tarefa proposta	Descrição da realizada	Potencialidades
27/09/2017	T1	Identificar a ocorrência de uma sequência infinita não numérica (símbolos).	Levantar hipóteses sobre diferentes formas de compreender uma sequência infinita não numérica. Criar caminhos para prever a ocorrência de símbolos em posições da sequência inacessíveis.
04/10/2017	T2	Elaborar regras para a previsão de termos inacessíveis de sequências não numéricas.	Possibilitar o desenvolvimento de discussões sobre formas de elaborar regras de generalização.
19/10/2017	T3	Utilizar regras elaboradas para prever termos inacessíveis.	Possibilitar o desenvolvimento de argumentos favoráveis ou contrários às regras de generalização criadas anteriormente, podendo chegar a uma reelaboração delas.

25/10/2017	T4	Criar generalizações por intermédio da observação do padrão de ocorrência de um símbolo específico.	Permitir a expansão do conceito de generalização por meio da observação de determinado símbolo na sequência.
26/10/2017	T5	Compreender um problema de situação concreta, com aplicação de sequência, buscando a generalização para casos específicos.	Elaborar regras de formação para sequências, baseadas na observação de termos específicos.
01/11/2017	T6	Utilizando uma sequência infinita, obtida por meio do cálculo de potências de uma base definida, observar a regularidade em uma das casas decimais.	Criar relação entre o campo aritmético e o algébrico por meio de cálculo e elaboração de generalizações, analisando uma sequência.
08/11/2017	T7	Por meio de um padrão visual (geométrico), compreender uma sequência infinita e elaborar uma regra de generalização para os termos.	Expandir as possibilidades de generalização utilizando um padrão visual.
16/11/2017 21/11/2017 22/11/2017	T8	Por meio de um padrão visual, compor uma regra de generalização para a previsão de termos, traduzindo da língua materna para a linguagem algébrica.	Oportunizar o contato com a linguagem algébrica mediante a elaboração de regra de generalização.
23/11/2017 24/11/2017 28/11/2017 29/11/2017 30/11/2017	T9	Investigar sequências infinitas, objetivando a criação de uma regra de generalização, utilizando para expressão a linguagem algébrica.	Expandir a possibilidade de expressão das regularidades verificadas por meio da linguagem algébrica.

Fonte: Elaboração do autor

É importante destacar que as tarefas 8 e *9* se estenderam por um número maior de aulas devido a sua complexidade. Isso se deve a elas visarem a possibilitar uma síntese e uma aplicação dos conceitos trabalhados nas atividades anteriores.

Na busca por tarefas que pudessem ser problematizadas para os alunos em questão, escolhi a adoção do material curricular oficial do estado, uma vez que este contém uma proposta voltada ao desenvolvimento de discussões em torno de problemas propostos, levando, assim, a um cenário propício à investigação. Outro fator que motivou a escolha de tal material foi as constantes prescrições realizadas pela Secretaria de Educação para sua utilização, as quais exercem certa pressão sobre o corpo docente para o uso das atividades indicadas na publicação oficial.

Tais tarefas foram retiradas do material curricular oficial da Secretaria da Educação do estado de São Paulo. Esses materiais fazem parte do *Programa São Paulo Faz Escola*, o qual será mais bem explorado no capítulo 3. Nos Apêndices, consta a íntegra de todas as tarefas utilizadas como instrumentos para a produção dos dados aqui apresentados e analisados.

Para a execução das tarefas, os alunos se organizaram em grupos de, aproximadamente, quatro integrantes. A escolha dos elementos de cada grupo foi realizada pelos próprios alunos. Tal definição se justifica pela minimização de possíveis problemas na interação entre os indivíduos. Entre as diferentes tarefas, também ocorreram alterações nos grupos de alunos, devido à ocorrência de faltas. Todas as tarefas, em cada aula, tiveram três momentos: investigação, socialização e fechamento.

Primeiramente, distribuí a cada um dos grupos uma folha contendo a tarefa a ser resolvida, material que deveria ser utilizado para os registros escritos e seria recolhido ao fim da resolução (todos os alunos também dispunham da tarefa impressa em seu material curricular oficial). Nesse momento, solicitei aos alunos que discutissem as possíveis soluções para a tarefa apresentada. Em meio às interações que ocorriam internamente nos grupos, realizava mediações, objetivando a construção dos conceitos a serem estudados.

Quando percebia que a grande maioria dos grupos já tinha encerrado sua produção, conduzia a sala para a socialização das produções. Nessa fase, lia cada um dos itens que compunham a tarefa em questão e solicitava aos grupos que comunicassem suas soluções. Após a apresentação de cada solução, todos podiam argumentar sobre aspectos corretos ou não das afirmações realizadas. Durante essas interações, também realizava mediações por meio de questionamentos que tinham a intencionalidade de promover a discussão em torno dos conceitos trabalhados.

Por fim, passava para o fechamento da tarefa. Nesse momento, realizava uma síntese das soluções apresentadas.

2.5 Aportes metodológicos para a pesquisa

A presente pesquisa se define no âmbito das investigações qualitativas, sob as bases dos trabalhos da teoria histórico-cultural desenvolvida por Lev S. Vigotski e seus seguidores. Optei pela pesquisa qualitativa porque ela compreende de forma ativa a realidade investigada, assumindo os processos de mudança que ocorrem tanto no pesquisador como nos sujeitos pesquisados. Desse modo, o estudo se constrói a partir subjetividade do pesquisador e de todos que estão inseridos no trabalho investigativo.

Sob os moldes da perspectiva histórico-cultural, o que se propõe é uma investigação pautada nas interações que ocorrem durante as atividades propostas. Com isso, busco indícios das significações produzidas durante esse processo. Emerge, assim, o conceito de pesquisa-intervenção, “uma vez que fazer pesquisa qualitativa na perspectiva histórico-cultural consiste não apenas em descrever a realidade mas também em explicá-la, portanto, supõe intervir na realidade.” (FREITAS, M., 2009, p. 2).

É importante destacar que meu papel enquanto pesquisador não se constitui dentro dos processos de pesquisa como o de um mero observador. Pelo contrário, apresento-me como participante ativo e interventor nas dinâmicas adotadas.

Diante de tais aportes teóricos e do cenário já descrito, surge a questão de pesquisa: “Como as significações são produzidas pelos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental na realização de tarefas relativas ao pensamento algébrico?”. Para responder a essa indagação, determinei como objetivo geral investigar os modos de produção de significação do pensamento algébrico produzidos por alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental a partir de tarefas retiradas do material curricular oficial do estado de São Paulo. Estabeleci também os seguintes objetivos específicos:

1) buscar e analisar as potencialidades do material utilizado na rede estadual paulista para o ensino de matemática e, em especial, de álgebra;
2) investigar a elaboração do pensamento algébrico, tendo como foco as interações ocorridas entre os sujeitos participantes da sala de aula;
3) analisar os indícios da produção de significações a partir do desenvolvimento de tarefas que tencionem a constituição de generalizações algébricas, tendo como base a observação de padrões.

Para que tais objetivos pudessem ser contemplados, usei a análise microgenética. Isso se deve à necessidade de atentar às minúcias presentes nas produções orais e escritas, pois, como afirma Góes (2000, p. 9), essa ferramenta,

> de um modo geral, trata-se de uma forma de construção de dado que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos.

Sendo assim, explicito mais uma opção metodológica deste trabalho: a análise de episódios. Embora realize recortes nos dados produzidos, o que é proposto não é uma redução do cenário de análise, mas sim a criação de condições propícias para a emergência dos detalhes que deverão compor as análises aqui propostas. Tais colocações também estão imbricadas com as proposições vigotskianas, as quais consideram a gênese do funcionamento humano nas interações com o social, daí a denominação genética. Para que tais interações pudessem ser descritas e analisadas, Vigotski (1991) defende a necessidade da explicitação das minúcias presentes nelas, surgindo, assim, a denominação *micro*. Com a junção desses dois signos, temos a microgenética.

A utilização de uma análise microgenética em uma pesquisa-intervenção se faz muito útil. Por meio de tal prática, é possível que o pesquisador dê o devido enfoque para os detalhes dos aspectos observados. Para essa abordagem metodológica, deve ficar claro que o olhar investigativo está voltado para os processos que se desenvolverão, e não necessariamente para as produções finais realizadas durante as tarefas propostas.

Para a teoria histórico-cultural, é importante a compreensão do contexto social e histórico em que o momento de realização da pesquisa se insere. Entretanto, deve ficar bem definido que o que se busca com essa contextualização não é o apontamento de uma relação de causa e efeito gerado quando comparamos o passado com a situação do presente observada, mas sim, conforme Góes (2000, p. 13), o estabelecimento de uma relação dinâmico-causal, ou seja, uma relação biunívoca, na qual a causa pode transformar-se em efeito e vice-versa.

Por conseguinte, em uma pesquisa desenvolvida dentro da teoria histórico-cultural, não são buscados causas e efeitos, mas sim indícios de possibilidades (sinais) de significações observadas no processo, objeto de pesquisa. Portanto, posso dialogar com Pino (2005, p. 178) quando afirma:

> Todavia, procurar por indícios de um processo é muito diferente de procurar relações causais entre fatos. Isso coloca-nos diante de opções metodológicas também diferentes. Com efeito, procurar indícios implica em optar por um tipo de análise que siga pistas, não evidências, sinais, não significações, inferências, não causas desse processo. Mas, por outro lado, verificar a existência de um processo não é, simplesmente, mostrar os fatos que façam parte dele, mas seguir o curso dos acontecimentos para verificar as transformações que se operam nesse processo, concretamente, a conversão das funções biológicas sob a ação da cultura.

A opção metodológica que se faz nesta pesquisa qualitativa se justifica com as intencionalidades de olhar para as minúcias de processos. Nestes, busco possibilidades de implicações produzidas pelas relações sociais que se estabelecem durante o desenvolvimento das tarefas propostas.

Tendo por base esses referenciais teóricos, o que se objetiva com este estudo não é a análise dos fatos, mas sim dos processos, ou seja, da história da gênese desses fatos. Nesse ponto, apoio-me nas contribuições de Vigotski (1997). O autor aponta as diferenças entre a análise de coisas e a dos processos que levam a estas:

> A análise das coisas deve ser diferenciada da análise de processos, a qual leva atualmente a um desdobramento dinâmico dos principais pontos que formam o curso histórico do processo. Neste sentido, somos conduzidos a um novo entendimento da análise, não pela psicologia experimental, mas pela psicologia genética. Gostaríamos de apontar a mudança mais importante que a psicologia genética introduz na psicologia geral [...] a introdução do ponto de vista genético na psicologia experimental. A principal tarefa da análise é reconstrução do processo desde o seu estágio inicial ou, em outras palavras, converter a coisa no processo. (VIGOTSKI, 1997, p. 68)

Pino (2005, p. 179) chama a atenção sobre um aspecto muito importante para a evolução da pesquisa qualitativa: a contraposição entre a análise descritiva do processo observado e a análise explicativa dele. Uma leitura desatenta dos pressupostos que dão origem às abordagens metodológicas assumidas por esta pesquisa pode levar ao entendimento de que o que se busca com esta produção é apenas a descrição do cenário produzido pelo processo estudado. Essa visão não revela a real intencionalidade da investigação, pois, por meio da abordagem microgenética, a qual nos propicia o encontro de indícios que nos levarão aos sinais de significação, também se objetiva explicar as características observadas durante a descrição.

Logo, a utilização do paradigma indicial[21] se faz de grande valia, pois busco nos chamados indícios as devidas explicações para as descrições previamente realizadas. Portanto, acrescento a importância desse paradigma, pois, como afirma Pino (2005, p. 181), "por meio de tais ideias, se tenta desvendar o lado oculto dos fatos naturais, inertes ou animados, e dos fatos culturais."

Para que tenhamos a possibilidade técnica de realizar observações detalhadas dos processos ocorridos durante as tarefas propostas, necessitamos de diversos recursos de registro dos cenários observados. Por isso, apresento a seguir os instrumentos que possibilitaram tal realização.

2.5.1 Instrumentos e procedimentos de análise

Para a produção dos dados que compõem esta pesquisa, utilizei como procedimento principal a videogravação. Durante a realização das tarefas, foram distribuídas três câmeras, cada uma ficava com um grupo de alunos. Como a quantidade de grupos de estudantes é

---

[21] Para maiores esclarecimentos sobre o termo, ler Pino (2005).

superior ao número de câmeras, a cada nova tarefa, alternava aleatoriamente as agremiações que realizariam a videogravação de suas produções. Além disso, com uma quarta câmera, realizei as videogravações das mediações feitas durante a execução das tarefas propostas.

Góes (2000) descreve a videogravação como procedimento fundamental ao desenvolvimento de pesquisa embasada em uma metodologia microgenética. Somente com esse recurso é possível captar as demandas implicadas na construção de dados que realmente representem as produções realizadas, por conta dos diversos meios semióticos em que estas se apresentam. Assim, são capturadas as múltiplas linguagens empregadas.

Por meio da análise dessas videogravações, foram selecionados os episódios que integram este trabalho, os quais foram transcritos. Busquei a emergência não só das comunicações orais e escritas presentes nas interações observadas, mas também das expressões e dos gestos, (re)construindo o cenário de observação. Isso permitiu uma análise minuciosa dos processos que objetivava verificar.

A seleção dos episódios se deu a partir de sua potencialidade para a emergência de conceitos relacionados à formação do pensamento algébrico. Dessa forma, os momentos aqui retratados foram escolhidos de forma intencional, considerando as interações entre os sujeitos participantes. Destaco que foram desenvolvidas nove tarefas para a produção dos dados, mas não elegi dados provenientes de todas essas tarefas nem de um único episódio de cada tarefa.

Embora cada uma das aulas utilizadas para a produção dos dados tenha sido planejada considerando três momentos (antes/introdução, durante/desenvolvimento e depois/socialização), a constituição dos episódios aqui apresentados não teve por objetivo a retratação de todas essas fases. Cada um dos episódios representa um instante em que emergiu determinado conceito relacionado à elaboração do pensamento algébrico, bem como questões voltadas à aplicação da teoria histórico-cultural.

Outro recurso proposto nesta pesquisa é a produção das notas no instrumento diário de campo. Esse instrumento sugere a produção de uma densa descrição das pessoas, dos objetos, dos lugares, dos acontecimentos, das atividades e dos demais detalhes que podem ser observados no cenário investigado. Bogdan e Biklen (1994, p. 150) definem que as notas de campo são “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo.”

Ao fim de cada aula direcionada à produção dos dados, realizei as notas do diário de campo. Registrava minhas impressões sobre os momentos captados, detalhes sobre o contexto geral dos dias em que se realizavam as tarefas e demais minúcias que não podem ser captadas pela videogravação em sala de aula.

Embora o recurso da videogravação seja um expoente para as pesquisas qualitativas, ele não é capaz de captar algumas informações importantes. Cito, por exemplo, as impressões imediatas do pesquisador participante do processo registradas pelas notas transcritas no diário de campo. Posto que a videogravação pode captar precisamente o cenário visual que se constrói no momento da pesquisa, o caráter de observação pautado nas interpretações, a reprodução do ponto de vista do pesquisador, no ato da produção dos dados, não pode ser capturada por esse recurso. Assim, optei pelo desenvolvimento de registros que objetivassem a transcrição desses aspectos.

Também foram utilizados como instrumentos os registros escritos, produzidos pelos alunos durante a execução das tarefas. Eles integram o quadro de análise, compondo um cenário como maiores detalhes das emergências e das relações estabelecidas durante a produção dos dados.

Após a produção dos dados por meio dos procedimentos e instrumentos já citados, foi realizada uma minuciosa verificação de todo o material produzido. Ao fim desse processo, escolhi os episódios a serem descritos e, posteriormente, analisados por esta pesquisa.

Para essa seleção, busquei a emergência dos elementos constituintes do pensamento algébrico, assim como da teoria histórico-cultural, procurando apresentar os indícios dessas ocorrências nas interações destacadas. Embora tenha procurado destacar cada episódio para apresentar um único conceito específico do pensamento algébrico aqui destacado, alguns saberes se revelam em mais de um episódio, ou mesmo em todos os episódios, principalmente quando voltei meu olhar, de forma direta, à perspectiva histórico-cultural.

No processo de análise, conforme a teoria microgenética pressupõe, atentei para as minúcias das dinâmicas estabelecidas durante as aulas, focalizando, assim, as interações ocorridas entre os sujeitos desta pesquisa, os alunos. A partir disso, os episódios foram transcritos. Organizei-os em turnos de fala, apresentando sua sequência de ocorrência, bem como os sujeitos que se pronunciam. Em meio às falas, há excertos de detalhes visuais do episódio observado, os quais contribuem para a compreensão do que é descrito.

É importante destacar a influência que o ato de "realizar a pesquisa", com a introdução dos instrumentos aqui apresentados, desempenhou na atividade dos alunos. É fato que a introdução de câmeras na dinâmica da sala de aula altera o ambiente, pois o registro das falas, dos gestos e das ações dos alunos durante a execução das tarefas proposta leva a uma intencionalidade por parte deles.

Na transcrição, os episódios foram organizados em turnos sequenciais, denominados pela inicial *T*, posposta por uma numeração (por exemplo: T01, T02, T03...). Para identificar os sujeitos, usamos nomes fictícios[22]. Minhas falas (professor) são precedidas pela letra *P*. Todas as falas diretas estão transcritas em itálico. Os dados entre colchetes referem-se a expressões gestuais, complementos de fala ou mesmo a aspectos importantes para a análise, os quais não são visíveis em uma linguagem oral.

2.6 O material curricular analisado

Também elegemos como parte do contexto desta pesquisa o material curricular oficial da rede paulista de ensino, que integra o programa *São Paulo Faz Escola*.[23] Especificamente, meu olhar se direciona aos materiais didáticos da disciplina de matemática, do segmento *Ensino Fundamental – anos finais*, quando o livro faz menção à generalização de padrões por meio da formação do pensamento algébrico.

Para a construção deste contexto apresentamos o capítulo a seguir, onde apresento e discuto alguns aspectos desse material, no que se refere ao recorte desta pesquisa. Desse modo, constatei pontos de convergência e divergência com a teoria histórico-cultural e com as concepções sobre a elaboração do pensamento algébrico assumidas por este trabalho.

---

[22] A presente pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da Universidade São Francisco, na data de 10 de agosto de 2017, por meio do processo CAAE 69062517.0.0000.5514, número do parecer 2.210.996.

[23] Esse programa foi criado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2008), institui o currículo oficial dessa rede de ensino, bem como implementa a utilização de materiais didáticos padronizados em todas as escolas pertencentes a essa esfera.

3 O MATERIAL CURRICULAR OFICIAL DO ESTADO DE SÃO PAULO E SUAS POTENCIALIDADES PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO VOLTADO A GENERALIZAÇÕES – NOSSO CONTEXTO DE PESQUISA

Em 2008, a Secretaria de Educação de São Paulo implementou o programa *São Paulo Faz Escola* (SPFE) em todas as escolas da rede estadual. Segundo os documentos oficiais, em especial o currículo oficial, seu objetivo é unificar os currículos adotados nas unidades escolares bem como enfrentar os baixos índices de rendimento identificados pelas avaliações externas realizadas, em especial o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar (Saresp). Em 2010, esse programa tornou-se o currículo oficial do estado, sendo criados materiais para fornecer subsídios ao trabalho de professores, gestores e alunos.

Dentre esses materiais criados, destaco os intitulados *Caderno do Aluno* e *Caderno do Professor*, os quais se constituem como um recurso didático, direcionado a todas as disciplinas componentes do currículo oficial. Essas duas publicações são compostas por sequências didáticas dirigidas a cada um dos tópicos elencados pelo currículo.

Criados pela Secretaria de Educação de São Paulo (SEE-SP), os chamados cadernos foram elaborados por profissionais ligados a universidades estaduais, sendo estes convidados pela Fundação Vanzolini[24], em especial, pela divisão de Gestão de Tecnologias em Educação, responsável pela coordenação da produção dos materiais. É importante frisar que coube à SEE-SP apenas definir as diretrizes de formatação e os princípios pedagógicos a serem aplicados durante a elaboração do referido instrumento de ensino.

Quanto à implementação do programa, podemos classificar como conturbada. A inicial imposição desses materiais, atrelada a uma constante supervisão por parte de instâncias superiores da SEE-SP, chamando a atenção para as diversas publicações do órgão e destacando a suposta correlação entre o baixo rendimento nas avaliações externas e a falta de um currículo unificado, levaram à construção de um ambiente composto por inúmeras tensões entre professor e escola, como aponta Catanzaro (2012).

Nessa dinâmica, não foram raros os momentos de grandes críticas ao material curricular. Além desse cenário de imposição de sua utilização como aporte das atividades desenvolvidas em sala de aula, havia uma grande incompreensão dos docentes quanto à proposta metodológica dos cadernos. Embora tenham sido ofertados momentos de formação continuada aos docentes

[24] A Fundação Vanzolini é uma instituição privada, sem fins lucrativos, criada, mantida e gerida pelos professores do Departamento de Engenharia de Produção da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (FUNDAÇÃO VANZOLINI, [20--]).

da rede, eles não se consolidaram como efetivos para o esclarecimento das bases para a aplicação desse referencial.

De lá para cá, o *Caderno do Professor* e o *Caderno do Aluno* passaram por duas revisões, a primeira em 2011 e a segunda em 2014. Elas geraram pequenas adequações em sua composição, especificamente na disciplina de matemática.

Atuando como docente da rede estadual desde 2011, acompanhei boa parte da estruturação e da implementação desse programa. Durante essa experiência, construí questionamentos sobre a validade ou não das críticas tecidas por parte da comunidade docente quanto à qualidade e à aplicabilidade do material curricular oficial, especificamente quanto à validade das seções direcionadas à disciplina de matemática.

A escolha desse material curricular para a presente pesquisa se justifica pela possibilidade da aplicação de suas tarefas em uma aula estruturada de modo a priorizar a interação entre os sujeitos da dinâmica de sala de aula, perspectiva que, por meio dos estudos aqui desenvolvidos, pode se relacionar à metodologia que embasa a elaboração desse material. Destaco que a relação entre a metodologia de aula aqui aplicada e a utilização do material curricular oficial se deu por meio das reflexões aqui desenvolvidas, não havendo conexão direta entre esses elementos nas instruções oficiais nem em outros documentos oficiais relacionados ao currículo da rede. Dessa forma, vejo este estudo como um potencial momento para analisar a influência de tais tarefas na produção de significações, por parte dos alunos, quanto ao conhecimento basilar desta proposta de investigação: o pensamento algébrico.

O cenário de aplicação da presente pesquisa ocorreu em uma escola pública, pertencente à rede da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Dessa forma, não posso deixar de considerar a influência que as políticas públicas desenvolvidas por esse órgão exercem sobre as práticas educacionais que se aplicam nessas instituições de ensino.

Dentre essas políticas, destaco o Programa *São Paulo Faz Escola* (SPFE), que propõe a distribuição de material curricular único a todas as escolas da rede estadual, buscando unificar as práticas pedagógicas aplicadas nessas instituições. Portanto, institui-se, a partir desse programa, a adoção de materiais didáticos que devem nortear as práticas desenvolvidas pelos docentes, tendo em vista um currículo oficial definido pela mesma secretaria.

Em meio às publicações realizadas pelo programa, destaco os intitulados *Caderno do Aluno* e *Caderno do Professor*. Esses materiais são revisados periodicamente pela administração (hoje, temos a edição *2014–2017*), sendo publicada uma versão para cada um dos componentes curriculares.

No *Caderno do Professor*, há a seguinte caracterização da atual versão:

> Na nova edição 2014-2017, os Cadernos do Professor e do Aluno foram reestruturados para atender às sugestões e demandas dos professores da rede estadual de ensino paulista, de modo a ampliar as conexões entre as orientações oferecidas aos docentes e o conjunto de atividades propostas aos estudantes. Agora organizados em dois volumes semestrais para cada série/ano do Ensino Fundamental – Anos Finais e série do Ensino Médio, esses materiais foram revistos de modo a ampliar a autonomia docente no planejamento do trabalho com os conteúdos e habilidades propostos no Currículo Oficial de São Paulo e contribuir ainda mais com as ações em sala de aula, oferecendo novas orientações para o desenvolvimento das situações de aprendizagem. (SÃO PAULO, 2014b, p. 4)

Essa publicação organiza as práticas pedagógicas a serem desenvolvidas, objetivando estabelecer uma forte relação entre as prescrições realizadas pela Secretaria de Educação e as práticas desenvolvidas diariamente pelos professores da rede. Por outro lado, promove e amplia a autonomia docente no planejamento do trabalho pedagógico a partir de orientações de como aplicar as propostas do material curricular em questão. Tal dissonância se destaca, uma vez que, desde o início de sua redação, são feitas referências constantes a prescrições necessárias a um trabalho pedagógico eficaz, embora seja usada a expressão *autonomia*.

Para cada ano/série, o material está divido em dois volumes, sendo que cada um deles está organizado em 16 unidades de conteúdo. Conforme o Currículo Oficial, cada ano/série é subdivido em 4 bimestres. Assim, cada um dos volumes se direciona a dois bimestres, mais especificamente, às 8 unidades de conteúdo para cada bimestre. Ao componente curricular Matemática, cada grupo de 8 unidades encontra-se dividido em 4 situações de aprendizagem[25].

Em suas orientações gerais, a publicação *Caderno do Professor – Matemática* introduz a autonomia que o professor deve desempenhar no planejamento temporal a ser aplicado em cada uma das situações de aprendizagem: “Insistimos, no entanto, no fato de que somente o professor, em sua circunstância particular e levando em consideração seu interesse e o de seus alunos, pelos temas apresentados, pode determinar adequadamente quanto tempo dedicar a cada uma das unidades.” (SÃO PAULO, 2014b, p. 7).

Em sua organização, os referidos materiais também apresentam opções para a expansão do conteúdo proposto, tais como textos, *softwares*, *sites* e vídeos. Ao fim de cada situação de aprendizagem, sugere-se uma avaliação, tendo como referência as unidades de conteúdos definidas para aquela situação de aprendizagem.

Diante dessa organização, percebo um caráter prescritivo e normatizador da atividade docente, embora sejam apresentadas citações que nos direcionam à autonomia docente.

[25] Compreende-se como situação de aprendizagem uma sequência didática direcionada ao desenvolvimento das unidades de conteúdo previstas pelo currículo oficial.

Entretanto, também há que se destacar a não ocorrência, em sua redação, de prescrição da impossibilidade de usar materiais complementares às propostas mencionadas.

A seguir, apresento as concepções desses materiais curriculares sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico. Discorro, especialmente, sobre seu ano de introdução, o sétimo ano do Ensino Fundamental, que se constitui como elemento formador do cenário desta pesquisa.

3.1 As concepções sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico expostas pelo material curricular oficial paulista

Esta pesquisa analisa a formação do pensamento algébrico, especificamente, em situações de generalização e consequente aplicação ao raciocínio funcional. Assim, ao observar o material curricular em questão, procuro menções a tal âmbito do pensamento algébrico, focando-me nos possíveis pontos de convergência ou divergência entre os pressupostos metodológicos e pedagógicos assumidos por esta investigação e a proposta do material em questão. De uma forma mais específica, dirijo meu olhar ao material destinado aos anos finais do Ensino Fundamental, pois é nesse segmento que esta investigação se insere.

Ao iniciar as reflexões sobre desse material, buscando a construção de nosso cenário de pesquisa, busquei tarefas que envolvessem a generalização e, consequentemente a formação do pensamento algébrico. Encontrei a primeira delas na parte que contém indicações para o sétimo ano do Ensino Fundamental, mais especificamente, no segundo volume. Este, conforme instruções contidas na própria publicação, volta-se ao segundo semestre do referido ano, definindo como unidades de conteúdo “o uso de letras na matemática – identificação de padrões e generalização” e “o uso de letras na matemática – letras para representar números ou grandezas” (SÃO PAULO, 2014b, p. 11).

Em sua introdução, essa parte da publicação define as tarefas iniciais dessa temática:

> Na situação de aprendizagem 5, o foco das atividades é o reconhecimento de padrões em figuras e em sequências numéricas. Um dos objetivos da álgebra é justamente a representação de regularidades por meio da linguagem simbólica da matemática. Apresentamos uma série de atividades que envolvem a descoberta de padrões e regularidades, bem como a posterior representação destas na forma algébrica. (SÃO PAULO, 2014b, p. 10)

É importante observar o destaque para a utilização da linguagem simbólica da matemática, pois, logo no início das definições dadas por esse material, que orienta as práticas pedagógicas dos docentes, já se faz menção a ela. Todavia, não se ressalta a importância do pensamento algébrico, que não necessariamente é expresso por meio de linguagem simbólica da matemática.

Na situação de aprendizagem citada na introdução da publicação, denominada como "Investigando sequências por aritmética e álgebra", encontrei, conforme consta na Figura 4, as definições dos conteúdos e das estratégias a serem desenvolvidos:

Figura 1 – Definições dos conteúdos e das estratégias a serem adotados

Conteúdos e temas: múltiplos e divisores; resto da divisão; sequências numéricas; uso de letras para representar problemas.

Competências e habilidades: realizar generalizações utilizando a linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

Sugestão de estratégias: investigar sequências de figuras com a finalidade de identificar padrões e representá-los por meio da linguagem escrita; investigar sequências numéricas para aprimorar a percepção indutiva de regularidades e iniciar um trabalho com o uso de letras, a fim de representar o padrão identificado.

Fonte: São Paulo (2014b, p. 57)

Ao observar os conteúdos e os temas propostos, encontrei alguns conceitos aritméticos, apresentados como possíveis ferramentas para as investigações voltadas às sequências a serem analisadas. Também nesses tópicos, menciona-se, logo no início das orientações para os docentes, a utilização de linguagem alfanumérica para representar generalizações, característica que revela a grande importância atribuída ao uso de uma linguagem matemática formal. Destaco que as tarefas propostas pela sequência didática analisada se constituem como o primeiro momento em que se busca a tomada de consciência dos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental sobre o pensamento algébrico.

O estudo de sequências, quando objetiva elaborar generalizações, é colocado por essa publicação como o centro do desenvolvimento do pensamento algébrico. Essa situação está em consonância com os pressupostos teóricos assumidos por esta pesquisa, pois acredito que habilidades como a observância de comunalidades, o comportamento de variáveis e o levantamento de hipóteses são fundamentais para a construção de uma aprendizagem significativa, realmente direcionada ao pensamento algébrico, em especial, em seus aspectos funcionais.

> Um dos objetivos centrais do processo de ensino e aprendizagem da álgebra é generalizar regularidades. O uso de letras para representar, por exemplo, o padrão de uma determinada sequência numérica é um dos recursos que a

> álgebra nos permite. Neste caso, a generalização de uma sequência numérica com o uso de expressões algébricas pode ser útil para determinar números específicos da sequência sem recorrer a processos aritméticos. Nesta situação de aprendizagem, apresentamos uma proposta de trabalho com sequências, numéricas ou não, como forma de motivação para a busca de expressões algébricas. (SÃO PAULO, 2014b, p. 57)

Não é feita menção aos termos *pensamento algébrico funcional*. Porém, ao adotar como objetivo das investigações a serem desenvolvidas a determinação de números específicos de uma sequência, sem a utilização de processos puramente aritméticos, propõe-se a mobilização de uma função psíquica superior, ou seja, a capacidade de pensar de modo algébrico.

Para a introdução das tarefas de generalização, esse material curricular inicia sua proposta com a observação de algumas sequências geométricas ou figurativas. Estas são descritas como fundamentais para explorar noções como:

> Identificação do padrão da sequência, representação do padrão da sequência por meio de palavras, figuras ou símbolos, uso de recursos aritméticos para identificação de termos da sequência e a problematização da necessidade de atribuir números que identifiquem posições da sequência. (SÃO PAULO, 2014b, p. 57)

Noto aqui certa divergência com as definições iniciais apresentadas pelas orientações voltadas ao docente. Nos objetivos estabelecidos na citação acima, ressalta-se a importância de utilizar diversas linguagens, em especial a materna, as palavras, para a expressão das regularidades e das generalizações observadas durante a execução das tarefas propostas.

No trabalho com as sequências repetitivas (padrões geométricos e figurativos), o material propõe que elas sejam esquadrinhadas. Indica que é preciso sempre compreender o padrão que está se repetindo. Também sinaliza que, inicialmente, solicite-se que o aluno continue o padrão que está sendo apresentado e, a partir dessa prática, identifique a regularidade que se estabelece.

A publicação não faz nenhum tipo de orientação sobre o desenvolvimento coletivo ou individual dessas tarefas. Já quando trata do momento posterior ao das construções das respostas, ressalta a importância da troca, entre os alunos, das construções. No trecho a seguir, é averiguada tal orientação, bem como a valorização da escrita matemática informal para a representação das regularidades constatadas:

> A identificação e o registro escrito da regra [generalização] constituem uma etapa importante da aprendizagem. Recomendamos que o professor valorize a troca de respostas entre os alunos para que todos possam conhecer, além da sua, outras maneiras de resolver o problema. Outro aspecto que o professor pode trabalhar é o do correto registro escrito do que se está querendo representar. É possível que muitos alunos consigam explicar o padrão da

> sequência, mas que tenham dificuldades em registrar sua conclusão em uma frase ou em um parágrafo. (SÃO PAULO, 2014b, p. 59)

É, portanto, feita a promoção de um momento de socialização das construções, prática que ressalta a importância da figura do outro para o desenvolvimento de ações educacionais que visem, verdadeiramente, à produção de significação. Embora tais marcas estejam presentes, deixam dúvidas sobre a real intencionalidade de sua adoção, pois, como já citado, essa publicação orienta que a construção e a elaboração conceitual, foco da tarefa apresentada, constitua-se como um momento coletivo, priorizando a influência do outro sobre o discurso que se produz diante do processo.

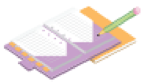
O trecho desse material curricular aqui analisado propõe que a investigação de sequências seja realizada em duas etapas. A primeira objetiva a compreensão e a identificação de regularidades; assim, são encontrados padrões figurados e numéricos, sendo estas expressões com o uso de linguagem materna escrita (embora, no início das orientações, não haja tal referência, como já discutido) e recursos aritméticos. A segunda propõe o uso de sistema alfanumérico para a expressão das generalizações elaboradas; com ela, busca-se a construção de fórmulas, recursivas ou não, para a representação das regularidades estudadas.

Nesse momento, o material chama a atenção do professor para as orientações e para as sugestões sobre os possíveis desdobramentos que podem surgir durante a dinâmica da aula proposta. Observemos o excerto abaixo:

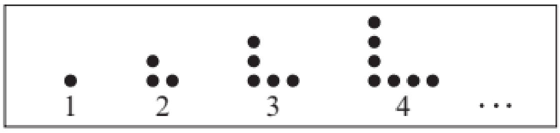
> Veremos, com os problemas propostos, como trabalhar com fórmulas recursivas e não recursivas na representação de regularidades. Mais uma vez, convidamos o professor a ler com atenção os comentários das atividades, por que neles estão as justificativas da proposta de trabalho, como as sugestões de desdobramentos que podem ser feitos. (SÃO PAULO, 2014b, p. 61)

Para melhor exemplificar o que o presente material propõe, exponho um trecho de umas das tarefas propostas com tais objetivos. Segue abaixo a tarefa observada:

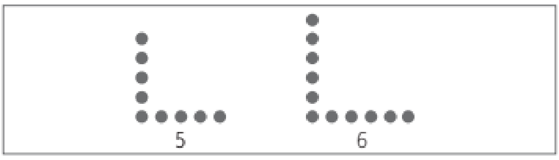
Figura 2 – Tarefa 11, contida na situação de aprendizagem 5, item a, do *Caderno do Professor*



11. Observe a sequência de bolinhas e responda às perguntas:



a) Desenhe as bolinhas que devem ocupar as posições 5 e 6.



Fonte: São Paulo (2014b, p. 63)

Figura 3 – Tarefa 11, contida na situação de aprendizagem 5, item b-c, do *Caderno do Professor*

b) Preencha a tabela, associando o número de bolinhas com a posição da figura.

Posição	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Número de bolinhas	1	3	5	7	9	11

c) Quantas bolinhas terá a figura que ocupa a 10ª posição?

19 bolinhas.

d) E a figura que ocupa a 45ª posição?

89 bolinhas.

Fonte: São Paulo (2014b, p. 63)

Figura 4 – Tarefa 11, contida na situação de aprendizagem 5, item e, do *Caderno do Professor*

e) Descreva, em palavras, o padrão de formação dessa sequência.

Quando pedimos para o aluno representar em palavras o padrão da sequência, há uma grande diversidade de respostas possíveis. Em geral, podemos agrupá-las em duas categorias: a das representações chamadas recursivas, em que a determinação do número de bolinhas de uma etapa depende diretamente da determinação do número de bolinhas da etapa anterior; e a das não recursivas, em que o número de bolinhas de cada etapa é calculado apenas com informações associadas ao próprio número que determina a posição da figura na sequência. Um padrão recursivo que pode ser usado para descrever a sequência em palavras é: somamos sempre duas bolinhas em cada etapa com relação à etapa anterior. Um padrão não recursivo para a sequência, descrito em palavras, seria: o número de bolinhas de cada posição é 1 a menos que o dobro da posição.

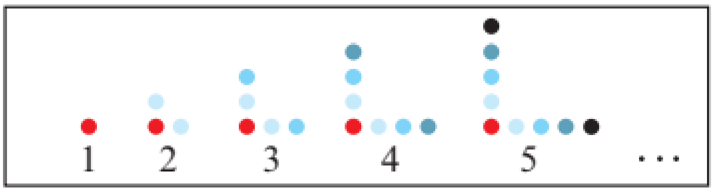
Fonte: São Paulo (2014b, p. 63)

Nas orientações, conforme a Figura 7, o material curricular define o conceito de padrão recursivo e padrão não recursivo. Tais informações são úteis à orientação das práticas docentes desenvolvidas, uma vez que, para cada um desses caminhos, as mediações do docente devem se concretizar de forma intencional, buscando criar um ambiente favorável às investigações direcionadas à generalização tanto aritmética (padrão recursivo) como algébrica (padrão não recursivo).

Para introduzir o sistema alfanumérico na representação das regularidades observadas, a publicação indica o uso de letras para retratar as variáveis envolvidas na exploração das sequências, embora não faça referência à palavra nem ao conceito de variável. Tal ocorrência pode ser vista no trecho de uma das tarefas proposta, como mostra a Figura 8:

Figura 5 – Tarefa 12, contida na situação de aprendizagem 5

12. Considere, agora, a mesma sequência da atividade anterior representada por bolinhas coloridas.



Fonte: São Paulo (2014b, p. 63-64)

Figura 6 – Tarefa 12, contida na situação de aprendizagem 5, item f

f) Utilizando a letra **P** para identificar a posição da figura, escreva uma fórmula que determine o número **N** de bolinhas de cada figura.

$N = 1 + 2 \cdot (P - 1)$ ou $N = 2 \cdot P - 1$.

Fonte: São Paulo (2014b, p. 64)

A partir da socialização a ser desenvolvida, após as construções de possíveis soluções para a tarefa observada, o professor é orientado a aplicar uma comparação entre as soluções recursivas e não recursivas. Com isso, busca-se apresentar as maiores potencialidades acessadas quando há uma generalização algébrica, ou seja, quando há a promoção de um padrão não recursivo. Podemos verificar tais indicações no excerto que segue:

> Em um primeiro momento, tanto a forma recursiva quanto a não recursiva devem ser aceitas e valorizadas. Contudo, é importante que o aluno perceba que as fórmulas não recursivas são mais úteis porque podemos utilizá-las diretamente para determinar o número de bolinhas de uma posição qualquer. Quando trabalhamos com sequências muito difíceis, em que conseguimos identificar apenas uma fórmula recursiva, se tivermos que determinar o total de bolinhas de uma posição muito distante do início da sequência, certamente precisaremos do auxílio de calculadoras ou computadores. (SÃO PAULO, 2014b, p. 64)

O discurso em questão não menciona os conceitos de generalização aritmética e algébrica, conforme defini nesta pesquisa, embora eles encontrem-se implícitos entre as tarefas sobre esse conteúdo apresentadas pelo material curricular. Além disso, ao fazer referência à produção de uma generalização algébrica, não cita os conceitos de variável nem a estruturação do pensamento algébrico funcional, mesmo que apresente suas características ao indicar as potencialidades da criação das fórmulas não recursivas.

Ao continuar as orientações sobre tais tarefas, o material ressalta a importância da aplicação de uma linguagem matemática formal para a expressão das fórmulas elaboradas. Indica alguns recursos gráficos possíveis, tais como a utilização de índices, nas fórmulas recursivas, para se referir ao termo e a sua posição (exemplo: P_1 indica posição 1). Novamente, incentiva o uso de linguagem matemática formal, deixando evidente a intencionalidade assumida por essa sequência didática ao definir o emprego de um sistema semiótico alfanumérico na representação das generalizações matemáticas elaboradas. Para tanto, o material sugere ao professor que, em um primeiro momento, dê liberdade a seus alunos para que criem símbolos para a representação dos valores variáveis e só posteriormente a isso introduza um linguajar mais científico.

Prevendo que, durante a resolução da tarefa supracitada, a maioria dos alunos tenha apenas desenvolvido fórmulas baseadas em padrões recursivos, o material propõe a seguinte problematização: "uma forma de problematizarmos a necessidade de uma fórmula não recursiva seria propor que o aluno determinasse o número de bolinhas muito distante da origem, como a posição 437." (SÃO PAULO, 2014b, p. 65). É possível notar a condução para o desdobramento de ações que levem ao raciocínio algébrico funcional por meio da apresentação de uma tarefa que se tornaria inviável, sem algum suporte tecnológico (calculadoras, computadores), por meios aritméticos.

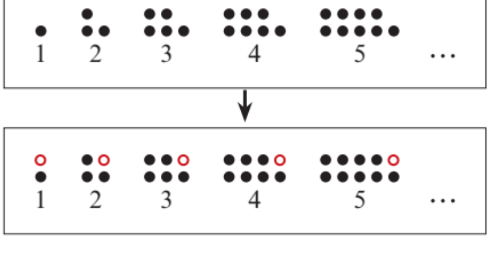
Encontrei dois importantes destaques relativos à atenção do docente durante os processos de ensino e aprendizagem:

> É muito provável que haja dificuldade na passagem da linguagem oral (ou escrita) para as expressões com letras, sejam elas recursivas ou não recursivas e, portanto, a mediação do professor é essencial para o êxito da atividade. Recomendamos que o professor trabalhe com alguns exemplos para que o aluno vá se familiarizando aos poucos com a notação e com a proposta da atividade, e que trabalhe com uma boa sequência de exercícios; o professor deverá sempre incentivar os alunos na busca de sequências não recursivas. (SÃO PAULO, 2014b, p. 65)

Dessa forma, o papel do professor como mediador das relações fundamentais aos processos de ensino e aprendizagem é ressaltado, deixando indícios de pressupostos pautados na relevância das relações sociais para a (re)construção dos objetos do conhecimento investigados. Também há que se destacar a possibilidade de aplicação dos conceitos de zona de desenvolvimento proximal e zona de desenvolvimento real. Embora não haja menção direta a eles, ao recomendar que o docente apresente alguns exemplos de transcrição da linguagem oral ou escrita para a linguagem matemática, em seu sistema alfanumérico, propõe-se a criação de uma zona de convergência entre os conceitos já construídos e aqueles que ainda estão por se construir. Friso que essa relação ocorre apenas no âmbito desta pesquisa. Continuando nossas observações, o material não introduz o que pode surgir a partir da mediação realizada pelo professor, pois, embora tenha como objetivo a aproximação do aluno com o conceito a ser desenvolvido, tais práticas podem desencadear, durante a significação e a apropriação do conceito, diversos reflexos sobre a construção do conhecimento trilhada pelo aluno.

Além das estratégias já citadas, pautadas na observação de características numéricas e, portanto, na busca da evidenciação de comunalidades por meio de operações aritméticas, o material curricular em questão também expõe como proposta de solução a observação de padrões geométricos para a disposição das chamadas “bolinhas da sequência”. Para a orientação docente, apresenta o exemplo retratado na Figura 10:

Figura 7 – Exemplo de padrão geométrico na criação de generalizações algébricas



Fonte: São Paulo (2014b, p. 65)

No exemplo citado, utiliza-se uma reorganização geométrica da sequência de bolinhas apresentada, acrescendo uma bolinha a mais para cada figura. Cria-se, assim, uma aproximação com uma situação em que é mais fácil compreender a generalização. Conforme a indicação do material curricular, dessa forma, pode-se acessar a generalização dessas figuras multiplicando a largura e a altura dos retângulos formados pelas bolinhas em cada posição específica, sendo que a bolinha acrescentada a cada uma das figuras deve ser descontada no resultado encontrado. O que observo é a apresentação de mais uma possibilidade que deve ser intencionalmente introduzida pelo docente às práticas de generalização desenvolvidas por seus alunos.

Para efeitos de avaliação dos resultados obtidos por meio da aplicação da sequência didática aqui descrita, o material expõe o que chama de

> [...] pré-requisitos mínimos da atividade: que o aluno consiga representar sequências simples com o uso de letras e fórmulas não recursivas, compreendendo a notação de variável e de fórmula; e que o aluno consiga utilizar as noções de múltiplo e de resto de uma divisão para resolver problemas. (SÃO PAULO, 2014b, p. 67)

É atribuída forte importância à utilização da linguagem formal para a representação das generalizações, assim como o desenvolvimento do pensamento algébrico funcional para a obtenção das generalizações das sequências numéricas. Não há como não referenciar o fato de o conceito de variável aparecer apenas no momento da definição dos parâmetros de avaliação a serem adotados após a evolução de toda a sequência didática proposta. Outro fator que aparece se concretiza na definição da utilização das noções de produto e quociente para a solução de problemas, fazendo referência a seu uso na investigação de sequências de repetição simbólicas ou figurativas.

Para o desencadeamento do processo de avaliação, a publicação sugere que este pode ser desenvolvido por meio da investigação de outras sequências. Essa tarefa pode ser aplicada individualmente a cada aluno ou mesmo a grupos, fazendo o uso de recursos como jogos de competição entre equipes na sala de aula. Em especial, quanto à avaliação dos estudos sobre a utilização dos conceitos de múltiplos e divisores, o material orienta o professor a empregar um processo de verificação individual, fazendo uso de uma lista de exercícios voltada a essa temática. Com relação à metodologia de avaliação sugerida, como não é objetivo desta pesquisa realizar ponderações sobre tal temática, apenas apresento as propostas do material curricular em questão para efeitos de uma completa contextualização da estrutura pedagógica definida por ele.

De um modo geral, nesse material, há uma proposta de sequência didática direcionada à elaboração conceitual. Consequentemente, ela se dirige à produção de significações relacionadas à temática de investigação proposta: o trabalho com sequências simbólicas/figuradas ou numéricas, objetivando sua generalização.

A adoção do material curricular oficial da rede estadual paulista como objeto de construção do cenário desta pesquisa justifica-se a partir das inúmeras críticas tecidas por parte da comunidade docente dessa rede sobre a aplicabilidade e a eficiência da metodologia pedagógica apresentada. Diante de tais preceitos, fica o questionamento sobre sua potencialidade para a promoção de um ambiente de aprendizagem voltado à (re)construção de significados, assim como para sua apropriação, tendo em vista o importante papel desempenhado pelas relações sociais estabelecidas entre os sujeitos integrantes dos processos de ensino e aprendizagem.

Essa divergência de opiniões entre a posição adotada por esta pesquisa e a perspectiva observada em parte do grupo docente sobre o potencial desse material pode estar relacionada à discrepância de metodologia aplicada durante o desenvolvimento desta pesquisa e a uma situação que priorize apenas o desenvolvimento individual do aluno. Destaco que tais preceitos não se encontram definidos de forma clara nas orientações sobre a organização metodológica a ser aplicada durante o desenvolvimento da sequência didática proposta. Friso também as dificuldades encontradas pelo docente para a aplicação de uma aula direcionada a essa dinâmica proposta, tais como: o número de alunos por sala, o espaço físico, a falta de materiais, entre outras situações que acabam por dificultar ou até mesmo inviabilizar a adoção dessa dinâmica. Uma possível recepção negativa dessa proposta pelos professores que atuam na rede estadual pode acontecer pela forma como o material foi imposto e, no contexto atual, por ele estar atrelado às avaliações externas, vistas como uma forma de controle do trabalho docente.

No entanto, o que se identifica é uma proposta que apresenta potencialidades para o desenvolvimento de uma sala de aula voltada à interação entre os sujeitos que a compõem, havendo a necessidade da descentralização da condução da elaboração dos conteúdos apresentados pelo currículo oficial, propiciando condições para que o professor se aproprie dessa metodologia, seja por meio de projetos de formação continuada, seja por formações na própria escola. Isso permite que o docente deixe de cumprir um papel de transmissor de conhecimentos e passe a assumir um papel de mediador das relações que se estabelecem entre os sujeitos e o conhecimento. No entanto, tais constatações são resultantes de meu processo de apropriação teórica e metodológica para uma prática voltada à construção do pensamento algébrico.

4 A TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Para que possamos dar início a uma investigação, é essencial discutirmos conceitos basilares para o desenvolvimento do trabalho. Portanto, neste capítulo, estabeleço os aportes teóricos que fundamentam esta investigação.

4.1 A perspectiva histórico-cultural

Para a teoria histórico-cultural, aqui assumida como referencial, a todo momento, estamos imersos em construções históricas, as quais, para serem apropriadas por nós, necessitam da produção de significação. Com o objetivo de compreender esse processo de (re)construção dos conhecimentos já desenvolvidos pela humanidade, é necessário definir um conceito-base para toda essa teoria — o signo. Fontana e Cruz (1997, p. 67) afirmam:

> O signo é comparado por Vigotski ao instrumento[26] e denominado por ele "instrumento psicológico". Tudo o que é utilizado pelo homem para representar, evocar ou tornar presente o que está ausente constitui um signo: a palavra, o desenho, os símbolos (como a bandeira ou o emblema de um time de futebol), etc.

A consciência da utilização dos signos durante a mediação semiótica se faz fundamental ao desenvolvimento de estudos voltados à compreensão da formação de significações por meio de interações entre sujeitos. Vigotski (2001a) mostra um exemplo característico da emergência do signo a partir da mediação do outro quando descreve o gesto de apontar feito por uma criança. Tal situação se constitui a partir de um movimento malsucedido de agarrar um objeto (nada mais que isso), essa gesticulação passa a ser interpretada pelo outro como um gesto indicativo (gesto para o outro) e, posteriormente, torna-se gesto para seu autor; assim, a criança começa a apontar.

Segundo Fontana e Cruz (1997, p. 73), tomando por base a teoria vigotskiana,

> para consolidar e dominar autonomamente as atividades e operações culturais, a criança [adolescente] necessita da mediação do outro. O mero contato da criança com os objetos do conhecimento ou mesmo a imersão em ambientes informadores e estimuladores não garante a aprendizagem nem promove necessariamente o desenvolvimento, uma vez que ela não tem, como indivíduo, instrumental para reorganizar ou recriar sozinha o processo cultural.

Dessa forma, para a teoria histórico-cultural, não há como conceber desenvolvimento e apropriação de conhecimento sem que haja a mediação, o contato com o outro. Isso porque é

---

[26] Fontana e Cruz (1997, p. 66) definem instrumento como tudo aquilo que se interpõe entre o homem e o ambiente, ampliando e modificando suas formas de ação.

nessa dinâmica que os elos da corrente construída durante a história se unem, possibilitando a compreensão e a (re)construção dos objetos do saber.

Na mediação, ocorre a intervenção do outro, a qual permite que elementos semióticos (signos) se desenvolvam na relação entre sujeito e objeto de conhecimento. Assim, deixa de haver uma relação direta entre indivíduo e objeto e passa a se construir uma relação mediada.

Ao construir o signo, gera-se um ambiente propício à produção e à transformação de significações. Esse signo, produção humana, atua como elemento mediador (que remete a algo), operador (que faz com que se crie) ou mesmo transformador (que modifica uma significação já existente). Com isso, é possível ao indivíduo se tornar sujeito ativo na criação histórico-cultural do conhecimento.

Smolka (2004, p. 56) complementa:

> Desse modo, a significação implica, mas não se restringe à representação. A representação, enquanto possibilidade de formação de imagens, ideias, pensamentos, tem um caráter, ou funciona, em um nível individual. Só que essas imagens, ideias, pensamento não se formam, não se compõem independentemente das relações entre pessoas, fora da trama de significações, isto é, sem a mediação, a operação com signos. O signo, como aquilo que se produziu e estabilizou nas relações interpessoais, age, repercute, reverbera nos sujeitos. Tem como característica a impregnação e a reversibilidade, isto é, afeta os sujeitos nas (e na história das) relações.

Tendo isso em vista, o processo de significação está intimamente ligado à atividade de mediação. É por meio das interações entre os indivíduos que os signos são criados, possibilitando sua reverberação, a qual afeta a (re)criação de significações do conhecimento.

Neste estudo, tenho como principal ponto de observação as possíveis interações estabelecidas durante as práticas de ensino e aprendizagem descritas. Em todo a pesquisa, ocorrem inter-relações entre os sujeitos, o que ocasiona inúmeras significações por meio das conexões estabelecidas entre os discursos produzidos.

Nessa dinâmica, a palavra assume importante papel, pois é mediante ela que os sujeitos externam suas conclusões, criando, assim, um registro de seus pensamentos e de suas elaborações. Portanto, é fundamental desenvolver aqui uma discussão sobre a formação da palavra, pois é só por meio desta que o sujeito de uma interação é capaz de se comunicar com outro.

Para esses objetivos, partimos dos estudos vigotskianos, que analisam a relação entre o pensamento e a palavra. Para Vigotski (2001a p. 396), “o pensamento e a linguagem não estão ligados entre si por um vínculo primário, o que ocorre é que o pensamento surge, modifica-se e amplia-se no processo do próprio desenvolvimento do pensamento e da palavra.”

Compreendo pensamento e palavra como dois distintos processos; entretanto, há que se considerar que estes não se dão de forma independente.

Pensamento e palavra (linguagem) não têm total relação externa entre si, como aponta Vigotski (2001a, p. 396):

> Entretanto, como procuramos demonstrar desde o início da nossa investigação, seria incorreto conceber o pensamento e a linguagem como dois processos em relação externa entre si, como duas forças independentes que fluem e atuam paralelamente uma à outra ou se cruzam em determinados pontos de sua trajetória, entrando em interação mecânica. A ausência de vínculo primário entre o pensamento e a palavra não significa, de maneira nenhuma, que esse vínculo só possa surgir como ligação externa entre dois tipos essencialmente heterogêneos de atividade da nossa consciência.

Para o desenvolvimento de estudos relacionados ao pensamento, à produção de significação, à construção da palavra enquanto linguagem, não dá para separar tais processos, pois eles se complementam, não havendo possibilidade de produção de análise direcionada a apenas um desses elementos.

Sob os olhares da teoria histórico-cultural, a palavra não é simplesmente uma representação estática e externa do pensamento. A palavra, enquanto unidade de análise, une o pensamento e a produção de linguagem, sendo sempre preenchida pelo significado. Não há como conceber a palavra desprovida de seu significado, o qual é constituído pelas relações que se estabelecem entre os sujeitos e o conceito ao qual se designa a aplicação da palavra.

Ao construirmos o significado de uma palavra, sempre generalizamos um conceito. Vigotski (2001a, p. 398) afirma:

> Mas, como nos convencemos reiteradas vezes, ao longo de toda nossa investigação, do ponto de vista psicológico, o significado da palavra não é senão uma generalização do conceito. Toda generalização, toda formação de conceito é o ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível de pensamento. Consequentemente, estamos autorizados a considerar o significado da palavra como um fenômeno do pensamento.

Não há como dissociar a atividade psicológica do pensamento interno da construção do significado da palavra, pois é por meio desse processo que ocorre o constante desenvolvimento discursivo. Esse movimento se dá de forma dinâmica, descaracterizando, assim, qualquer aspecto próximo à imutabilidade ou à constância do significado da palavra. Esse desenvolvimento discursivo está sempre em evolução. Não há como estabelecer uma relação de simples associação da palavra com seu significado de forma determinista, uma vez que esse significado pode ser reforçado, desabilitado, enriquecido, por uma série de interlocuções entre outros objetos.

Nesta pesquisa, ao investigar a generalização e as possíveis significações produzidas no desenvolvimento do pensamento matemático, não há como não atentar à dinâmica de inter-relação dos aspectos internos e externos presentes nas propostas de tarefa aqui descritas. A todo instante, elaboramos discursos, (re)construímos significados, pois o que se estabelece durante a evolução do raciocínio aritmético e algébrico é uma dinâmica relação entre os discursos produzidos.

Ao entrarmos em contato com qualquer objeto do conhecimento, trabalhamos com signos, os quais estão presentes nas práticas sociais que envolvem o conhecimento específico analisado, mas ainda não fazem parte de nosso funcionamento psicológico. Esses signos devem representar nosso objetivo. Quando realizamos determinada atividade envolvendo certo objeto do saber, trabalhamos com instrumentos cuja função é exercer a influência humana sobre esse objeto, ocasionando, necessariamente, mudanças neste.

Toda a relação entre o conhecimento historicamente construído e o sujeito que se depara com essa construção é mediada por signos e instrumentos. Quando o indivíduo é capaz de se apropriar dos signos e usar as ferramentas disponíveis, ações que culminam no desenvolvimento de uma nova capacidade, ele atinge a internalização. Vigotski (1991, p. 40) define-a como “a reconstrução interna de uma operação externa.”

A internalização, para Vigotski (1991), consiste em uma série de transformações que ocorrem tanto no âmbito social quanto no interior do indivíduo. Segundo o autor, o primeiro aspecto delas é o início da representação de uma atividade externa que começa a ser reconstruída internamente. É nesse momento que o indivíduo utilizará os signos, cuja ocorrência está impregnada de história. Já em um segundo momento, o autor indica que ocorrerá a mudança de um processo interpessoal (que se desenvolve no meio social) para um intrapessoal (que se desenvolve no indivíduo). O que podemos observar nesse aspecto da internalização é a modificação das funções psicológicas, que aparecem, primeiramente, no contato entre as pessoas (interpessoal) e, depois, no interior do indivíduo (intrapessoal).

Não há como falar de qualquer tipo de construção de significado, sem compreender a internalização, pois reconstruir internamente o conhecimento já construído na história é indispensável para o desenvolvimento de novas funções. Diante da internalização dos signos criados pelo indivíduo, é necessário refletir sobre o papel da palavra na elaboração conceitual e na produção de significações.

A palavra enquanto representação semiótica do pensamento e forma de sua externalização é um importante fator para a elaboração que potencialmente se desencadeará a partir das internalizações ocorridas. Assim, o que se instaura é o papel central da palavra diante da possibilidade de relações intersubjetivas e da mediação semiótica instaurada com essas relações.

Freitas, Nacarato e Moreira (2017) relatam a conversão das relações sociais, que se estabelecem pela dialética entre os sujeitos, em funções psicológicas, dentre as quais se destaca a elaboração conceitual. As autoras chamam a atenção para o fato de que todo desenvolvimento conceitual se produz em uma intersubjetividade, marcada por uma complexa rede de condições culturais. Nesse processo, aponta-se a palavra como signo que se apresenta em posição privilegiada perante a dinâmica que se instaura.

Vigotski (2001a, p. 170) afirma:

> O conceito é impossível sem palavras, o pensamento em conceitos é impossível fora do pensamento verbal; em todo esse processo, o momento central, que todos temos os fundamentos para ser considerado causa decorrente do amadurecimento dos conceitos, é o emprego específico da palavra, o emprego funcional do signo como meio de formação de conceitos.

Nessa relação indissociável entre pensamento e palavra é que se dá a elaboração conceitual. Para Vigotski (2001a), a palavra (linguagem) é a unidade de representação do pensamento. Para que essa linguagem não se caracterize como um som vazio, deve estar provida de significado. Esse significado, por sua vez, deve ser compreendido como uma generalização e, portanto, um ato que compõe o pensamento.

Góes e Cruz (2006) argumentam sobre a relação entre sentido, significado e conceito, no contexto do ensino, afirmando que a escola, quando assume o compromisso de ensinar conhecimentos sistematizados e culturalmente valorizados, deve abranger em suas práticas uma diversidade de formas de trabalho. Assim, ela possibilita que o indivíduo crie/elabore o conceito que se está propondo, destacando a importância da imaginação para esse processo.

Vigotski (2009) apresenta suas proposições sobre a atividade criadora humana, relacionando a imaginação com a realidade. Para o autor, ao criar algo, não nos limitamos à reprodução de vivências anteriores, embora nesse processo possam ser visualizadas uma combinação e uma reelaboração de experiências já vividas. O que ocorre é a constituição de novas situações e novos comportamentos. Vigotski afirma que a imaginação é a base para toda atividade criadora.

Todas essas produções de significados, que deverão ser internalizadas pelo indivíduo, organizam-se de forma a engendrar, de um modo comum aos seres que compartilham o mesmo espaço, uma cultura social. Esta dará origem a nossa visão de mundo, que se amplia pelas lentes proporcionadas, incialmente, por conceitos cotidianos, espontâneos, que, aos poucos, podem se transformar em conceitos científicos.

Nesse momento, é importante destacar a diferença observada entre os chamados conceitos cotidianos e os científicos. Friedrich (2012) refere-se aos primeiros como aqueles que dizem respeito diretamente às coisas do mundo, com um nível pouco elevado de abstração. Já os segundos são classificados como generalizações de segunda ordem, devido a seu elevado nível de abstração, o qual se possibilita por meio da mobilização de outros conceitos previamente elaborados.

Para estabelecer qualquer discussão voltada à observação de práticas que envolvam os processos de ensino e/ou aprendizagem, é fundamental compreender o papel que os conceitos desempenham, bem como analisar as possibilidades de formação destes, perante os cenários sociais que se instauram. Nessa perspectiva, Vigotski (2001a, p. 241) aponta:

> O desenvolvimento dos conceitos científicos na idade escolar é, antes de tudo, uma questão prática de imensa importância – talvez até primordial – do ponto de vista das tarefas que a escola tem diante de si quando inicia a criança [adolescente] no sistema de conceitos científicos. Por outro lado, o que sabemos sobre esta questão impressionada pela pobreza. É igualmente grande a importância teórica dessa questão, uma vez que o desenvolvimento dos conceitos científicos – autênticos, indiscutíveis, verdadeiros – não pode deixar de revelar no processo investigatório as leis mais profundas e essenciais de qualquer processo de formação de conceitos em geral.

Portanto, para que possamos fazer uma pesquisa que realmente se preocupe com as possibilidades de significação e prosperar durante o processo pedagógico, é mais que necessário que compreendamos as formas como ocorrem as alternativas de elaboração conceitual voltadas à produção de conceitos científicos.

Quando tratamos da elaboração conceitual, deparamo-nos com uma dualidade: os conceitos cotidianos e os científicos. Sendo assim, é fundamental que saibamos distinguir suas especificidades para que possamos compreender como eles se formam e interagem dentro desse processo. Como afirma Friedrich (2012), os conceitos cotidianos são formados a partir de uma atividade prática, na comunicação imediata com as pessoas a seu redor, ou seja, em situações informais de aprendizagem. Por serem formados a partir da experiência, em contato direto com o mundo, apresentam um nível pouco elevado.

Já quando nos direcionamos aos conceitos científicos, Friedrich (2012, p. 99) aponta:

> Por outro lado, os conceitos científicos são generalizações de segunda ordem, já que a referência ao mundo que eles operam não é nunca imediata nem direta. Ela sempre se realiza por intermédio de algum outro conceito. Vigotski mostra que um conceito científico tem uma relação tanto com os objetos do mundo, quanto com outros conceitos. Isso significa duas coisas: 1) os conceitos científicos sempre se apoiam nos conceitos cotidianos, não podendo existir sem eles e 2) um conceito científico existe sempre no interior de um sistema de conceitos.

Assim, é preciso analisar a forma como o conceito científico se apoia, em sua elaboração, nos conceitos cotidianos. É por meio destes últimos que os saberes científicos se formam e se reformam, é mediante a experiência da relação com o outro que as significações são produzidas, estruturando, assim, o conteúdo científico investigado. Não posso deixar de especificar que a elaboração de conceitos científicos não apaga os conhecimentos da experiência, pelo contrário, o que ocorre é a formação de ligações entre as duas construções, cotidiana e científica.

É na relação entre os conceitos desses dois âmbitos que se define a função da escola. Como assevera Friedrich (2012), a escola deve promover um jogo de dependência e interdependência entre as generalizações de primeira ordem (conceitos cotidianos) e de segunda ordem (conceitos científicos).

A partir dessas premissas, é preciso assumir, conforme indica Vigotski (2001a), que os conceitos científicos passam por um desenvolvimento. Eles são construídos em meio às interações sociais que se apresentam em cada situação.

O docente assume o importante papel do outro para a elaboração conceitual. Para isso, Vigotski (2001a, p.244) propõe um direcionamento:

> O curso do desenvolvimento do conceito científico nas ciências sociais transcorre sob as condições do processo educacional, que constitui uma forma original de colaboração sistemática entre o pedagogo e a criança, colaboração essa em cujo o processo ocorre o amadurecimento das funções psicológicas superiores[27] da criança com o auxílio e a participação do adulto.

De acordo com a teoria histórico-cultural, a percepção e a linguagem são indispensáveis à formação de conceitos, uma vez que, para que haja a elaboração de um conceito científico, deverão ser consideradas diferenças e semelhanças em torno de situações que remetam ao hipotético conceito investigado. É importante destacar que não há como desenvolver uma elaboração conceitual sem que haja essas observações. Elas, num primeiro momento, direcionam muito mais para as diferenças entre os termos observados do que para as semelhanças, pois estas últimas dependem da formação de uma estrutura mental voltada a um processo de generalização e de conceitualização mais complexo.

Para Vigotski (2001a), a elaboração conceitual passa por três fases: estágio dos conceitos sincréticos, etapa do pensamento por complexos e nível dos conceitos verdadeiros, a

[27] As funções psicológicas superiores, para a teoria vigotskiana, são aquelas que consideram o comportamento consciente do homem, como: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade de comparar e diferenciar, formação de conceito e imaginação.

generalização. Embora o autor tenha identificado essas três fases, elas não ocorrem de forma linear. No estágio dos conceitos sincréticos, ocorre um amontoado vago de objetos desiguais, de modo que não se dá atenção aos fatores perceptuais. Dessa forma, um sujeito que se encontra nessa fase pode realizar ligações entre objetos observados por meio de uma palavra, sendo que a esta não é atribuído significado, o que se apresenta é uma situação que se constitui a partir de uma "extensão difusa de uma significação linguageira a uma série de elementos que não têm relações objetivas entre eles." (FRIEDRICH, p. 90, 2012).

Na segunda fase da elaboração conceitual, intitulada *pensamento por complexos*, o sujeito é capaz de realizar associações entre objetos, com base não apenas em impressões subjetivas, mas também em relações concretas e factuais estabelecidas entre esses objetos. Nessa situação, o conceito ainda não está totalmente elaborado, pois não vemos a constituição de uma generalização para a representação do conceito, mas, de certa forma, essa circunstância já se distancia de uma simples classificação de objetos. Embora exista a progressão da formação conceitual, tal construção ainda não se concretizou, o indivíduo ainda não é capaz de elencar categorias que subordinem logicamente os objetos. Quando comparamos os conceitos sincréticos com os pensamentos por complexos, é visível que, nesta segunda fase, a palavra passa a ser identificada como aspecto diferenciado da percepção, ou seja, embora ainda não tenhamos um conceito elaborado e generalizado, por meio da palavra, é possível fazeragrupamentos com base em um aspecto identificado nos objetos observados.

Já na terceira fase, considera-se que o indivíduo é capaz de observar e criar ligações idênticas entre os objetos observados. Dessa forma, é possibilitada a abstração de traços distintivos, os quais serão submetidos a uma análise e a uma síntese (generalização). Vigotski (2001a, p. 170), quando fala sobre a relação entre o conceito e a palavra, destaca:

> O conceito é impossível sem as palavras, o pensamento conceitual é impossível sem o pensamento verbal; o elemento novo, o elemento central de todo o processo, que somos instituídos a considerar como a causa produtiva da maturação dos conceitos, é o emprego específico da palavra, a utilização funcional do signo como meio de formação de conceitos.

Sob tais premissas, é preciso refletir sobre todo o processo de elaboração conceitual que se instaura, uma vez que a ocorrência de uma verdadeira formação de conceito só se faz possível quando há uma generalização, a qual é exteriorizada por meio da palavra. Nessa reflexão, surgem questões sobre o que Vigotski (2001a) chama de pseudoconceito. Essa ocorrência é definida como um pensamento que se forma com base na observação de características comuns, pelas quais são criadas combinações complexas, mas ele não pode ser chamado de conceito por conta de sua natureza genética, na qual não há a tomada de consciência sobre a ideia que se está elaborando.

Friedrich (2012, p. 95) diferencia, o que chama de conceito sincrético e de um complexo (fases inferiores, que podem ser caracterizadas como um pseudoconceito) do verdadeiro conceito da seguinte forma:

> A diferença do conceito sincrético e de um complexo, um verdadeiro conceito baseia-se na capacidade de o homem tomar as coisas no mundo fora das relações nas quais elas se deram na experiência, além de seus traços empíricos atestáveis, além de seu ser de fato.

Portanto, devemos concluir que utilizar um conceito não significa apenas generalizar, mas sim ser capaz de criar ligações entre coisas que não possuem ligações factuais ou evidentes a uma pura observação.

O que chamamos de tomada de consciência do conceito só será possível por meio de sua externalização pela palavra (linguagem). Assim, esta se constitui como fator que media o pensamento desenvolvido e o meio externo. Friedrich (2012, p. 97) acrescenta:

> O traço característico dos pseudoconceitos consiste no fato de que a generalização realizada leva ao mesmo resultado que aquela que se baseia nos conceitos, mas ela se realiza definitivamente na base de um pensamento por complexos, logo, apoia-se em operações intelectuais muito diferentes.

Vigotski (2001a, p. 230) mostra a possibilidade de a presença de conceitos (pseudoconceito) e sua consciência não coincidirem:

> O adolescente forma um conceito, emprega-o corretamente em uma situação concreta, mas, assim que se trata de definir verbalmente esse conceito, seu pensamento se choca então, imediatamente, a extremas dificuldades e a definição que ele dá é muito mais estreita que o emprego vivo que ele faz dele. Vemos aí que a confirmação direta de que os conceitos não resultam simplesmente em uma elaboração lógica de quais ou tais elementos de experiência, que eles não são produto da reflexão do adolescente, mas que eles aparecem nele por outro caminho e só se tornam conscientes e lógicos mais tarde.

Sendo assim, a elaboração conceitual passa, necessariamente, pela tomada de consciência, a qual se dá por intermédio dos signos, que, em seu interior, devem produzir significações, chegando, assim, ao verdadeiro conceito. Vigotski (2001a) ainda destaca que toda essa dinâmica só é possível pelo caminho do ensino dos conceitos científicos, prática que define como uma das tarefas principais da escola.

Nessa busca pela compreensão da interação que ocorre entre os objetos do conhecimento a serem estudados e as possíveis construções que se dão perante a produção de signos e a elaboração de conceitos, almejo que significações sejam produzidas. Sendo assim, vale caracterizar o que consideramos como um processo de significação, assim como sua relação com o ato de ensinar.

Para dar início a tal discussão, exponho as colocações de Smolka (2010, p. 108) quando aborda a etimologia das palavras *ensinar* e *significar*:

> *Signare:* relativo a sinal, signo, assinalar, apontar, mostrar, assinar; *In signare*: marcar, fazer incidir, imprimir signos na mente; *Signa facere:* fazer sinais, signos, significar. Podemos assim perceber que ensinar e significar implicam formas de (inter)ação, oper(ação) mental, trabalho com signos. É a natureza mesma desse trabalho (com signos) que tem sido objeto de debates seculares.

Em sua origem de significado, ambas as palavras remetem à operação com signos produzidos. Assim, constroem uma interpretação interna da realidade que se opera por meio das possíveis representações semióticas que se apresentam.

Deve ficar claro que a significação não se dá de forma direta e transmissiva por meio de um signo, por exemplo, a palavra. O que realmente ocorre é que, ao entrarmos em contato com a palavra, construímos um significado para ela e, por meio dessa construção, produzimos a significação, a qual pode ser exteriorizada por meio dessa ou de outras representações semióticas.

Smolka (2010) chama a atenção para as contribuições deixadas por Vigotski quanto à relação entre a produção de signos e a significação. Descreve esta como o ponto-chave para compreender a conversão das relações sociais em funções mentais, ou seja, a produção se significações.

Vale retomar um exemplo exposto por Vigotski (1991), que já foi introduzido anteriormente nesta seção. O autor mostra uma situação em que ocorre a produção de significação perante a relação que se estabelece entre dois indivíduos, a criança e a mãe:

> Inicialmente, este gesto não é nada mais do que uma tentativa sem sucesso de pegar alguma coisa, um movimento dirigido para um certo objeto, que desencadeia a atividade de aproximação. A criança tenta pegar um objeto colocado além de seu alcance; suas mãos, esticadas em direção àquele objeto, permanecem paradas no ar. Seus dedos fazem movimentos que lembram o pegar. [...] Quando a mãe vem em ajuda da criança, e nota que o seu movimento indica alguma coisa, a situação muda fundamentalmente. O apontar torna-se um gesto para os outros. A tentativa malsucedida da criança engendra uma reação, não do objeto que ela procura, mas de uma outra pessoa. Consequentemente, o significado primário daquele movimento malsucedido de pegar é estabelecido por outros. [...] Nesse momento, ocorre uma mudança naquela função do movimento: de um movimento orientado pelo objeto, torna-se um movimento dirigido para uma outra pessoa, um meio de estabelecer relações. O movimento de pegar transforma-se no ato de apontar. (VIGOTSKI, 1991, p. 40)

Nesse caso, o autor não faz referência direta ao termo *signo*. O que observamos é a retratação do movimento que ocorreu durante a transformação de uma tentativa de ação de agarrar em um signo que foi definido pelo outro sujeito como o gesto de apontar, ocorrendo, assim, uma inter-relação entre os integrantes sociais dessa situação. Quando há a conversão da função do movimento, da tentativa de agarrar, para o gesto de apontar, vê-se que a orientação desse ato é redirecionada do objeto para o outro sujeito.

Portanto, como destaca Smolka (2010, p. 114), “considerados desse ponto de vista, os gestos [signos], como movimentos significativos, não são dados naturalmente, mas são construções (e mesmo instituições) históricas e culturais. Há que suspeitar da obviedade do gesto e vê-lo inscrito na história das relações.” Assim, devemos levar em conta que esses gestos/signos que se formam e se transformam nas relações entre os sujeitos produzem as significações, conduzindo à produção histórica de signos e sentidos. Disso, podemos afirmar que a interpretação e a significação de um signo não é única e estável, muito menos imediata; pelo contrário, é plural e dinâmica, e se (re)constrói nas interações que vão se estabelecendo entre os sujeitos participantes de uma dinâmica social.

Ao convergir as reflexões sobre o tema aqui apresentadas, vejo que a produção de signos se dá a partir da interação com o outro, com os sujeitos que estão inseridos em uma realidade concreta, a qual interfere nessa produção. Essa dinâmica de interação pode levar à significação, isto é, à produção de sentidos, os quais se estabelecem e, ao mesmo tempo, singularizam-se em uma dada situação. E essa significação que se constrói reverbera pelo espaço social em que se insere, gerando novas produções de signo e significações.

Para que o processo de aprendizado se concretize, algumas situações devem ser observadas. Assim, as ações de apoio a tal desenvolvimento podem se direcionar, de forma intencional, às necessidades do aprendiz. Para isso, a teoria vigotskiana introduz um importante conceito: a zona de desenvolvimento proximal. Para Vigotski (1991, p. 57), deve-se estabelecer uma proximidade entre o desenvolvimento atual do aprendiz e o desenvolvimento almejado por meio dos processos de ensino e aprendizagem.

> Um fato empiricamente estabelecido e bem conhecido é que o aprendizado deve ser combinado de alguma maneira com o nível de desenvolvimento da criança. Por exemplo, afirma-se que seria bom que se iniciasse o ensino da leitura, escrita e aritmética numa faixa etária específica. Só recentemente, entretanto, tem-se atentado para o fato de que não podemos limitar-nos meramente à determinação de níveis de desenvolvimento, se o que queremos é descobrir as relações reais entre o processo de desenvolvimento e a capacidade de aprendizagem. Temos que determinar pelo menos dois níveis de desenvolvimento.

A partir disso, Vigotski (1991) define esses dois níveis de desenvolvimento, chamando-os de *nível de desenvolvimento real* e *nível de desenvolvimento proximal*. A partir desses dois níveis, conceitua-se a distância entre eles, a qual intitula-se *zona de desenvolvimento proximal*.

Compreendo como nível de desenvolvimento real a capacidade atual do indivíduo de resolver problemas. Já o nível de desenvolvimento proximal envolve a habilidade de resolução de problemas que pode ser alcançada, passando pelas mediações de outros sujeitos, geralmente um mais experiente, que pode ser um adulto ou um colega de sala de aula.

As reflexões aqui produzidas foram necessárias para a compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico no contexto da prática pedagógica. Esse será o objeto de discussão da próxima seção.

4.2 O pensamento algébrico

Esta investigação busca compreender significações produzidas durante a formação do pensamento algébrico. Por conseguinte, preciso discutir meu entendimento sobre esse tipo de pensamento.

Neste estudo, elegi como temática para a elaboração das tarefas que deram origem à produção de dados a investigação de padrões matemáticos, especificamente daqueles que se formam a partir das sequências numéricas. Segundo Van de Walle (2009, p. 296),

> os padrões são encontrados em todas as áreas da matemática. Aprender a procurar por padrões e como descrever, traduzir e ampliá-los é parte do fazer matemática e do pensar algebricamente. [...] O conceito de um padrão repetitivo e como um padrão é ampliado ou continuado podem ser introduzidos para toda a turma de vários modos.

Com relação ao pensamento algébrico, encontrei na literatura diferentes perspectivas, gerando a necessidade de adotar uma delas. Há pontos de convergência e divergência nos autores que estudaram tal temática.

Para caracterizar meu objeto de pesquisa, embaso-me nas contribuições de Luis Radford, as quais muito se aproximam de minhas premissas de pesquisa na abordagem histórico-cultural. Radford (2006) afirma que o pensamento algébrico é uma forma particular de refletir matematicamente, deixando clara a necessidade do desenvolvimento de uma definição do pensamento algébrico. Para o autor, este é caracterizado por três elementos, cito a seguir a definição do primeiro, que

> Trata do senso de *indeterminação* que é próprio de objetos algébricos básicos, como desconhecidos, variáveis e parâmetros. É a indeterminação (em oposição à determinação numérica) que torna possível, por exemplo, a

> substituição de uma variável ou de um objeto desconhecido por outro; não faz sentido substituir “3” por “3”, mas pode fazer sentido substituir um desconhecido por outro sob certas condições. (RADFORD, 2006, p. 2, grifo do autor, tradução minha[28])

O autor parte da existência de conceitos tidos como fundamentais para a construção de uma situação algébrica: as incógnitas, as variáveis e os parâmetros. Conforme ele afirma, a ocorrência de tais objetos algébricos não depende de notação específica. Ou seja, a não utilização de um sistema de notação alfanumérico não descaracteriza a ocorrência do pensamento algébrico:

> O uso de notações, no entanto, não parece ser a melhor maneira de entender o surgimento do pensamento algébrico. Pensar algebricamente não é usar letras, mas sim pensar de certas maneiras distintas. Como já argumentei, os matemáticos chineses pensavam de forma algébrica sem usar letras, e Euclides usava letras sem pensar algebricamente. (RADFORD, 2008, p. 2, tradução minha[29])

O segundo elemento definido por Radford (2006) como fundamental à ocorrência do pensamento algébrico consiste no tratamento analítico dos objetos tidos como indeterminados. Já o terceiro elemento diz respeito à necessidade da representação das incógnitas, das variáveis e de outros objetos algébricos por meio de signos, pois estes, diferentemente de formas geométricas, por exemplo, não possuem materialidade, sendo necessária sua representação de forma indireta, e, como já dito, essa representação pode se dar ou não por meio de letras.

A forte correlação, por senso comum, entre um sistema alfanumérico e o sistema semiótico, indispensável à elaboração do pensamento algébrico, fundamenta-se no fato de muitos currículos de ensino da matemática, ao longo de nossa história, serem pautados em tais preceitos. Entretanto, defendo que esse sistema semiótico se caracteriza como importante elemento a ser incorporado ao pensamento algébrico, sem que haja uma relação de dependência, de modo que ele se posiciona como agente potencializador da expressão dos signos necessários à expressão do fazer matemática. Nessa corrente, Ribeiro e Cury (2015, p. 14) argumentam:

> Efetivamente, no início do trabalho com álgebra, podemos expressar um problema em linguagem corrente, pensamos sobre ele, tentamos expressá-lo com ajuda de símbolos – que, dependendo da faixa etária dos alunos, podem ser figuras ou letras – e chegamos à linguagem algébrica que, por sua vez, por

---

[28] Texto original: “The first one deals with a sense of *indeterminacy* that is proper to basic algebraic objects such as unknowns, variables and parameters. It is indeterminacy (as opposed to numerical determinacy) that makes possible e.g. the substitution of one variable or unknown object for another; it does not make sense to substitute “3” by “3”, but it may make sense to substitute one unknown for another under certain conditions.”

[29] Texto original: “The use of notations, however, does not seem to be the best way to understand the emergence of algebraic thinking. Algebraic thinking is not about using letters but about thinking in certain distinctive ways. As I have argued elsewhere, Chinese mathematicians thought in algebraic ways without using letters and Euclid used letters without thinking algebraically.”

> meio da generalização, nos permite utilizar o mesmo pensamento em outras situações-problema.

Em meio a essa pluralidade de linguagens possíveis de serem utilizadas para a expressão da generalização que está a se elaborar, caracterizo o que Radford (2009) chama de ação corporificada[30] e "fórmula em ação"[31]. Esses conceitos remetem, respectivamente, à ação de criar uma generalização, baseada em uma fórmula matemática válida, e a sua não-expressão por meio de linguagem matemática.

De acordo com tais definições, apresento os objetivos do desenvolvimento do pensamento algébrico. Tal elaboração visa a possibilitar que o sujeito seja capaz de pensar sobre, descrever e justificar o que ocorre no geral em uma situação matemática, que consiga generalizar, , isto é, que tenha a habilidade de idealizar uma afirmação que descreva uma realidade geral matemática a respeito de um conjunto de dados, como sugere Blanton (2008).

Pautado em tais premissas, nas quais a utilização de um sistema semiótico específico não caracteriza a ocorrência do pensamento algébrico, cabe-me refletir sobre o momento em que se inicia a generalização, sobre suas principais formas e sobre quais delas podem ser classificadas como algébricas. Para tal questionamento, Radford (2008) apresenta as possibilidades de generalização aritmética e algébrica. Segundo o autor, o que conhecemos como álgebra, nos dias de hoje, surgiu como método para calcular quantidades indeterminadas observando regularidades. Radford (2008, p. 2, tradução minha[32]) sintetiza:

> A linha divisória entre a generalização aritmética e a algébrica de padrões deve, portanto, estar localizada em diferenças no que é calculável dentro de um domínio em oposição ao outro. Embora em ambos os domínios [no aritmético e no algébrico] algumas generalizações certamente ocorram, na álgebra, uma generalização levará a resultados que não podem ser alcançados dentro do domínio aritmético.

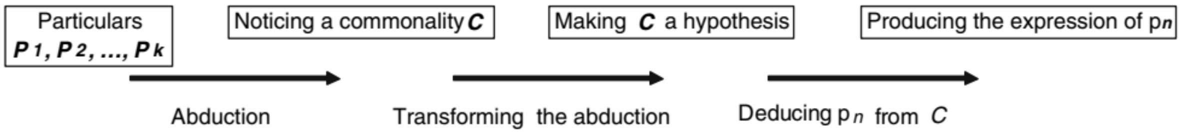
Para melhor definir a generalização algébrica, volto-me ao modelo proposto por Radford (2006). O autor aponta que esse processo se baseia na capacidade de apreender uma comunalidade percebida em alguns casos particulares (chamados de p_1, p_2, p_3, ..., p_k) e de estendê-la para todos os termos subsequentes ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}$, ...), ou seja, na habilidade de generalizar a regularidade observada. Por meio dessa generalização, deve-se ser capaz de encontrar, de forma direta, qualquer termo da sequência observada.

---

[30] Termo com tradução minha, palavras originais, em inglês: *embodied action*.
[31] Termo com tradução minha, palavras originais, em inglês: *in-action-formula*.
[32] Texto original: "The dividing line between the arithmetic and algebraic generalization of patterns should hence be located in differences in what is calculable within one domain as opposed to the other. While in both domains some generalizations do certainly occur, in algebra, a generalization will lead to results that cannot be reached within the arithmetic domain."

Com o objetivo de ilustrar esse processo, apresento o seguinte fluxograma (Figura 1):

Figura 8– A arquitetura da generalização algébrica de padrões



Fonte: Radford (2008, p. 3)

Na Figura 1, é possível notar que a generalização algébrica se inicia com a observação de casos particulares, a partir dos quais são notadas comunalidades (ocorrência que se faz possível por meio do raciocínio abdutivo). A partir dessas observações, são criadas hipóteses sobre a observação que está sendo construída, o que produz uma expressão que deve representar a generalização elaborada (dedução da expressão p_c a partir da comunalidade C).

Para que a generalização algébrica seja constituída, deve-se realizar uma seleção das chamadas comunalidades (características) que devem ser verificadas para a construção das hipóteses que podem levar à generalização. Radford (2013, p. 8, tradução minha[33]) caracteriza a seleção:

> Para poder generalizar a sequência, os alunos devem proceder com uma série de sensíveis determinações, notando semelhanças e diferenças [entre os termos da sequência]. A *priori*, as possíveis determinações constituem um conjunto extenso: os alunos podem atentar para a forma dos termos, o número de figuras que constituem cada um destes, a cor, o espaço entre eles, etc.

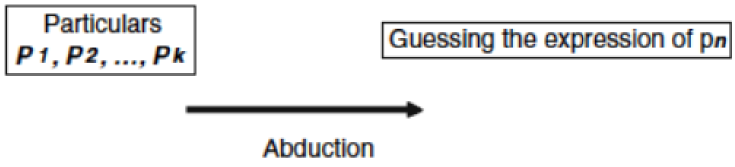
Essas comunalidades podem ser retiradas de diferentes campos de observação, tais como o número e o espaço. Quando há a junção de traços verificados, advindos de diferentes campos semióticos, ocorre o fenômeno que chamamos de contração semiótica (RADFORD, 2008).

Em contrapartida, quando a busca pela generalização se dá por meio de uma espécie de adivinhação de uma expressão capaz de generalizar os casos particulares constatados, acontece o que Radford (2008) chama de *indução naïve*[34]. Essa situação pode ser retratada pelo esquema abaixo (Figura 2):

[33] Texto original: "Para poder generalizar la secuencia, los alumnos deben proceder a una serie de determinaciones sensibles y notar similitudes y diferencias. A priori, las determinaciones posibles constituyen un conjunto extenso: los alumnos pueden fijar su atención en la forma de los términos, en la cantidad de cuadros que constituyen cada uno de los términos, el color, el espacio entre ellos, etc."

[34] O termo pode ser traduzido como indução ingênua.

Figura 9 – Arquitetura da indução naïve



Fonte: Radford (2008, p. 86)

Observando essa situação, Radford (2013, p. 6, tradução minha[35]) afirma:

> Adolescentes, que tiveram a oportunidade de alcançar um pensamento numérico mais sofisticado, podem propor estratégias baseadas em procedimento de ensaio e erro: propõem "$n - 1$", substituem o número "n" por pequenos números, como 2 ou 3, e percebem que a fórmula não funciona.

O que se apresenta são diversas possibilidades, na elaboração das generalizações algébricas. Tais situações podem ou não se concretizar como uma forma real de generalização.

Nesse momento, questiono-me: em que momento deixamos de pensar aritmeticamente para pensar algebricamente? Para Radford (2011, p. 310, grifos do autor, tradução minha[36]),

> o que caracteriza o pensamento como algébrico é sua lida com quantidades *indeterminadas* concebidas de maneiras *analíticas*. Em outras palavras, você considera as quantidades indeterminadas (por exemplo, incógnitas ou variáveis) como se fossem conhecidas e realiza cálculos com elas, como acontece com números conhecidos.

Portanto, segundo a perspectiva adotada neste trabalho, o pensamento algébrico se constitui no momento em que ocorre a chamada concepção analítica sobre as quantidades indeterminadas presentes em uma situação. Nessa possibilidade se centra o grande poder da álgebra, pois, por meio desta, é possível operar matematicamente com aquilo que é indeterminado como se fosse determinado, viabilizando conclusões que não seriam possíveis a partir da análise de casos específicos.

Mesmo definindo meu objeto de investigação, a analiticidade, há que se pensar em como identificar seu surgimento em meio a circunstâncias de investigação em sala de aula. Radford (2011, p. 310, grifo do autor, tradução minha[37]) afirma:

---

[35] Texto original: "Adolescentes, que han tenido oportunidad de alcanzar un pensamiento numérico más sofisticado, proponen estrategias basadas en procedimientos de ensayo y error: proponen '$n + 1'$, remplazan n por números pequeños como 2 o 3, se dan cuenta que la fórmula propuesta no funciona."

[36] Texto original: "What characterizes thinking as algebraic is that it deals with *indeterminate* quantities conceived of in *analytic* ways. In other words, you consider the indeterminate quantities (e.g. unknowns or variables) as if they were known and carry out calculations with them as you do with known numbers."

[37] Texto original: "Indeterminacy and analyticity are in fact bound together in a schema or *rule* that allows the students to deal with any particular figure of the sequence, regardless of its size. It is a rule instantiated in

> A indeterminação e a analiticidade estão, de fato, ligadas em um esquema ou *regra* que permite aos alunos lidar com qualquer figura específica da sequência, independentemente de seu tamanho. É uma regra instanciada em casos particulares, nos quais os números são tratados não apenas como números, mas como constituintes de algo mais geral. A suspensão do intermediário está bem sintonizada com a ideia algébrica de analiticidade. O que importa não é realmente o resultado numérico, mas a regra.

Sendo assim, posso concluir que a chamada *analiticidade* surge quando o pensamento matemático produz uma regra de generalização capaz de relacionar as variáveis investigadas, possibilitando o acesso a qualquer valor dentro da relação estudada. Aplicando tal conceito a uma situação prática voltada aos instrumentos de investigação utilizados por este trabalho e pensando em uma sequência numérica em que as variáveis pesquisadas seriam a posição do número da sequência e o valor que ocupa tal posição, a analiticidade surge no momento em que somos capazes de obter, de forma direta, qualquer posição dessa sequência. Aqui, o foco de observação deixa de ser o valor numérico e passa a ser as possíveis relações entre as variáveis investigadas.

A indeterminação está implicitamente presente no discurso de representação da generalização que está a se elaborar. Porém, quando ela não aparece, de forma concreta, por meio de uma variável tácita, ocorre o que Radford (2009, p. 40, grifos do autor, tradução minha[38]) descreve:

> Uma “fórmula” dessa forma concreta de pensamento algébrico pode ser mais bem entendida como um predicativo incorporado com uma variável tácita: a indeterminação não alcança o nível do discurso. Está presente por meio do aparecimento de alguns de seus valores (1, 2, 3, 4, 5, 10, 100). Permanece como um espaço vazio a ser preenchido pela eventual expressão de termos particulares. Chamamos esse tipo de situação concreta de pensamento algébrico *factual*.

Embora o pensamento algébrico factual aparente ter estrutura concreta, deixando, assim, a impressão de se afastar da analiticidade e da indeterminação características do pensamento algébrico, essa estrutura não se apresenta como uma reflexão matemática simples. Ao contrário, instaura-se a construção de uma estrutura complexa de representações semióticas, capazes de representar integralmente a capacidade de uma generalização algébrica (RADFORD, 2009).

---

particular cases, where numbers are dealt with not as merely numbers but as constituents of something more general. The suspension of intermediate and final results is well tuned with the algebraic idea of analyticity. What matters is not really the numeric result, but the rule.”

[38] Texto original: “A ‘formula’ of this concrete form of algebraic thinking can better be understood as an embodied predicate with a tacit variable: indeterminacy does not reach the level of discourse. It is present through the appearance of some of its instances (‘1’, ‘2’, ‘3’, ‘4’, ‘5’, ‘10’, ‘100’). It remains an empty space to be filled up by the eventual uttering of particular terms. We call this type of situated and concrete form of algebraic thinking that operates at the level of particular number or facts *factual*.”

No campo da constituição das generalizações, ainda é preciso definir os diferentes focos epistemológicos que o pensamento matemático pode concretizar quando há uma produção nesse sentido. Imaginemos, por exemplo, uma tarefa que tenha como objeto de investigação uma sequência numérica (como 1, 4, 7, 10, 13...) na qual sejam solicitadas aos alunos duas ações: (1) encontrar os dois próximos termos dessa sequência; (2) achar o 30.º termo dessa sequência.

Muito provavelmente, para executar a ação 1, após identificar que se trata de uma sequência crescente linear, os estudantes vão aplicar um procedimento recursivo, ou seja, encontrarão os dois próximos termos da sequência adicionando três ao termo anterior. Tal estratégia, embora se constitua como uma generalização, pois identifica uma propriedade comum na sequência numérica, não permite estabelecer uma relação direta entre as variáveis *posição do termo* e *valor numérico do termo*.

Já quanto à segunda ação solicitada, alunos que já tiveram acesso a um pensamento numérico mais sofisticado, possivelmente, não utilizarão um procedimento recursivo para chegar ao 30.º termo. Eles tentarão elaborar uma relação entre as variáveis por meio de ensaios e erros. Assim, construirão uma regra mediante uma investigação empírica, obtendo uma possível fórmula (no exemplo dado, $3n - 2$).

Ambos os procedimentos culminarão em uma generalização que cumpra a ação solicitada pela tarefa. Mas o que se observa aqui é a ocorrência de um pensamento que se origina de relações aritméticas, como nos aponta Radford (2013). Tal acontecimento envolve generalizações que não são algébricas, mas sim aritméticas[39].

Portanto, sugerimos que a construção de uma generalização algébrica, em sequências simbólicas ou numéricas, passe pelas seguintes etapas:

> (a) A tomada de consciência de uma propriedade comum que se nota a partir de um trabalho no terreno fenomenológico de observação sobre certos termos particulares (por exemplo, $p_1, p_2, p_3 \dots, p_k$); (b) a generalização de dita propriedade a todos os termos subsequentes da sequência ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots$); e (c) a capacidade de usar essa propriedade comum, a fim de deduzir uma expressão direta que permite calcular o valor de qualquer termo da sequência. (RADFORD, 2013, p. 6, tradução minha[40])

[39] Ressalto que esta é a concepção desse autor. Outros autores compreendem de forma diferente tal classificação, uma vez que consideram as generalizações aritméticas como uma forma diferente do pensamento algébrico.

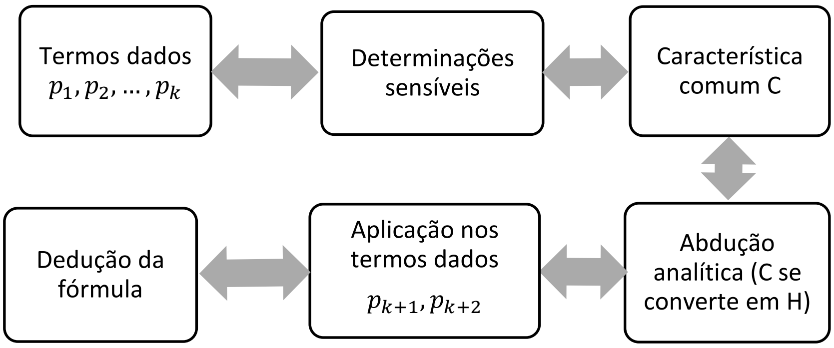
[40] Texto original: "(a) la toma de consciencia de una propiedad común que se nota de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, p1, p2, p3, …, pk), (b) la generalización de dicha propiedad a todos los términos subsecuentes de la secuencia (pk+1, pk+2, pk+3, …) y (c) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia."

Esse processo de encontrar uma propriedade comum a toda sequência chamo de abdução[41], caracterizando-se como algo apenas plausível, sem grandes comprovações de sua aplicabilidade a toda a sequência. Essa abdução pode tomar diversos caminhos de investigação, uma vez que, durante a observação, podemos dar mais ou menos foco a determinadas características contidas na sequência. Como já mencionado, uma das possibilidades de análise se concentra na aplicação de um procedimento recursivo. Ou seja, para a obtenção de um termo específico da sequência, necessitamos de seu antecessor (no caso da sequência que usei como exemplo, ela é continuada quando somamos 3). Se tal caminho se concretiza, concluímos que a abdução levou à criação de uma generalização aritmética, interrompendo a proposta de generalização algébrica.

Por outro lado, é possível que a abdução leve à dedução por meio das propriedades observadas de uma expressão direta que permita o cálculo de qualquer termo da sequência estudada. Nesse caso, há uma generalização algébrica, pois aí se caracteriza o ponto crucial do pensamento algébrico: o estabelecimento de um tratamento analítico das variáveis em foco.

O desenvolvimento da generalização não necessariamente se dá de uma forma linear. Na maioria das vezes, tal elaboração se faz por meio de idas e vindas, sobretudo mediante o levantamento de hipóteses que podem ser rejeitadas. Pensando em tal dinâmica, apresento o fluxograma da Figura 3, que representa essa dinâmica:

Figura 10 – Estrutura de generalização algébrica de sequências



Fonte: Adaptado de Radford (2013, p. 7)

Chamo a atenção para a possibilidade de uma falsa generalização. Embora em determinados casos haja indícios de elaboração do pensamento algébrico generalizado, como postula a teoria histórico-cultural, há que se investigar a tomada de consciência sobre a dinâmica de elaboração conceitual que se instaura, chegando ao conceito de generalização consciente (MASON; DRURY, 2007).

---

[41] Termo identificado por Peirce (2013 *apud* RADFORD, 2013).

Blanton e Kaput (2011, p. 11, tradução minha[42]), acrescentam:

> Reconhecemos que algumas crianças podem responder a uma relação conhecida sem entender completamente seu aspecto funcional. “Duplicar”, por exemplo, não é incomum no vocabulário de matemática dos anos iniciais, e dizer “duplica” não indica necessariamente um entendimento conceitual completo de correspondência ou covariação, incluindo um entendimento explícito de que o valor da variável independente está sendo duplicado para obter o valor da variável dependente. [...] No entanto, essas situações podem gerar discussões que estimulem os alunos a pensar sobre as relações entre os dados, e não apenas com padrões recursivos.

Disso tudo, concluo que a tomada de consciência sobre os processos que estão sendo desenvolvidos é fundamental para a produção de reais significações sobre o conhecimento que se objetifica. Por outro lado, quando se identifica que a estratégia adotada pelo indivíduo para a elaboração de uma generalização não se dá a partir de um pensamento consciente e respaldado por argumentos sólidos, essa situação pode dar origem a discussões em sala de aula com grande potencialidade para a produção de uma situação que contribua para a elaboração conceitual.

Para compreender as generalizações algébricas, remeto-me à distinção possível entre generalização e abstração:

> Uma distinção é frequentemente desenhada, embora haja uma implícita e considerável variação por diferentes autores, entre *generalização* e *abstração*. Isso está relacionado a uma diferenciação entre generalizar o resultado de uma ação sobre objetos como propriedades dos objetos e generalizar (abstrair) essa ação para além dos próprios objetos. A ação abstraída é então disponibilizada a se realizar em outros objetos (presumivelmente similares) em outros contextos. (MASON; DRURY, 2007, p. 7, grifos dos autores, tradução minha[43])

Por meio da abstração, o indivíduo é capaz de expandir a generalização construída. Assim, atenta para um conjunto de casos específicos e consegue relacioná-los com outro contexto, possibilitando a criação de novas generalizações.

Como já definido por este trabalho, minhas investigações se centram na exploração do pensamento algébrico relacionado ao estudo de sequências simbólicas e numéricas, tendo como

---

[42] Texto original: “We recognize that some children might be responding to a known relationship without fully understanding its functional aspect. ‘Doubles’, for example, is not uncommon in the vocabulary of early grades mathematics, and to say ‘it doubles’ does not necessarily indicate a full conceptual understanding of correspondence or covariation, including an explicit understanding that the value of the independent variable is being doubled to obtain the value of the dependent variable. […] However, these situations can prompt discussions that scaffold students’ thinking about relationships between data, not just recursive patterning.”

[43] Texto original: “A distinction is often drawn, though mainly implicitly and with considerable variation by different authors, between *generalization* and *abstraction*. This is related to a distinction between generalizing the result of an action on objects as properties of the objects, and generalizing (abstracting) that action away from the objects themselves. The abstracted action is then available to carry out on other (presumably similar) objects in other contexts.

foco as significações produzidas durante as interações ocorridas no processo de pesquisa. Dessa forma, tratarei especialmente do pensamento algébrico funcional.

Embora a proposta curricular estadual (São Paulo) para o ensino de matemática aponte o início do trabalho com o pensamento algébrico apenas a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental e, em especial, com o conceito de função no nono ano dessa mesma etapa do ensino, o pensamento funcional começa a se desenvolver muito antes na socialização e na escolarização do estudante. Desde o início da Educação Básica, é trabalhada uma variedade de ocorrências que vincula dois fatos por meio de uma correlação de causa e dependência, criando o sentido de causalidade. Essa ideia é confirmada por Ribeiro e Cury (2015, p. 15) quando discorrem sobre a necessidade do trabalho com funções desde o Ensino Fundamental:

> No que se refere à noção de função e à compreensão de suas representações, é fato que elas fazem parte dos conteúdos algébricos propostos para o ensino de matemática desde o ensino fundamental; da mesma forma, podemos considerar que o pensamento funcional é parte do pensamento algébrico, ainda que tenha características específicas.

Dessa forma, identifico a necessidade de uma transformação nas práticas docentes relacionadas ao tema, à previsão delas nos documentos curriculares e à abordagem desenvolvida pelo docente. Para isso, o estudo e a compreensão do pensamento funcional, por parte dos professores da escola básica, é fundamental. Blanton e Kaput (2011, p. 7-8, tradução minha[44]) afirmam:

> Focamo-nos aqui no *pensamento funcional* como uma corrente pela qual os professores podem construir uma generalidade em seu currículo e em sua instrução [ensino]. Conceituamos amplamente o pensamento funcional para incorporar a construção e a generalização de padrões e relações usando diversas ferramentas linguísticas e representacionais e tratando de relações generalizadas, ou funções, que resultam em objetos matemáticos úteis por si mesmos.

Para melhor definirmos essa questão, exponho aqui a contribuição de Smith (2008) quando trata dos diferentes tipos de pensamento funcional que podem ser encontrados em uma sala de aula. O primeiro é a padronização recursiva[45], a qual envolve o trabalho com a variação dentro de uma sequência de valores. Como segundo tipo, o autor destaca o pensamento

---

[44] Texto original: “We focus here on *functional thinking* as a strand by which teachers can build generality into their curriculum and instruction. We broadly conceptualize functional thinking to incorporate building and generalizing patterns and relationships using diverse linguistic and representational tools and treating generalized relationships, or functions, that result as mathematical objects useful in their own right.”

[45] Embora já tenhamos definido a utilização de relações recursivas como um pensamento que leva a uma generalização numérica, e não algébrica (RADFORD, 2013); Smith (2008), assim como Blanton e Kaput (2011), considera esse tipo de estratégia de solução como parte do pensamento funcional e, consequentemente, como parte do pensamento algébrico. Dessa forma, opto por considerar tal referência por acreditar que ela contribui para a formação do conceito de pensamento algébrico funcional.

covariacional, o qual é baseado na análise do modo como duas grandezas variam simultaneamente e mantêm essa mudança como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função (por exemplo, identificando a taxa de variação entre variável independente e dependente). E, por último, a relação de correspondência é baseada na identificação de uma correlação entre variáveis, isso ocorre, por exemplo, quando elaboramos uma fórmula para cálculo de qualquer termo em uma sequência numérica.

Assim, o pensamento algébrico funcional se caracteriza como significativo componente de um currículo de ensino de matemática voltado a práticas que possam levar à produção de significações por meio da elaboração de conceitos, pois, mediante essas potencialidades, podemos trabalhar diversos conceitos matemáticos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Como os trabalhos mencionados até aqui já informam, desde muito cedo, somos expostos a situações que nos levam à observação de relações entre variáveis.

Conforme definem Blanton e Kaput (2011), em uma sala de aula, podem ocorrer três tipos de pensamento funcional. O primeiro é composto pelos padrões recursivos e envolve encontrar a variação numa única sequência de valores. O segundo é o pensamento covariacional, o qual se baseia na análise de como duas quantidades variam simultaneamente e mantêm essa variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição da função (por exemplo, se x aumenta em 1, y aumenta em 4). O terceiro, as relações de correspondência, embasa-se na identificação de uma correção entre variáveis, é o caso da equação $N = P + 4$, que não necessariamente é representada por linguagem alfanumérica.

Para que possamos relacionar a perspectiva histórico-cultural às pesquisas voltadas ao estudo da elaboração do pensamento algébrico, apresento a teoria da objetificação do conhecimento:

> Na teoria da objetificação do conhecimento, o pensamento é considerado uma relação entre o sujeito pensante e as formas culturais de pensamento em que o sujeito se encontra imerso. De modo mais preciso, o pensamento é uma unidade de um sujeito sensível e de um campo conceitual histórica e culturalmente construídos, na qual as coisas já parecem dotadas de significado e objetividade. O que essa objetividade significa não é algo transcendentalmente verdadeiro. (RADFORD, 2012, p. 120, tradução minha[46])

[46] Texto original: "Within the theory of knowledge objectification, thinking is considered a relationship between the thinking subject and the cultural forms of thought in which the subject finds itself immersed. More precisely, thinking is a unity of a sensing subject and a historically and culturally constituted conceptual realm where things appear already bestowed with meaning and objectivity. What this objectivity means is not something transcendentally true."

Logo, o conhecimento é visto não como um fenômeno estático e acabado, mas sim como uma construção que está em constante evolução em meio aos processos histórico-culturais que se desenvolvem em contato com o indivíduo. Portanto, o pensamento algébrico, enquanto conhecimento que se constrói, segundo meu aporte teórico, é concebido como uma variável em contínuo progresso.

Ademais, objetivando a construção de práticas educacionais que tenham por foco o desenvolvimento do pensamento matemático, a ação do professor assume importante papel nas dinâmicas de sala de aula. Dessa forma, toda a ação do professor deve se dar de forma intencional, pois cada intervenção promovida por esse sujeito é fundamental para a elaboração do conhecimento, gera diferentes impactos. Para Mason e Drury (2007), a prática docente pode apenas reafirmar aquilo que os alunos já conseguiram elaborar, pode complementar ou preencher um saber do qual eles ainda não estavam cientes, afastando-os de uma experiência de generalização ou pode não provocar nenhum resultado. Assim, o educador deve buscar a consciência, a intencionalidade de suas ações, e, sempre de forma clara, definir qual o objetivo da realização da ação planejada.

Radford (2012, p. 127, tradução minha[47]) pontua:

> O uso explícito de ritmo, gestos e dêiticos linguísticos pelo professor, seguido mais tarde pelos alunos, abre novas possibilidades para os estudantes usarem formas culturais eficientes e evoluídas de generalização matemática, que podem ser aplicadas em outras sequências com formas diferentes.

Portanto, o professor, por meio de cada detalhe de sua ação, deve buscar aproximar seus alunos do conhecimento que se está a estudar, focalizando as situações de mediação. Cabe-me ainda destacar que, por meio dessas ações que se dão por diferentes linguagens (a fala, o gesto, etc.) e da percepção que se dá de maneira inter-relacionada (RADFORD, 2012), o sujeito produz significações.

Quando são desenvolvidas tarefas em sala de aula, tais como a que se apresenta nos episódios aqui analisados, enquanto docentes mediadores do processo de ensino e de aprendizagem, devemos nos questionar sobre o momento adequado para a realização de uma mediação, pois a influência dessa ação pode se concretizar de diferentes formas para o aluno. Portanto, para que possamos melhor compreender essa dinâmica, faz-se útil o conceito de zona

[47] Texto original: “The explicit use of rhythm, gestures, and linguistic deictics by the teacher, followed later by the students, opened up new possibilities for the student to use efficient and evolved cultural forms of mathematical generalization that they successfully applied to other sequences with different shapes.”

proximal de generalidade, termo derivado da zona de desenvolvimento proximal apresentada por Vigotski. Mason e Drury (2007, p 12, tradução minha[48]) assim a caracterizam:

> A ideia era descrever e chamar a atenção para vários estados de sensibilidade do aluno para a possibilidade de generalizações em um ambiente particular, estados em que um aprendiz está começando a perceber sua subconsciência de uma generalização matemática. Para alguns alunos, a generalidade já está presente, talvez explicitamente, talvez pronta para ser cristalizada por alguém que a expresse em termos vinculados à experiência dos alunos. Tal afirmação é frequentemente importante para os aprendizes. Para outros, no entanto, a expressão pode deslocar e até bloquear a realização pessoal que estava em andamento e/ou iminente. Mas, para certos estudantes, qualquer expressão dessa generalidade poderia ter sido ignorada ou simplesmente não ouvida: não estava em sua zona atual de generalidade proximal, talvez porque sua atenção estivesse centrada em outro lugar.

Em meio a essa dinâmica, a interação entre os sujeitos participantes do ambiente de sala de aula vai produzindo as significações necessárias para a real elaboração conceitual, com relação à formação do pensamento algébrico. Além disso, a partir dessas significações, o indivíduo aprende a pensar matematicamente.

> Isso sugere que aprender a pensar matematicamente envolve a aquisição de ferramentas de notação que estão dentro da zona de desenvolvimento proximal da criança [do estudante], mas que não pertencem inteiramente à criança [a ele]. Em essência, envolve a transição dos alunos de um uso opaco para um uso transparente dos símbolos. (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 12, tradução minha[49])

Por conseguinte, utilizando essas ferramentas que vão sendo adquiridas, esse indivíduo modifica seu conhecimento, reelabora suas premissas. Assim, expande as possibilidades de elaboração voltadas à generalização.

Também como fruto dessa reelaboração, por meio do repertório de possíveis estratégias de resolução que se constrói, chegamos ao conceito de *iconicidade*[50], definido por Radford (2008, p. 12, grifos do autor, tradução minha[51]):

---

[48] Texto original: “The idea was to describe and draw attention to various states of learner sensitivity to the possibility of generalizations in a particular setting, states in which a learner is beginning to be aware of their subconscious awareness of a mathematical generalization. For some learners, the generality was already present, perhaps explicitly, perhaps ready to be crystallized by someone expressing it in terms that linked to learners’ experience. Such affirmation is often important for learners. For others however, the expression might displace and even block personal realization which was underway and or imminent. But for some, any expression of that generality might have been ignored or even simply not heard: it was not in their current zone of proximal generality, perhaps because their attention was absorbed elsewhere.”

[49] Texto original: “This suggests that learning to think mathematically involves the acquisition of notational tools that are within the child’s zone of proximal development, but not entirely owned by the child. In essence, it involves students’ transition from an opaque to transparent use of symbols.”

[50] Termo traduzido do inglês *iconicity* (RADFORD, 2008)

[51] Texto original: “Iconicity is not merely the contrast between two given conceptual forms. It is the process through which the students draw on previous experiences to orient their actions in a new situation. In other

> *Iconicidade* não é apenas o contraste entre duas formas conceituais dadas. É o processo pelo qual os alunos recorrem a experiências anteriores para orientar suas ações em uma nova situação. Em outras palavras, a *iconicidade* é baseada na projeção de uma experiência anterior para uma nova — uma projeção que trabalha na identificação progressiva do semelhante com o diferente e que possibilita, mediante um movimento de ida e volta, o surgimento de uma segunda forma conceitual (aqui um procedimento generalizante).

O que se estabelece por meio desse processo é a criação de interconexões entre as situações e as estratégias já observadas e construídas. A partir delas, elabora-se uma nova generalização.

4.3 Integrando os conceitos

Para a definição de uma perspectiva de pesquisa embasada na teoria histórico-cultural, é fundamental destacar a importância das relações sociais que se estabelecem para a (re)construção dos significados por meio dos processos interpessoais e intrapessoais que se desenvolvem em uma relação de produção de significado. Tendo isso em vista, parti do conceito de signo definido por Vigotski (1997). O autor apresenta o significado deste como os "instrumentos" que possibilitam a representação, a comunicação ou a evocação daquilo que o indivíduo constrói internamente. É por meio do signo que podemos exteriorizar nossas construções internas, possibilitando, assim, o estabelecimento de uma relação com o outro.

Em meio a esses signos, destaquei a palavra. Por meio da palavra, oral ou escrita, ocorre a maioria das externalizações de significado. Desse modo, ela assume importante papel para a construção dos significados nos processos de ensino e aprendizagem. A relação entre o pensamento e a produção da palavra não se dá de forma direta e primária. Esta se materializa como uma possível representação do pensamento, mas nem sempre expressa sua totalidade, tampouco tem uma forma exata. Por outro lado, não há como negar a existência de forte ligação entre os processos do pensamento e da elaboração da palavra, como apresenta Vigotski (2001a).

Nesse ponto, relacionei o conceito de palavra à generalização, fundamental ao desenvolvimento desta pesquisa. A elaboração da palavra se apresenta como uma aplicação de uma generalização, pois é a partir da generalização de uma ideia que se elabora o significado do signo *palavra*, chegando, assim, ao conceito.

---

words, iconicity is based on the projection of an earlier experience onto a new one-a projection that works on the progressive identification of the similar and the different and that makes possible, through a back and forth movement, the emergence of the second conceptual form (here a generalizing procedure)."

É fato que a relação da palavra com o conceito ou o significado não se dá de forma estática. Por meio dos processos interpessoais e intrapessoais, eles podem se modificar e se reconstruir, em meio aos discursos que vão se produzindo e reverberando no meio social em que o sujeito se insere.

O fenômeno de construção interna dos significados, como vimos, chama-se internalização, conforme apresenta Vigotski (1991). Ele inicia-se relações sociais, de forma externa ao sujeito, reconstrói-se internamente e, assim, gera a internalização do conceito, observando os signos (palavras, gestos e outros instrumentos) que substanciam essas relações.

Por meio da elaboração conceitual, há a produção de significações. Esse fator pode ser observado por meios dos indícios produzidos durante a representação do conceito por meio da palavra, escrita ou oral.

De forma direta, os elementos *signo*, *palavra* e *conceito* estão fortemente presentes nas concepções de pensamento algébrico aqui apresentadas. Parti das definições de Radford (2006) quando este apresenta como principal característica do pensamento algébrico a existência do que chama de objetos algébricos básicos: as incógnitas, as variáveis e os parâmetros. Para o autor, a existência desses elementos é determinante para a formação do pensamento algébrico.

Para o desenvolvimento desse pensamento, a utilização dos signos, em suas diversas linguagens e representações semióticas possíveis, é imprescindível. Isso porque é por meio deles que o pensamento pode ser exteriorizado e, consequentemente, produzir inter-relações com as produções realizadas pelo outro. Destaco aqui que a multiplicidade de linguagens para a expressão do pensamento algébrico se faz possível como indispensável para sua elaboração, como afirmam Radford (2008) e Ribeiro e Cury (2015).

Entendo a generalização como processo fundamental ao desenvolvimento do pensamento algébrico, pois é por meio dela que o sujeito será capaz de descrever uma realidade matemática, observando a situação que se está investigando. Radford (2008) explica que há duas formas possíveis: a generalização aritmética e a algébrica.

Compreendo como generalização algébrica o processo que se baseia na capacidade de apreender uma comunalidade percebida em alguns casos particulares (por exemplo, em uma sequência numérica), estendendo essa característica observada aos outros casos pertencentes à situação (generalização), o que possibilita o acesso a qualquer outro caso da conjuntura estudada. Em contrapartida, há a generalização aritmética, a qual também passa pela observação de uma comunalidade presente nos dados analisados, mas apenas possibilita a obtenção do próximo termo de uma sequência, ou seja, baseia-se em uma prática recursiva. Nessa perspectiva, a ocorrência da *indeterminação* é essencial para o estabelecimento do pensamento algébrico, como afirma Radford (2006, 2008, 2011).

Para o mesmo autor, embora a generalização aritmética seja importante para a elaboração de generalizações, ela não é considerada como parte do raciocínio algébrico, pois sua estruturação é baseada apenas em operações aritméticas, não contendo o fator *indeterminação* em suas premissas. A constituição de uma generalização algébrica não se dá de forma linear, ou seja, pode ocorrer por idas e vindas, principalmente na dedução de uma lei geral para a representação da regularidade observada.

Diante de todo esse aporte teórico, são de suma importância as mediações realizadas pelo professor durante os processos de ensino e de aprendizagem. Essa ação se caracteriza pela intencionalidade na condução de uma investigação que priorize a produção de significações, e não a transmissão do conceito que está a ser trabalhado. Para isso, o docente pode se ater ao conceito de zona de desenvolvimento proximal. Compreender o desenvolvimento real do sujeito, assim como identificar as potencialidades de formação, deve fazer parte de uma ação docente que vise à produção de significações. Esse foi o ambiente que busquei construir para a realização desta pesquisa.

No próximo capítulo, apresento os episódios selecionados. Ademais, faço as respectivas análises, partindo dos pressupostos metodológicos e teóricos assumidos por esta pesquisa.

5 SIGNIFICAÇÕES PRODUZIDAS NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

No presente capítulo, apresento os episódios selecionados para a análise, buscando identificar as significações produzidas em meio às interações ocorridas entre os sujeitos da investigação. Os dados a seguir são compostos por transcrições das interações em sala de aula, as quais se formatam objetivando os preceitos da metodologia de pesquisa microgenética, que procura sondar as minúcias da significação que se desenvolve a partir das tarefas propostas pelo professor-pesquisador.

Como indicado, as informações escolhidas foram organizadas em episódios. Estes se constituem como unidades de análise, as quais se demonstram como potencialidade de análise sobre as interações ocorridas entre os sujeitos participantes do momento retratado.

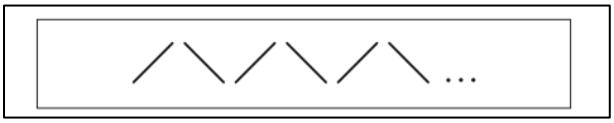
A seleção desses momentos se deu pela potencialidade da emergência de conceitos relacionados ao pensamento algébrico e da elaboração conceitual. Sendo assim, cada um dos episódios apresentados anuncia uma noção do pensamento algébrico.

Embora cada uma das aulas desenvolvidas para a produção dos dados aqui apresentados tenha se organizado em três momentos (lançamento, exploração e discussão/resumo), para a seleção dos episódios, foi utilizado como critério a obrigatoriedade da presença de todas essas etapas. Dessa forma, os episódios aqui retratados permeiam fases específicas de cada aula.

5.1 Episódio 1: “Vai ficar assim”

O presente episódio ocorreu durante o registro da resolução da primeira tarefa, no dia 27 de setembro de 2017. As interações aqui descritas aconteceram durante as discussões promovidas por um dos grupos de alunos e, em alguns momentos, tiveram a mediação do professor. Na ocasião, a sala participava dos primeiros momentos voltados à prática investigativa, enquadrada na fase de *exploração*. Todos os questionamentos e conclusões aqui apresentados tomam como ponto de análise os recortes da tarefa proposta (Figura 11).

Figura 11 – Proposta de tarefa: sequência simbólica contida na primeira tarefa



a) Qual símbolo deve ser colocado na 20ª posição da sequência? E na posição 573?

b) Escreva uma regra que permita identificar exatamente o símbolo correspondente a cada uma das posições da sequência.

Fonte: São Paulo (2014a, p. 50-51)

T 01[52] Alice[53]: *Vamos ver a letra* a *então. Qual o símbolo deve ser colocado na 20ª posição da sequência? E na posição 573?* [faz a leitura do item que *a* da atividade proposta]. *Espera aí* [começa a realizar uma contagem, um a um, partindo do 1.° símbolo, fazendo gestos que fazem referência à posição das barras, símbolos que compõem a sequência simbólica estudada em cada uma das posições, como se estivesse continuando a sequência] *1* [/], *2*[\ ], *3*[/], *4*[\ ], *5*[/], *6*[\ ], *7*[/], *8*[\ ], *9*[/], *10*[\ ], *11*[/], *12*[\ ], *13*[/], *14*[\ ], *15*[/], *16*[\ ], *17*[/], *18*[\ ], *19*[/], *20*[\ ]. *É esse* [faz referência, por meio de gesto, ao símbolo que ocupa a 20.ª posição \ ].

Figura 12 – Gesto realizado por Alice para descrever o símbolo que ocupa determinada posição da sequência simbólica

Fonte: Acervo do pesquisador

T 02 Talita: *E o da posição 573?*

[52] Para facilitar a análise do episódio, as falas foram nomeadas utilizando a letra *T* (de turno), seguida de uma numeração sequencial (T01, T02, T03...).

[53] Para preservar a identidade dos alunos, utilizei, no decorrer das transcrições, nomes fictícios. A letra *P* refere-se a minhas falas como professor.

T 03 Alice: *1, 2, 3* [inicia o mesmo processo de contagem por meio dos gestos. Ao chegar à terceira posição, faz uma expressão de interrogação, apresentando indícios de dúvida sobre o que está fazendo, e interrompe sua ação.]

T 04 Talita: *É mais fácil fazermos assim. Por exemplo, quantas vezes você faz os símbolos para chegar no 20* [faz o gesto com as mãos, indicando, com cada uma delas, os símbolos que compõem a sequência, formando um par deles.] *Aí depois é multiplicar o 20 para chegar no 573.*

T 05 Alice: *Mas espera aí. No 20, já sabemos que é assim* [faz o gesto com as mãos indicando o símbolo \ ]

T 06 Talita: *Vou fazer uma pergunta para o professor. Professor?!* [chama o professor]

T 07 P: [vou até o grupo] *Oi, Talita.*

T 08 Talita: *Se sabemos que a posição 20 é assim* [sinaliza a figura \ ], *o 40 será assim também?*

T 09 P: *Por que pensa isso?*

T 10 Talita: *Porque na sequência está repetindo. Então, se contarmos 20, 21, 22, vai repetir o desenho.*

T 11 P: *É, acho que pode ser isso.*

T 12 Talita: *Gente, é isso mesmo.*

T 13 Alice: *Então tá. Vou fazer aqui.* [pega uma folha de papel e começa a escrever].

T 14 Talita: *Vai fazer do jeito que falei?*

T 15 Alice: *Sim.*

T 16 Talita: *Tá. Então o 20 é assim* [faz o gesto, com as mãos indicando o símbolo \ ] [faz uma pausa e fica pensativa]

T 17 Alice: *Sabe de um jeito que tinha pensado. Tipo assim, o 20 terminou assim* [faz o gesto indicando o símbolo \]. *Aí a gente podia pegar 20, 40, 60, 80. Aí, quando chegarmos no 100, fazemos vezes 5.*

T 18 Artur: *Então o 100 vai ser igual ao 20?*

T 19 Talita: *É.*

T 20 Artur: *O 200, o 300, o 400 e o 500 também.*

T 21 Alice: *É, o 500 vai ser assim* [faz o gesto indicando o símbolo \ ].

T 22 Talita: *Então falta 73.*

T 23 Alice: *Tá. O 60 vai dar assim* [faz o gesto, com as mãos indicando o símbolo \ ]

T 24 Artur: *Aí conta 61*[/], *62*[\ ], *63*[/] [em cada número gesticula o símbolo que ocuparia a posição]

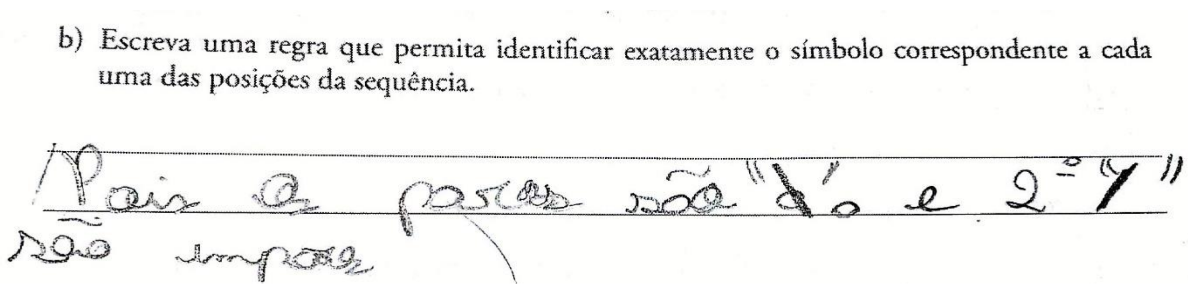
T 25 Alice: *O 70 vai dar assim* [com as mãos sinaliza \ ]

T 26 Talita: *Então vai ficar 71*[/], *72*[\ ], *73*[/] [fazendo os gestos para apontar cada um dos símbolos nas posições]

T 27 Alice: *Isso, terminamos. Agora temos que fazer a b* [item *b* da tarefa proposta]. *Professor, eu fiz uma coisa meio confusa, mas tenta entender.* [explica como desenvolveram o raciocínio para solucionar o item *a* da tarefa proposta] *Nós fizemos até o 20, fazendo mesmo um a um* [refere-se ao ato de continuar a sequência, posição por posição], *aí deu assim* [com as mãos faz o símbolo \ ]. *Aí a Talita meu deu a ideia que, tipo, se o 20 é esse símbolo, o 40 vai ser também, o 60, e assim vai. Aí o 500 vai ser assim também, e o 70 também. Ai nós contamos, 71*[/], *72*[\ ], *73*[/] [fazendo os gestos para mostrar cada um dos sinais nas posições]. *É mais ou menos assim?*

T 28 P: *É um caminho legal. Pensa comigo, para me explicar como vocês resolveram, você me falou de alguns números de posição. Quais foram mesmo?*
T 29 Talita: *Nós falamos do 20, 40, 60, 100, 200, 500.*
T 30 P: *Então todos estes números têm alguma coisa em comum.*
T 31 Artur: *Todos eles terminam em 0.*
T 32 P: *Mais uma pista importante aí.*
T 33 Alice: *Todos são pares.*
T 34 Talita: *Todos que são pares vai dar assim* [faz o gesto do símbolo \ ].
T 35 Artur: *E o que for ímpar vai dar assim* [indica a forma /]
T 36 Alice: *Então essa pode ser a regra que tá pedindo aqui* [na tarefa]?
T 37 P: *Com isso que vocês me falaram, dá para encontrar que símbolo estará em qualquer posição?*
T 38 Alice: *Sim.*
T 39 P: *Então é isso.*

Figura 13 – Registro final da generalização elaborada pelo grupo



Fonte: Acervo do pesquisador

Para iniciar a análise, é importante destacar o momento em que este episódio se insere na realização das tarefas propostas por esta pesquisa. As interações aqui descritas ocorreram durante o desenvolvimento da primeira tarefa. Dessa forma, embora os alunos, sujeitos desta pesquisa, já estivessem imersos em práticas investigativas durante sua vivência escolar relacionada à matemática, o contexto da pesquisa gerou influências, as quais qualifico como positivas para o andamento das tarefas propostas, pois se materializaram em atitudes de grande empolgação com o que estava sendo gerado naquele momento.

Como podemos observar na Figura 11, a tarefa aqui apresentada se constituía pela análise de um padrão repetitivo de símbolos (VAN DE WALLE, 2009), ou seja, de uma sequência figurativa. A partir desta, era solicitada a elaboração de uma generalização para a definição do símbolo que ocupa qualquer posição descrita nessa sequência. O trabalho com padrões repetitivos é de suma importância para o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que, por meio deles, é possível dar início aos processos de elaboração de generalizações algébricas em situações que, muito provavelmente, encontram-se em uma zona de desenvolvimento proximal do aluno.

Ao analisar o diálogo, vejo logo no T01 que a aluna *Alice* faz uso de gestos para a indicação da ocorrência dos símbolos em cada posição da sequência; dessa forma, consegue facilmente encontrar o símbolo que ocupa a 20.ª posição. O gesto é utilizado como signo representativo para o desenvolvimento da estratégia de solução apresentada pelo grupo de alunos, tornando-se, assim, parte da elaboração das significações em construção nesse momento. Vigotski (1991) discute a importância do gesto para a composição da linguagem e de seu desenvolvimento; caracteriza tais representações como signos que misturam a oralidade e a escrita, agregando-se à formação das significações que se perfaz a partir dos recursos semióticos aplicados, neste caso, especialmente à fala e ao gesto.

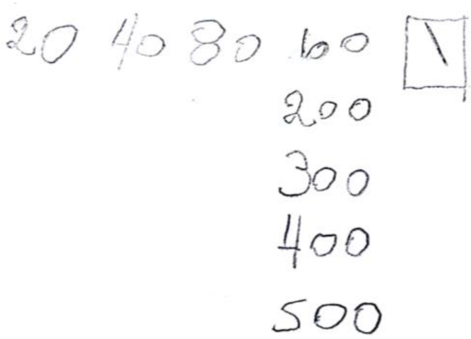
Logo em seguida, no T02, a aluna *Talita* questiona sobre a segunda parte do item a da tarefa que estavam realizando, ou seja, pergunta como encontrariam o símbolo da posição 573. Em resposta à indagação, a aluna *Alice*, quase que imediatamente, apresenta indícios de que percebe que a estratégia empregada antes não seria eficiente para tal objetivo.

No T04, a aluna *Talita* propõe uma nova estratégia. O que podemos verificar é que esta ainda se caracteriza como confusa, ao menos na representação oral à qual temos acesso, mas deixa indícios de que há uma elaboração vinculada ao caráter repetitivo da sequência. A aluna *Alice* faz a seguinte afirmação: "*Mas espera aí. No 20 já sabemos que é assim*" (T05). Assim, deixa a pista de que, a partir desse conhecimento, poderiam acessar a posição da figura desejada de modo mais eficiente.

Nesse momento, a aluna *Talita* se dirige ao professor e realiza a seguinte pergunta: "*Se sabemos que a posição 20 é assim* [sinaliza a figura \], *o 40 será assim também*?". Por meio dessa pergunta, noto indícios de uma elaboração conceitual da periodicidade de repetição na sequência ou, como Van de Walle (2009, p. 296) define, o núcleo de um padrão repetitivo, o qual descreve como "a menor cadeia de elementos que se repete".

A partir desse questionamento, o professor indica que esse seria um caminho promissor para a solução do problema investigado. Em continuidade (T13), a aluna *Alice* assume a tarefa, indicando que está realizando alguma anotação em uma folha de papel, visto que, após algumas interações com Talita, apresenta o seguinte registro:

Figura 14 – Anotação realizada por Alice no T13



Fonte: Acervo do pesquisador

No registro aqui exposto, Alice apresenta uma estratégia de solução tomando por base a repetição do padrão observado em uma posição conhecida da sequência (20.ª posição). A partir desta, realiza sua repetição até a 100.ª posição. Por fim, tomando por base esta última apresenta a intencionalidade de sua reprodução até a posição 500.

Essas intencionalidades são reafirmadas pelo T16 e pelo T17. Nesse momento, Artur faz sua contribuição para a discussão, afirmando que a 100.ª posição seria igual a 20.ª posição. Para concluir essa fase da discussão, Alice gesticula novamente o símbolo que ocuparia a posição 500.

Logo em seguida, Talita (T22) afirma que ainda faltam 73 posições. Em resposta, Alice assinala que a posição 60 se constituiria com o mesmo símbolo das posições-referência já citadas. Nesse momento, Artur inicia uma contagem, a partir do 60, indicando que, assim, pretende ter acesso ao ponto 73. Dessa forma, conseguem chegar a essa posição concluindo que o símbolo que ocupa essa posição é */*.

No T27, os alunos se deparam com o desafio de produzir uma regra capaz de identificar qual símbolo ocupará cada uma das posições da sequência, de forma exata, sem que haja uma continuação direta do padrão de repetição até o número desejado. Com isso, Alice me chama e relata como se desenvolveu a estratégia traçada pelo grupo para a solução do problema apresentado. De forma intencional, realizo uma intervenção, conduzindo o olhar dos alunos para uma comunalidade a ser percebida (a caracterização de todos os números citados como "pares") pela qual seria possível a elaboração da regra solicitada, relacionada à posição do símbolo da sequência.

No T29, Talita ressalta que a estratégia se deu a partir dos números *20, 40, 60, 100, 200* e *500*. Em resposta, afirmo que todos esses números têm algo em comum e, logo em seguida, Artur faz duas afirmações: primeiro, diz que todos terminam em 0 e, em seguida, alega que todos são pares.

Do T34 ao T39, há a conclusão elaborada pelo grupo de alunos. Evidencia-se que as posições ímpares seriam ocupadas pelo símbolo / e as posições pares, pelo símbolo \.

Nesses últimos turnos, há indícios de uma ruptura com um raciocínio mais voltado para uma construção recursiva, na qual há apenas uma continuação de um padrão observado. Passa-se, assim, para um pensamento baseado em características que partem de um raciocínio analítico. Assim, constrói-se uma lógica generalizada algébrica para a sequência observada e caracteriza-se um momento crítico, com mudança no direcionamento da forma do pensamento algébrico que se desenvolvia.

Como pode ser notado na Figura 14, o grupo de alunos registrou a generalização elaborada por meio de linguagem escrita, sem a utilização de símbolos matemáticos para a escrita. Mostra, desse modo, a possibilidade da expressão do pensamento algébrico sem a utilização de linguagem puramente matemática.

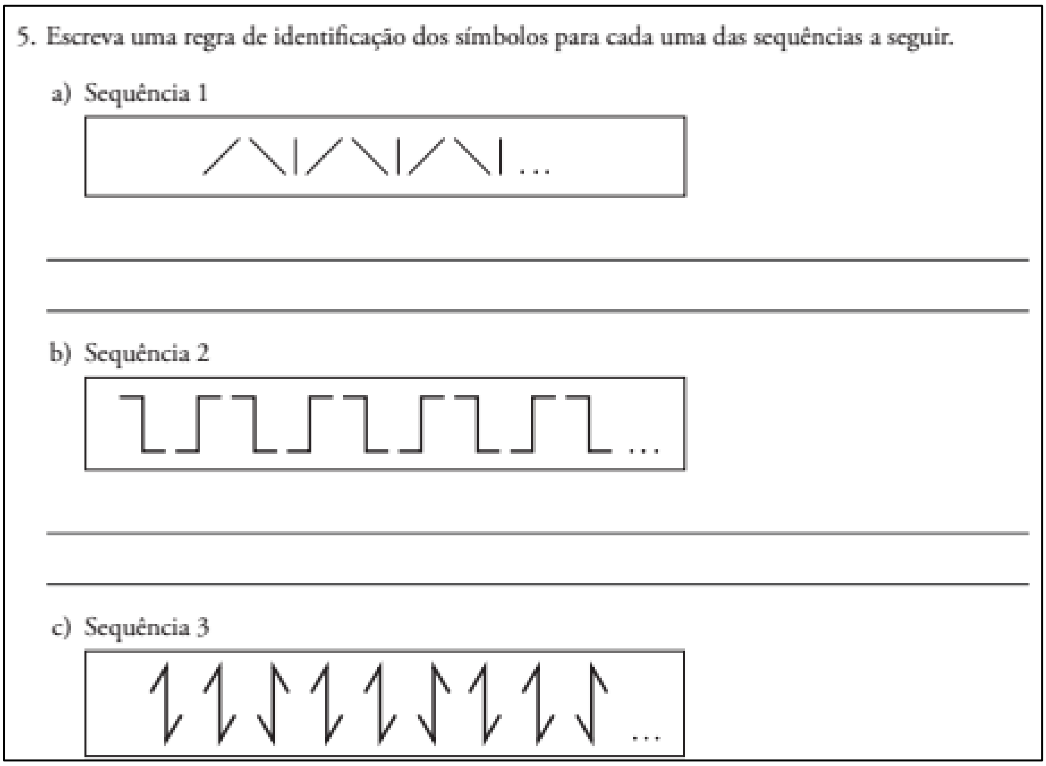
Durante as interações, constatei o percurso que ocorre em meio às discussões realizadas entre os sujeitos. Fez-se visível o papel fundamental do outro para a construção de significados. Nelas, identifico elementos da teoria vigotskiana, como: a elaboração conceitual, a zona de desenvolvimento proximal, a mediação (neste caso, pela palavra e pelo gesto), a palavra e a produção de significações.

Também é possível observar a importância da linguagem oral e gestual para a elaboração da generalização aqui apresentada. Por meio dessas representações, foram desenvolvidas interações que levaram à produção dessas significações.

5.2 Episódio 2: "A formação de um conceito"

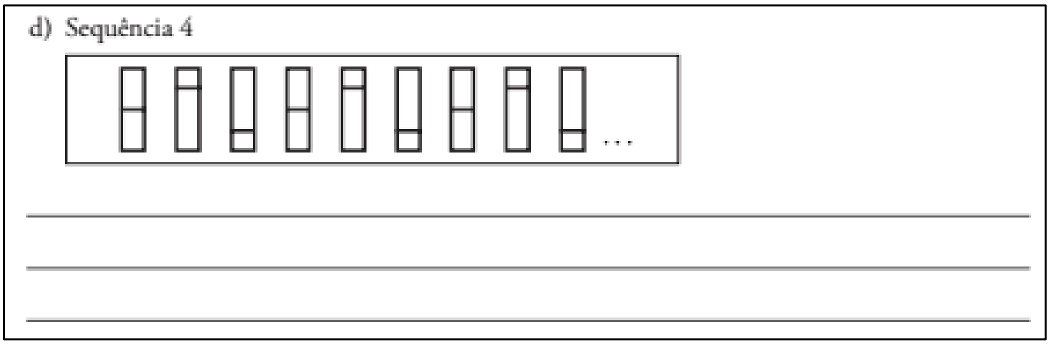
Este episódio foi retirado das gravações realizadas no dia 4 de outubro de 2017, momento em que os alunos desenvolveram a segunda tarefa. As interações entre os estudantes e as mediações do professor aqui descritas ocorreram na discussão das produções realizadas pelos grupos de alunos. Esse episódio se desenvolveu durante a fase *discutir e resumir*. Apresento a tarefa nas Figuras 15 e 16 e o diálogo na sequência.

Figura 15 – Fragmento extraído da tarefa 2: sequências de repetição



Fonte: São Paulo (2014a, p. 51)

Figura 16 – Continuação do fragmento da tarefa 2



Fonte: São Paulo (2014a, p. 52)

T 01	P: *Pessoal, observando esta sequência, como nós poderíamos encontrar o desenho que ocupa a 22.ª posição sem desenharmos todas as posições?* [fazendo referência à 1.ª sequência da tarefa proposta]
T 02	Joaquim: *Professor, ali está sempre contando de 3 em 3, no risco do meio* [trata do símbolo que ocupa a 3.ª posição na sequência observada]. *Aí, se fizermos 3 multiplicado por 7, seria 21. Aí a figura que queremos seria a próxima.*
T 03	P: *Galera, o grupo deles, então, pensou em contar de 3 em 3.*
T 04	Joaquim: *É isso, professor. Aí sempre de 3 em 3 aparece a coluna* [fala sobre a figura que ocupa a 3.ª posição da sequência]. *Aí a 21* [posição] *seria o mesmo símbolo. Então a próxima teria que ser a próxima figura da sequência* [pausa]. *Igual à primeira.*

T 05 P: *Mas por que contar de 3 em 3?*

T 06 Willian: *Porque a sequência está repetindo de 3 em 3. É um padrão.*

T 07 P: *Ok, o grupo dos meninos, então, diz que é uma repetição de 3 em 3. Aí eu tenho uma pergunta: só com esta afirmação eu consigo descobrir qual a figura que ocupa qualquer posição?*

T 08 Julia: *Aí, professor, depois de contar de 3 em 3, saberemos qual é a última coluna, aí é só contar os que faltam.*

T 09 Willian: *É, a coluna está sempre nos múltiplos de 3.*

T 10 Gustavo: *Aí, para achar a 22* [posição], *o último múltiplo é 21, aí sobra 1.*

T 11 Julia: *Fica 1 depois, igual à 4.ª posição.*

T 12 P: *Mas sempre eu vou ter que contar de 3 em 3? E se for uma posição muito grande? Vai dar um trabalhão...*

T 13 Daiane: *Vamos dividir a posição por 3 então. Aí achamos quantas vezes o 3 cabe na posição.*

T 14 P: *Vamos testar na posição 22, então.*

T 15 *Joaquim: Professor, 22 dividido por 3 vai dar 7.*

T 16 P: *Mas, para dar 7, sobra alguma coisa.*

T 17 Joaquim: *Sobra 1*

T 18 Willian: *Aí esse um contamos na sequência. Vai ser igual à primeira.*

T 19 P: *Legal, pessoal, esta é uma boa solução. Será que conseguimos utilizar a mesma ideia na próxima sequência? Como poderíamos fazer aqui, então?*

T 20 Eduardo: *Essa, professor, nós vimos que é de 2 em 2. Como se fosse par e ímpar* [referência à 2ª sequência da tarefa]. [Em] *Todos que são ímpares, os desenhos são iguais à primeira* [figura], *e, toda vez que é par, é igual à segunda* [figura].

T 21 Artur: *Está repetindo de 2 em 2.*

T 22 P: *Aqui dá para utilizar a forma que pensamos na outra sequência?*

T 23 Eduardo: *Dá sim, aí teríamos que dividir por 2. Aí o que sobrar contamos na sequência.*

T 24 P: *Então, se formos utilizar esse pensamento para outras sequências, o que precisamos descobrir?*

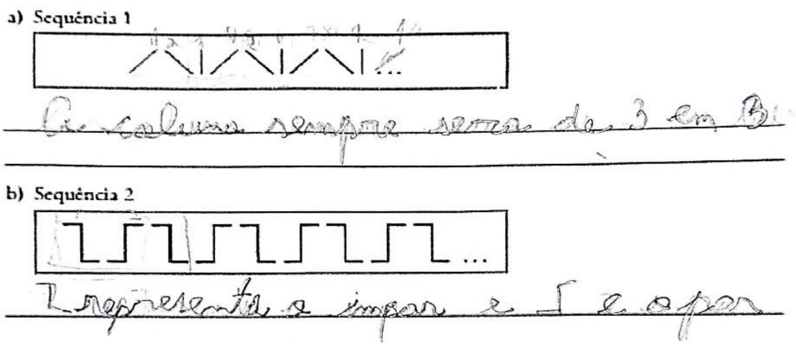
T 25 Joaquim: *De quanto em quanto está repetindo.*

T 26 P: *Isso. E esse de quanto em quanto está repetindo, chamamos de período.*

T 27 Eduardo: *Então dá para dizer que na primeira sequência o período é 3, professor?*

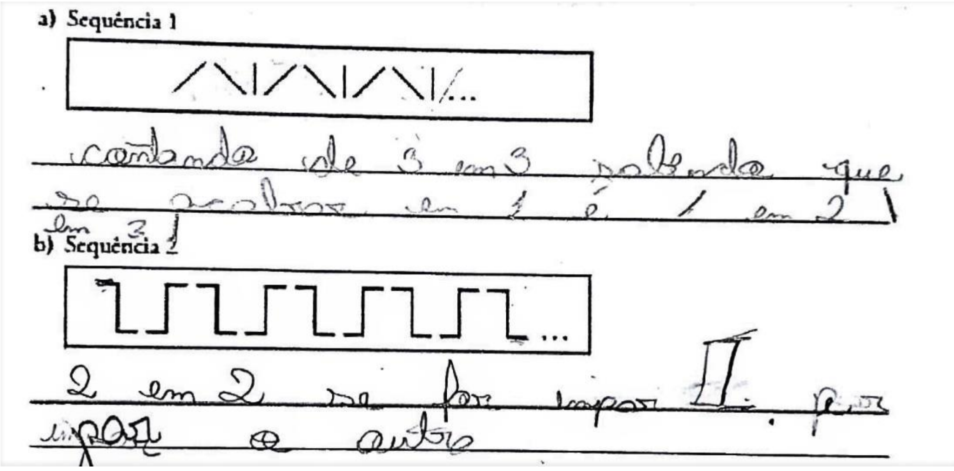
T 28 P: *Sim. Isso mesmo.*

Figura 17 – Registro da generalização criada pelo grupo *Joaquim e Willian*



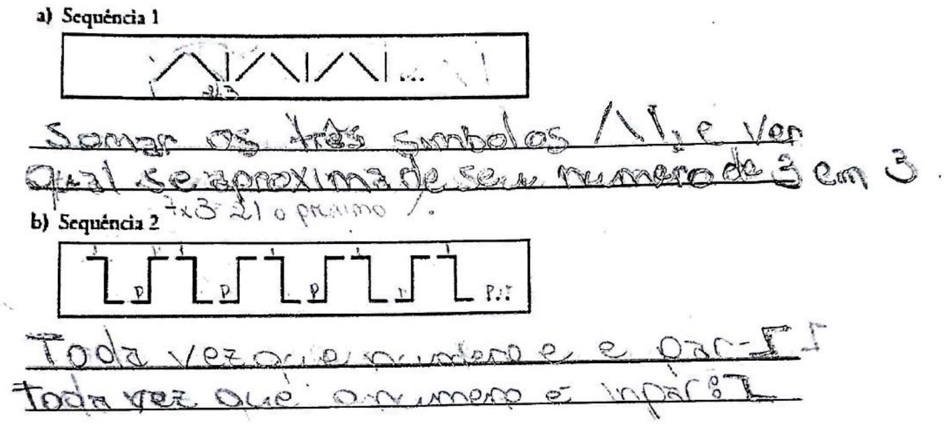
Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 18 – Registro da generalização criada pelo grupo *Julia e Daiane*



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 19 – Registro da generalização criada pelo grupo *Eduardo*



Fonte: Acervo do pesquisador

No início do diálogo, pergunto aos alunos de que forma haviam encontrado a 22.ª figura da 1.ª sequência. Nesse momento, Joaquim (T02) aponta como estratégia adotada a contagem em grupos de 3 em 3, conseguindo entender que, para chegarmos à 22.ª posição, poderíamos contar 7 vezes o grupo de 3. Partindo disso, concluem que a figura que buscamos seria a próxima.

Em continuidade (T03), reforço para a sala a estratégia adotada pelo grupo de alunos, e Joaquim continua a explicar o caminho percorrido pelo grupo: evidencia o significado da contagem de três em três e aponta a periodicidade observada na sequência. A estratégia desenvolvida pelo grupo desse aluno é retratada na Figura 18, a qual contém o registro da generalização. Essa prática de repetir a estratégia do grupo tem como objetivo garantir que todos ouviram a explicação dada pelos colegas.

No T05, quando pergunto aos alunos o porquê da contagem de 3 em 3, no T06, Willian apresenta a repetição das figuras de 3 em 3 posições, chamando isso de padrão. Destaco que, logo no início dos diálogos, no T02, Joaquim já apontava um caminho bem definido para a obtenção da generalização procurada, sendo que as discussões seguintes se desenvolveram com base nas interações ocorridas entre outros alunos, as quais apontavam para uma elaboração ainda em andamento. Isso mostra que o processo de aprendizagem e, no caso da percepção de regularidades, não é o mesmo para todos os discentes.

A partir das afirmações sobre como poderíamos definir uma forma para encontrar qualquer posição de nossa sequência simbólica (T07), chamo a atenção para a contribuição já realizada pelos alunos e questiono se haveria a necessidade de mais alguma elaboração. Em resposta a minhas indagações, Julia (T08) aponta que, ao contarmos de três em três, descobrimos qual a posição do que ela chama de "coluna" (|), a última figura do padrão observado (estratégia que é confirmada pelo registro apresentado pelo grupo, exposto na Figura 18). Willian (T09) complementa definindo que tal figura, "a coluna", estará sempre nas posições múltiplas de 3.

Podemos observar que, em meio às interações entre cada um dos indivíduos, há uma ação que visa a interferir na zona de desenvolvimento proximal, intencionalmente ou não, aproximando, assim, o sujeito do objeto investigado. Dessa forma, posso afirmar que tanto o professor como os alunos podem agir na zona de desenvolvimento proximal do sujeito que está a elaborar um conceito.

Pergunto à sala (T12) se, nessa sequência, sempre precisaremos contar de três em três e aponto uma possível dificuldade que encontraremos quanto estivermos buscando uma posição muito distante, afirmando que esta seria uma tarefa trabalhosa. A partir desse questionamento, que tem a intenção de evidenciar aos alunos a possibilidade da obtenção de uma estratégia mais adequada à situação, Daiane (T13) propõe que seja realizada uma divisão por três: "A*í achamos quantas vezes o três cabe na posição.*"

Assim, proponho que a estratégia proposta por Daiane seja testada para a posição já encontrada, a 22.ª. Prontamente, Joaquim aponta que, se o número 22 for dividido por 3, encontraremos o resultado 7. Em resposta à fala de Joaquim, questiono (T16) sobre a ocorrência do resto nessa divisão. Logo, ele afirma que haveria o resto 1. Willian, por sua vez, aponta, como próxima ação, a contagem desse resto 1 na sequência, afirmando que, devido a esse resultado, teríamos, na 22.ª posição, uma figura igual à da 1.ª posição.

Por conseguinte, pergunto (T19) aos alunos se poderíamos utilizar a mesma estratégia em outras sequências, mais especificamente na sequência 2. Em resposta a meu questionamento, Eduardo explica que, nessa sequência, seu grupo percebeu uma repetição de dois em dois. O aluno aponta uma relação com a ideia dos números ímpares e pares, além de definir que todas as posições ímpares possuem a mesma figura, o que também ocorre com as posições pares (estratégia que pode ser reafirmada pelo registro realizado pelo grupo, revelado na Figura 19). Logo em seguida, *Artur* aponta, novamente, a repetição de dois em dois.

Com o objetivo de criar uma relação entre a estratégia apresentada na primeira sequência e a estratégia adotada pelo grupo de *Eduardo* na segunda sequência, questiono sobre a possibilidade de utilizarmos a ideia de divisão. Isso posto, Eduardo (T23) afirma que poderíamos sim utilizar ambas as estratégias, sendo, nesse caso, indicada a divisão por dois. A partir dessa minha ação, destaca-se o papel da palavra, no caso, da minha palavra enquanto professor que chama a atenção para um ponto.

Friso que os alunos elaboram as generalizações solicitadas pela tarefa, conforme pode ser observado pelos registros apresentados nas Figuras 17, 18 e 19. E sublinho a objetificação do conhecimento, na qual há a construção dos significados relacionados à elaboração conceitual para a qual se direciona a prática educativa aqui descrita. Dessa forma, aponto como foco de análise a teoria da objetificação do conhecimento (RADFORD, 2012), pois o conceito que está a se elaborar encontra-se imerso nas relações entre os sujeitos, que são histórica e culturalmente construídos.

Identifico processos de interação entre os indivíduos, os quais nos remetem a tal descrição, pois, por meio deles, o sujeito estabelece relações com o objeto do conhecimento. Ressalto que, por meio da chamada *objetificação do conhecimento,* não se fala em uma construção de conhecimento única, formada no isolamento do sujeito. O que se pressupõe é que o pensamento se constitui por meio da alteridade, de sua objetividade e de sua subjetividade.

Neste episódio, não foram raros os momentos em que a figura do outro promoveu o desenvolvimento do conhecimento buscado por meio das interações e das mediações ocorridas durante a aula aqui descrita. Elas estão carregadas de história e cultura, formam a produção de discursos em torno do conceito investigado e destacam o papel da mediação pela palavra para a elaboração conceitual.

Por meio dessa objetificação do conhecimento, emerge um segundo conceito durante as interações aqui descritas: a abstração. Neste episódio, os alunos envolvidos constituem uma estratégia de resolução para as sequências simbólicas apresentadas pela tarefa em questão, na qual, num primeiro momento, chegam a uma abstração. Nessa ação, o sujeito elabora, por meio da identificação de características, o conceito, sendo capaz de descrever o objeto investigado.

A partir dessa abstração, os estudantes são capazes de aplicar a mesma estratégia a outras situações. Assim, distanciam-se dos objetos analisados e generalizam o pensamento aplicado modelando suas estratégias para a resolução de outra situação. Portanto, há a evolução de uma abstração para uma generalização (MASON; DRURY, 2007).

Identifico a ocorrência de tal fenômeno durante este episódio, na medida em que os alunos envolvidos mostram ser capazes de aplicar as estratégias a outros objetos, a outras sequências. Assim, acontece uma abstração inicial e, posteriormente, concretiza-se uma generalização.

Embora existam grandes indícios da ocorrência de uma generalização, há que se questionar quanto à consciência do sujeito sobre essa realização (MASON; DRURY, 2007). A generalização consciente resulta de uma mudança de atenção dos objetos sendo usados ou mesmo da própria ação desenvolvida. Em suma, para que possamos afirmar que verdadeiramente foi elaborado um pensamento pautado na aplicação de generalizações que, conforme as teorias vigotskianas, transforme a habilidade em si em capacidade para o sujeito, devemos realizar maiores investigações, as quais busquem maiores indícios dessa questão.

Contudo, vejo que o papel do outro assume grande importância para a apropriação do conhecimento que está sendo estudado. É a partir das relações que se estabelecem entre as representações exteriorizadas pelos indivíduos, assim como pelas mediações que ocorrem por meio dos discursos produzidos, que as significações se constituem.

5.3 Episódio 3: a mediação do professor

Este episódio foi retirado das gravações realizadas em 26 de outubro de 2017, data em que fizemos as atividades relacionadas à quinta tarefa proposta por esta pesquisa. As interações abaixo descritas foram produzidas no momento específico em que o professor interagiu com um desses grupos, durante a fase de *exploração* e a aplicação do monitoramento. Exponho a tarefa na Figura 20.

Figura 20 – Enunciado da quinta tarefa

8. Para fazer entregas de gás na cidade de São Paulo, uma distribuidora dividiu a cidade em 180 regiões e estabeleceu o seguinte calendário de entrega:

2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feira	Sábado
Região 1	Região 2	Região 3	Região 4	Região 5	Região 6
Região 7	Região 8	Região 9	Região 10	Região 11	Região 12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

a) Cite cinco regiões da cidade que recebem gás às sextas-feiras.

b) Que regiões da cidade recebem gás aos sábados?

c) Em que dia da semana a região 180 tem entrega de gás? E a região 129?

d) Como podemos descrever, em palavras, as regiões nas quais a entrega de gás acontece às quintas-feiras?

Fonte: São Paulo (2014a, p. 53-54)

T 01 Talita: *Professor, nós não estamos conseguindo resolver a c* [referência ao item c da tarefa proposta].

T 02 P: *Mas o que está pedindo na c?*

T 03 Alice: *Em que dia da semana a região 180 tem entrega de gás? E a região 129?* [faz a leitura da questão no material curricular]. *Aí estamos tentando fazer uma conta para não termos que escrever todas as regiões.*

T 04 P: *Acho que pode ser legal isso.*

T 05 Alice: *Aí, para a região 180, nós fomos colocando zeros, continuando a sequência* [aponta, na tabela da tarefa impressa, para a região 12 e escreve logo abaixo 120, indicando que essa região também estaria no sábado]. *Aí, o 180 teria que ser aos sábados também. Mas para o 129 nós não conseguimos fazer isso.*

T 06 P: *Entendi. Tentem lembrar um pouquinho do que fizemos na aula anterior* [referência à tarefa 4, realizada em aula anterior, na qual fora desenvolvido um trabalho com outra sequência de repetição]

T 07 Talita: *Eu lembro que nós procuramos o período de quanto em quanto repete.*

T 08 P: *E se tentarmos essa estratégia com essa sequência?*
T 09 Alice: *Nós já tentamos professor, só que não deu certo.*
T 10 P: *Mas o que aconteceu que não deu certo?*
T 11 Talita: *Nós pegamos a posição 180 e dividimos por 6, aí deu 30 e resto 0.*
T 12 P: *Mas por que vocês dividiram por 6?*
T 13 Talita: *Porque são 6 dias da semana na tabela. Mas eu não sei o que fazer com esse resultado.*
T 14 Alice: *Ah, o resto. O resto zero vai ser sempre o sábado. São os múltiplos de 6. Então a segunda vai ser o resto 1* [resto da divisão].
T 15 P: *Mas antes vocês tinham me falado que tinham conseguido encontrar o dia da região 180 de outra forma. Como era mesmo?*
T 16 Talita: *Nós tínhamos pego a região 12, que é sábado.* [pensativa] *Nossa, 12 é múltiplo de 6. O 120 que pegamos também. Estávamos contando de 6 em 6.*
T 17 P: *E os outros dias da semana?*
T 18 Talita: *Na segunda, é quando dá 1 a mais que o múltiplo. Na terça, quando dá 2 a mais. Na quarta, quando dá 3 a mais. Na quinta, quando dá 4 a mais. Na sexta, 5 a mais.*
T 19 Alice: *É, são os restos.*
T 20 P: *E a região 129, vai ser em qual dia então?*
T 21 Talita: *Temos que dividir por 6.* [escreve a divisão proposta em uma folha e realiza o cálculo]. *Deu 21 e resto 3.*
T 22 Alice: *Então quer dizer que tem que ser no resto 3, que é de quarta-feira.*
T 23 P: *Muito bem! E como podemos explicar quais são as regiões para cada um dos dias da semana que estão na tabela?*
T 24 Talita: *Podemos utilizar os restos.*
T 25 P: *E como fica?*
T 26 Talita: *Podemos dizer que, sempre quando, na divisão por 6, der resto 1, vai ser segunda, quando der resto 2, vai ser terça. E assim vai.*
T 27 Alice: *Ou podemos falar dos múltiplos de 6. 1 a mais que o múltiplo, vai ser segunda, 2 a mais terça, e aí segue.*
T 28 P: *Acho que podemos fazer das duas formas.*

No início deste episódio, Talita me comunica sobre a resolução do item c da tarefa proposta, afirmando que seu grupo não está conseguindo chegar a uma resposta. Logo em seguida, peço para que me contem o que esse item pede. Alice (T03) lê o item em sua íntegra e sugere que o grupo teria que realizar alguma *conta* para não ter que contar, uma a uma, as regiões.

Na descrição acima, há uma negação dos alunos em utilizar uma generalização aritmética. Essa posição, possivelmente, baseia-se no fato de o termo solicitado da sequência se caracterizar como grande o suficiente para que seja necessária sua obtenção por meio de um processo recursivo, ou seja, de uma generalização aritmética.

A aluna *Alice* (T05), novamente, faz sua contribuição quando relata que, para chegar ao termo 180, solicitado pela tarefa, partiram do termo 12. Neste, acrescentaram um 0, atingindo o termo 120, o qual, segundo a conjectura construída pelo grupo, teria o mesmo dia que o termo

12 (sábado), acessível por meio da tabela disponibilizada pela tarefa. A aluna ainda conclui que, por meio do termo 120, conseguiram obter o dia do termo 180.

Fica, de certa forma, implícita a ideia da utilização dos múltiplos do termo 12 como pertencentes ao mesmo dia da semana, mas ainda não há como afirmar se houve, até este momento, qualquer tipo de apropriação conceitual . Isso porque, embora haja a construção de uma conjectura, ainda que de forma implícita, o grupo de alunos não expressou nenhuma característica sobre a sequência que produzisse algum tipo de embasamento para a afirmação apresentada.

Proponho aos alunos (T06) que tentem se lembrar das construções realizadas na aula anterior, momento no qual havíamos trabalhado com sequências simbólicas de repetição semelhantes à da presente tarefa. Talita (T07) expõe a ideia de período, apresentando sua definição. Tomando por base as informações dela, sugiro aos alunos que tentem aplicar essa estratégia à sequência que estamos investigando. Em resposta à sugestão, Alice (T09) comunica que o grupo já tentou empregar essa estratégia, mas diz que não obteve sucesso.

Talita (T11) explica que o grupo dividiu o termo 180 por 6, chegando a um quociente 30, com um resto 0. Assim, pergunto sobre a justificativa para a realização da divisão por 6, obtendo da mesma aluna a resposta de que, na sequência analisada, há 6 dias. Em continuidade, a estudante também afirma que não sabe o que fazer com o resultado encontrado.

Observo nesse diálogo a utilização do conceito de período, trabalhado durante aulas anteriores, assim como a aplicação do algoritmo da divisão como possível estratégia para o acesso a termos de uma sequência simbólica de repetição. Por outro lado, há relativa dificuldade na interpretação dos resultados obtidos, dando pistas de que a apropriação desse conceito ainda está em andamento.

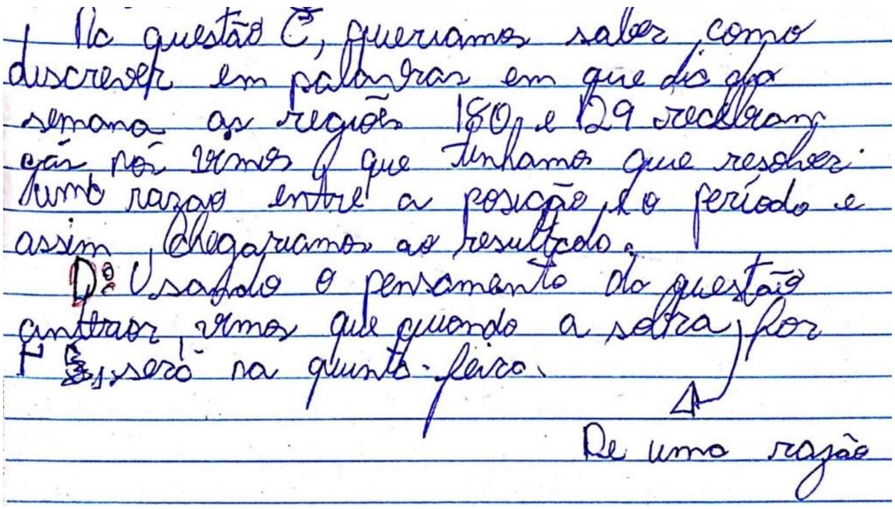
No T14, Alice relaciona o resto obtido na divisão anteriormente realizada, resto 0, com a ocorrência de múltiplos do divisor 6. A aluna afirma que 180 é múltiplo de 6 e, sendo assim, deverá estar contido no mesmo dia dos outros múltiplos de 6, portanto, no sábado. Para tais ocorrências, a mediação pela palavra que realizei fez com que os alunos se tornassem capazes de inter-relacionar as estratégias já adotadas com a nova sequência observada. Minha ação enquanto professor propiciou o estabelecimento de uma zona de desenvolvimento proximal, uma vez que identificou o nível de desenvolvimento real, e auxiliou os alunos a se aproximarem do objeto que está sendo investigado.

Em continuidade, em T15, pergunto aos alunos sobre a estratégia anteriormente descrita por Alice (T05), tentando criar uma situação de proximidade entre as duas descrições de estratégias que emergiram até o momento. Com isso, Talita consegue concluir que, por terem partido do termo 12 para o termo 120, estavam considerando múltiplos do termo referenciado, como descrito na fala da aluna: “*estávamos contando de 6 em 6*” (T16).

Os alunos apresentam indícios de que foram capazes de criar uma generalização algébrica para a definição dos termos da sequência que teriam sua ocorrência no sábado. No T17, questiono os alunos sobre como poderíamos descrever a generalização para os outros dias da semana. Em resposta, Talita parte da referência dos múltiplos do período identificado para definir os outros dias como variações desse ponto de partida, em outras palavras: se tivermos um a mais que um possível múltiplo de seis, teremos um termo que ocorrerá na segunda-feira; se tivermos dois a mais que um possível múltiplo, a ocorrência será na terça-feira; e assim sucessivamente. Alice complementa as ideias de Talita (T23) dizendo que essas variações do múltiplo são os restos da divisão.

Quando sugiro a elaboração de generalizações para todos os dias da semana, Talita apresenta descrições baseadas nos possíveis restos a serem obtidos na divisão, relacionando-os com cada dia da semana. Alice acrescenta que também poderiam construir as descrições fazendo referência aos múltiplos de 6 (T27). Na Figura 21, está o registro realizado pelos alunos sobre a descrição da estratégia utilizada.

Figura 21 – Registro de estratégia de resolução



Fonte: Acervo do pesquisador

No registro acima, constato a generalização em construção na referência à utilização da divisão (a qual chamam de razão) entre a posição e o período de repetição identificado na sequência estudada. Vejo a possível intencionalidade dos alunos ao empregarem palavras que remetem ao vocabulário matemático, já aplicadas em outros momentos, em especial, o termo *razão*.

É notável a forte influência que as interações e as intervenções realizadas pelo professor acarretam durante a aprendizagem. Há, neste episódio, indícios de como uma mediação adequada pode contribuir para os avanços dos alunos. O professor precisa compreender como as ideias dos alunos se organizam para, então, partir de onde estão (desenvolvimento real) e possibilitar que caminhem para níveis mais avançados (desenvolvimento potencial). Esse tipo de mediação pela palavra é fundamental para a produção de significações e para a consequente elaboração conceitual.

Diante dessas premissas, volto-me ao que argumentam Mason e Drury (2007) quando apresentam a possibilidade de influência que as intervenções e interações do professor com os alunos podem acarretar. Nessa situação, o enunciado do professor reflete na elaboração conceitual, ajudando os discentes na construção da generalização buscada.

Logo no T06, há um momento crítico para tal análise, uma vez que, por meio de minha mediação pela palavra, o pensamento do grupo de alunos é conduzido a estabelecer relações entre as produções realizadas em outros momentos de aula e a atual resolução. A partir de T07, iniciou-se uma mobilização de conceitos por meio das intervenções realizadas, apontando para indícios do preenchimento de lacunas existentes na tomada de consciência sobre a generalização de sequência simbólica.

Quando são desenvolvidas tarefas em sala de aula, tais como a que se apresenta neste episódio, enquanto docentes mediadores do processo de ensino e de aprendizagem, devemos nos questionar sobre o momento adequado para intervir, pois a influência dessa ação pode se concretizar de diferentes formas para o aluno. Portanto, para que possamos melhor compreender essa dinâmica, faz-se útil o conceito de zona proximal de generalidade (MASON; DRURY, 2007), termo derivado da zona de desenvolvimento proximal apresentada por Vigotski. O que se observa é que, por meio das mediações realizadas pelo professor, o aluno pode ser aproximado do conceito investigado.

Identificar a chamada *zona de generalidade proximal* de cada aluno é de grande valia, uma vez que o professor pode elaborar, de forma mais direcionada, suas mediações. Caso não haja a devida compreensão por parte do docente dessa dinâmica, as influências das mediações realizadas, muito provavelmente, não promoverão avanços na aprendizagem.

Podemos notar, a partir de T09, quando Alice afirma que o grupo já havia tentado empregar a estratégia sugerida pelo professor, que a generalização já está em desenvolvimento, faltando apenas a tomada de consciência sobre as ações desenvolvidas pelo grupo durante a investigação. Atentando às falas do T10 ao T14, verifico a aplicação do algoritmo da divisão como instrumento para a definição da generalização buscada, mas ainda não há indícios da chamada tomada de consciência sobre sua real função. Apenas no T14, quando Alice atribui significado ao resto obtido, considera-se tal ocorrência.

A partir desse momento, ficam mais evidentes os indícios de apropriação da generalização estudada. Tendo isso em vista, as mediações realizadas pelo professor foram direcionadas à zona de generalidade proximal dos alunos envolvidos nas discussões, uma vez que possibilitaram a conscientização sobre a generalização ou mesmo a apropriação de uma possível estratégia para a definição desse processo.

5.4 Episódio 4: a observação com mediação e a comunalidade que leva à generalização

O episódio aqui descrito foi retirado das gravações e dos registros escritos realizados no dia 23 de novembro de 2017, momento em que os alunos realizaram a nona tarefa. A situação descrita estava na fase de *exploração*. A referida tarefa era a última prevista no cronograma desta pesquisa, caracterizando-se como uma etapa final na consolidação dos conceitos trabalhados na sequência aqui proposta. Vejamos nas Figuras 22, 23 e 24 e nos diálogos que seguem como esse processo se consolidou.

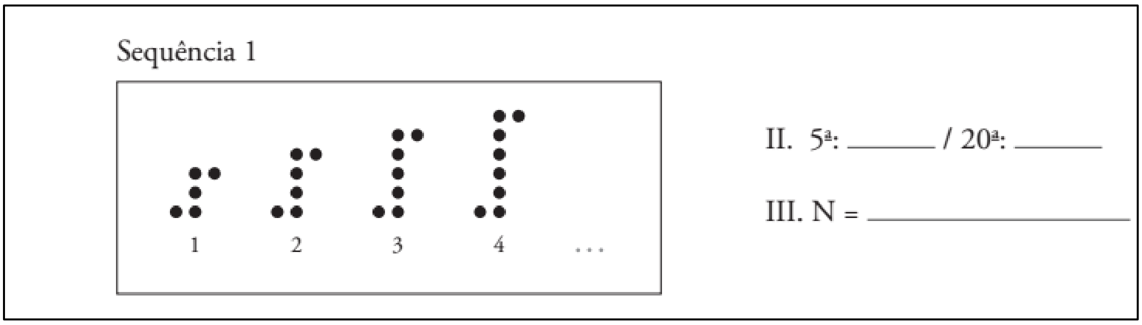
Figura 22 – Enunciado da nona tarefa

13. Em cada uma das sequências a seguir, faça o que se pede.

I. Desenhe a próxima figura da sequência.

II. Calcule o número de bolinhas das figuras que ocupam a 5ª e a 20ª posição.

III. Escreva uma fórmula que relacione o número **N** de bolinhas com a posição **P** que ocupa a figura na sequência.



Fonte: São Paulo (2014a, p. 57)

T 01 Mateus: *Aqui professor, nós somamos com 3, mas, na hora que chega no 20* [faz referência à 20.ª figura da sequência]*, aí não dá para contar.*

T 02 P: *Então, porque a ideia aí não é necessariamente que vocês façam todas as figuras, nós podemos usar a lógica da sequência* *para conseguir adivinhar o que vai acontecer. Lembra o que nós fizemos na aula passada, que estávamos até discutindo hoje?*

T 03 Gabriele: *Tem a ver com aquela ideia das variáveis?* [menciona o conceito que surgiu na socialização do dia anterior]. *A posição e o número de bolinhas.*

T 04 P: *Isso. Tentem observar o seguinte: de que forma a posição se relaciona com a quantidade de bolinhas?*

T 05 Mateus: *Como assim?*

T 06 P: *Olha para a figura número 1, e quantas bolinhas tem?*

T 07 Mateus: *Tem 5.*

T 08 P: *O que podemos dizer que existe de relação entre o número 1 e do número 5?*

T 09 Eliana: *Como assim professor?*

T 10 P: *De que forma o número 1 pode se relacionar como o número 5?*

T 11 Eliana: *Posso dizer que o 5 é maior que o 1?*

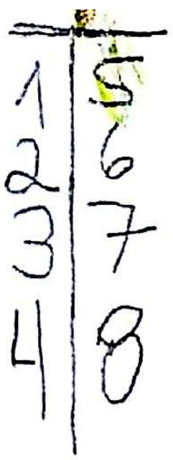
T 12 P: *Acho que sim.*

T 13 Isadora: *Ah, então posso dizer que o 5 é 4 a mais que o 1.*

T 14 P: *Hummm, acho que é um bom caminho. Vamos para a figura 2, quantas bolinhas temos?*

T 15 *Isadora:* [a aluna faz uma tabela, em formato de T, relacionando cada posição com a quantidade de bolinhas, conforme a Figura 17, e observa]. *Já sei, todas são 4 a mais.* [demonstra a relação entre a posição da figura na sequência e a quantidade de bolinhas averiguada, apontando para a representação gráfica da sequência e para a tabela construída.]

Figura 23 – Tabela criada por Isadora



Fonte: Acervo do pesquisador

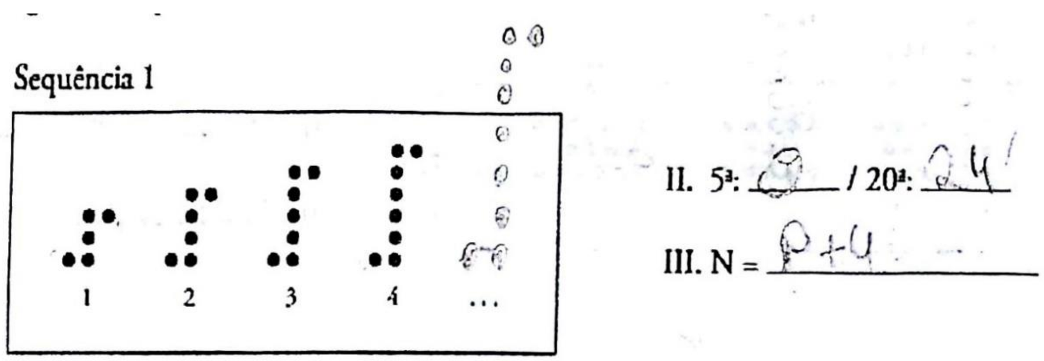
T 16 Gabriele: *É isso mesmo, nessa aqui, oh, temos 7 e a posição é 3.* [apontado para a figura 3 da sequência]

T 17 Mateus: *Não! Mas, se você perceber, vai continuar do mesmo jeito, só vai aumentar uma bolinha aqui* [aponta para o centro da figura 2, compara com a figura 1]

T 18 P: *Mas acho que vocês estão olhando para coisas diferentes.*

T 19 Isadora: *Ele* [Mateus] *está comparando uma figura com outra, e nós não.*
T 20 Eliana: *Nós estamos comparando a posição e o número de bolinhas.*
T 21 Gabriele: *Nossa, já sei, então a figura 20 tem que ter 24 bolinhas.*
T 22 P: *Pelo jeito, é uma boa resposta.*
T 23 Eliana: *E para escrevermos a fórmula?*
T 24 Mateus: *Escreva uma fórmula que relacione o número* N *de bolinhas a posição* P *que ocupa a figura na sequência.* [lendo o enunciado da tarefa proposta]
T 25 Isadora: *Mas como vamos fazer isso?*
T 26 P: *Vocês precisam escrever o pensamento que acabaram de me falar.*
T 27 Mateus: *Então eu vou escrever... eh... P+P?*
T 28 P: *Mas foi assim que vocês encontraram a quantidade de bolinhas da figura 20?*
T 29 Eliana: *Não, nós somamos 4 no 20.*
T 30 Gabriele: *Se fosse assim tínhamos somado 20+20.*
T 31 P: *Então, como acham que fica?*
T 32 Isadora: *O 20 aí é o P* [apontado para o cálculo realizado na folha da tarefa]
T 33 Eliana: *Então fica P mais o número que aumenta.*
T 34 P: *E qual é esse número que aumenta?*
T 35 Gabriele: *O 4. Aí fica N=P+4*
T 36 P: *Isso aí pessoal, bom trabalho.*

Figura 24 – Registro do grupo de alunos para a resolução da primeira sequência da nona tarefa



Fonte: Acervo do pesquisador

No início deste episódio, logo no T01, Mateus busca obter o valor de uma figura inacessível de uma sequência recursiva. Inicialmente, o grupo de alunos tenta adotar uma estratégia recursiva para a obtenção dos termos da sequência.

Problematizo com os estudantes a observação de características da sequência representada (T02), utilizando referências de outros momentos de aula, já ocorridos. Após essa mediação pela palavra, Gabriele (T03) sugere o conceito de variáveis, construção elaborada em aula anterior, destacando como possíveis parâmetros a posição de cada figura na sequência e a quantidade de bolinhas contidas em cada uma.

Continuando tal caminho, no T04, oriento o grupo a observar uma possível relação entre as variáveis destacadas. Direcionados por minha mediação semiótica, por meio das figuras e pela palavra, os discentes analisam a primeira figura da sequência, identificando sua posição como 1 e a quantidade de bolinhas como 5. Afirmam, no fim do T11, que a quantidade de bolinhas é maior que a posição da figura. Ao continuar essa análise, Isadora (T15) aponta que, em todas as figuras, o número de bolinhas é sempre quatro unidades maior que a posição da figura. É importante destacar que, para a construção dessa conclusão, a aluna elaborou uma tabela que relaciona cada uma das posições das figuras com o total de bolinhas observado. O uso desse recurso foi iniciativa do grupo de alunos.

Podemos salientar o importante papel da tabela para o processo de generalização descrito neste episódio, uma vez que ela possibilitou aos alunos observar a relação entre variáveis. A aquisição de novas ferramentas de notação facilita (BLANTON; KAPUT, 2011) o processo do aprender a pensar matematicamente, sendo que esses novos instrumentos agem como fatores que aproximam o aluno da zona de desenvolvimento proximal.

Em suma, o que se observa é que a utilização da tabela para a generalização aqui descrita levou o grupo de alunos ao encontro de uma variação entre a variável independente (posição da figura) e a dependente (quantidade de bolinhas). Isso fez com que os estudantes deixassem de lado um pensamento recursivo, que só permitiria acessar o próximo termo da sequência, para adotar um pensamento funcional, que permite identificar qualquer termo da sequência estudada.

A evolução do pensamento recursivo para o funcional passa por intensas transformações e apropriações. Nela, o foco deve mudar da percepção de uma regularidade na variação de uma única variável para o estabelecimento de uma relação entre variáveis, o que chamamos de variação. Durante esse processo, é comum que o aluno apresente uma análise da relação estudada, mas não compreenda o aspecto de correlação entre as variáveis presentes (BLANTON; KAPUT, 2011). Dessa forma, não há a tomada de consciência sobre a relação funcional que se estabelece no padrão investigado.

É preciso atentar às diferentes possibilidades que podem surgir na operação com o conceito que está sendo elaborado e direcionar o olhar do aluno para o desenvolvimento de uma apropriação ou não. É possível que haja a operacionalização da classificação de objetos ou até mesmo das comunalidades presentes no conceito investigado, sem que haja, propriamente, uma generalização. Essa situação reafirma as potencialidades observadas na evolução do pensamento recursivo para o funcional. Portanto, os recursos simbólicos, como é o caso das tabelas relacionadas às variáveis verificadas, apresentam-se como um caminho favorável ao desenvolvimento do pensamento funcional, mesmo que, em um primeiro momento, o que se apresente seja um pensamento muito mais voltado à elaboração de uma generalização recursiva/aritmética do que a uma generalização puramente algébrica.

Gabriele (T16) utiliza outro exemplo para justificar a conclusão efetuada por Isadora, estabelecendo uma relação de correspondência entre as variáveis. Em contrapartida, no T17 ("*Não! Mas, se você perceber, vai continuar do mesmo jeito, só vai aumentar uma bolinha aqui*"), Mateus mantém a forma de pensamento funcional revelada pelo grupo anteriormente, ou seja, tenta aplicar um processo de generalização recursivo por meio da constatação da variação entre duas figuras consecutivas da sequência.

Nesse momento, intervenho na discussão e aponto para a divergência entre o foco de Mateus e o dos outros alunos no pensamento funcional aplicado. Em resposta, Isadora e Eliana afirmam (T19 e T20) que estão comparando a posição da figura e a quantidade de bolinhas, enquanto Mateus está observando apenas a variação ocorrida entre duas figuras.

Posteriormente, Gabriele (T21) conclui que a 20.ª figura da sequência deve conter 24 bolinhas. Parte do pressuposto de que a variável *quantidade de bolinhas* deve ser 4 unidades maior que a posição da figura investigada. Em continuidade, no T23, os alunos iniciam as discussões em torno da obtenção de uma fórmula que represente a regularidade identificada. Logo de início, Mateus propõe que seja escrita a fórmula $P + P$, sendo esta questionada por Gabriele quando a aluna afirma que, se ela fosse adequada, teriam calculado a 20.ª figura da sequência como $20 + 20$, em que P representa a posição da figura.

Identifico nessa discussão indícios de que a generalização está caminhando para o que podemos chamar de *indução ingênua* (RADFORD, 2008). Isso porque, embora haja abduções quanto à sequência observada, ou seja, ocorra a observação de características presentes na formação de seus termos, tais abduções não são diretamente utilizadas para a produção da generalização objetivada. Assim, adota-se uma estratégia mais baseada em tentativa e erro do que em um processo de indução.

Com base em tal estrutura, posso dizer que são observados casos particulares, componentes da sequência investigada, mas não ocorre o levantamento de comunalidades. Assim, há uma tentativa de adivinhação da expressão de generalização buscada.

No fim do episódio, os alunos chegam à fórmula que representa essa regularidade, conforme a fala original ("*então fica P mais o número que aumenta*"). Desse modo, obtém-se a fórmula $N = P + 4$, na qual N representa a quantidade de bolinhas e P, a posição da figura em questão.

O que se destaca neste episódio é o surgimento de diferentes modos de pensamento funcional, os quais divergem entre si pela forma de verificar as variáveis contidas na situação de estudo. Conforme definem Blanton e Kaput (2011), em uma sala de aula, podem ocorrer os seguintes tipos de pensamento funcional: raciocínio por padrões recursivos e pensamento covariacional.

Assim, os alunos iniciam suas produções a partir de um padrão recursivo identificado na sequência em questão, mas logo percebem a limitação dessa abordagem, uma vez que ela não possibilita a obtenção direta de termos inacessíveis da sequência, sendo necessário o conhecimento da figura antecessora para a elaboração da próxima. Com isso, desenvolve-se uma análise pautada, exclusivamente, na variável dependente, não criando nenhum tipo de relação desta com a variável independente, presente na situação investigada. Embora essa perspectiva se caracterize como uma possibilidade de início do desenvolvimento do pensamento funcional, ela não é capaz de ajudar os estudantes a compreender as relações entre as variáveis, sendo necessárias outras formas do pensamento funcional.

Identifico que os alunos partem para uma investigação voltada ao estabelecimento de uma variação entre as variáveis. Desse modo, passam para uma segunda forma do pensamento funcional. Esse fato destaca-se quando, no T15, surge a comparação entre as variáveis envolvidas, "*posição da figura*" e "*quantidade de bolinhas*"; estabelece-se, assim, uma variação entre estas.

Por fim, sublinho que, embora os outros alunos envolvidos no diálogo tenham alterado sua forma de pensamento, Mateus manteve sua estratégia de observação pautada no estabelecimento de padrões recursivos, mesmo tendo a iniciativa adequada de reler o enunciado da tarefa. No entanto, quando sinaliza que a fórmula poderia ser $N = P + P$ revela que ainda não tinha mudado seu modo de pensar.

5.5 Episódio 5: relações numéricas e espaciais, uma junção que leva à criação

Este episódio ocorreu durante a execução da primeira sequência da nona tarefa proposta para estas investigações, realizada em 23 de novembro de 2017, durante a fase de monitoramento do trabalho. O diálogo transcrito abaixo aconteceu em uma das intervenções do professor-pesquisador. Este se inicia com a aluna *Gisele* chamando-o para contar sobre a construção de seu grupo na resolução da tarefa. O grupo com o qual se estabeleceu a conversa era composto por três alunos. Este episódio se deu na fase de *exploração*.

Figura 25 –Enunciado da nona tarefa

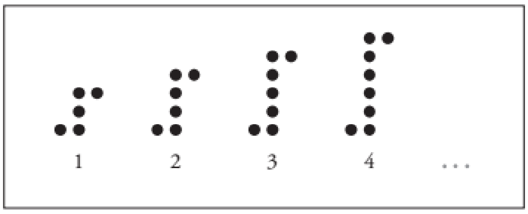
13. Em cada uma das sequências a seguir, faça o que se pede.

    I. Desenhe a próxima figura da sequência.

    II. Calcule o número de bolinhas das figuras que ocupam a 5ª e a 20ª posição.

    III. Escreva uma fórmula que relacione o número **N** de bolinhas com a posição **P** que ocupa a figura na sequência.

Sequência 1



II. 5ª: ______ / 20ª: ______

III. N = ____________________

Fonte: São Paulo (2014a, p. 57)

T 01 Gisele: *Professor, nós resolvemos essa aqui e bateu* [fazendo referência à sequência 1, da tarefa 9]. *Nós fizemos assim: vimos que aqui era uma charada. Na primeira figura* [aponta para as bolinhas na linha inferior], *aqui tem dois, e, na parte de cima, é igual. Na outra figura* [aponta para a segunda figura da sequência], *têm duas na parte de cima e duas na parte de baixo, em cada figura tem duas em cima e duas em baixo.*

T 02 Jade: *Isso, cada figura tem duas bolinhas em cima e duas bolinhas em baixo. Se nós tirarmos essas bolinhas* [trata das bolinhas da linha superior e da inferior, aponta para a primeira figura da sequência], *fica uma bolinha, nessa, fica duas* [sinaliza a segunda figura], *e nessa fica três* [indica a terceira figura].

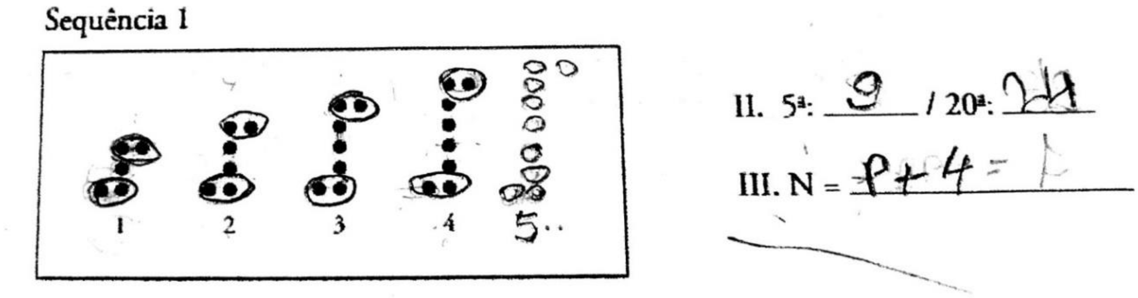
T 03 Gisele: *Isso acontece em todas* [as figuras].

T 04 P: *Mas aí como podemos explicar a quantidade de bolinhas de todas as figuras?*

T 05 Jade: *Vai ser sempre, no meio, a quantidade de bolinhas igual à posição da figura, aí soma quatro.* [faz o desenho da quinta figura da sequência, utilizando o mesmo padrão de distribuição espacial das figuras anteriores.]

T 06 Gisele: *Quatro porque é as de cima e as de baixo.* [circula as duas bolinhas na parte de cima e as duas na parte de baixo de cada figura.]

Figura 26 – Registro realizado pelos alunos do grupo durante a realização da nona tarefa



Fonte: Acervo do pesquisador

T 07	P: *Tá, e como ficará a 20.ª figura?*
T 08	Jade: *Na posição 20, vai ser 20 no meio, mais 4.*
T 09	Gisele: *É, aumenta 4 na posição.*
T 10	P: *E a fórmula, como vocês escreveram?*
T 11	Alessandra: *Nós escrevemos* P+P-2
T 12	P: *Beleza, então vocês estão me falando que, para calcular a quantidade de bolinhas de uma figura, eu tenho que somar a posição com a posição e, no final, tirar 2?*
T 13	Jade: *Hum, professor, acho que tá errado isso. Nós não somamos a posição, nós somamos 4.*
T 14	P: *Sempre 4?*
T 15	Alessandra: *É sempre a posição mais 4.*
T 16	P: *E como poderíamos escrever isso?*
T 17	Gisele: *A posição é no meio* [aponta para a bolinha da linha central da primeira figura da sequência].
T 18	Jade: *É, é isso.*
T 19	Alessandra: *Acho que temos que colocar* P+4.
T 20	P: *Por que* P+4*?*
T 21	Alessandra: *Vamos supor que queremos descobrir a figura* 280 [escreve no papel o número da figura], *nós vamos fazer* 280+4.
T 22	Gisele: *Então vamos colocar* P+4=P.
T 23	P: *Aí vocês estão dizendo que se somar a posição com 4, eu encontro a posição, certo?*
T 24	Jade: *Não pode ser P, tem que colocar N?*
T 25	P: *Por quê?*
T 26	Jade: *Porque o N é o número de bolinhas, e é isso que estamos calculando.*
T 27	P: *Muito bem, pessoal.*

Logo no início(do T01 ao T03), é possível averiguar que as alunas *Gisele* e *Jade*, ao relatarem o percurso traçado pelo grupo na resolução da tarefa, partem de características comuns a todos os termos acessíveis da sequência estudada. Tais propriedades são retiradas tanto da estrutura numérica como da espacial. Nota-se que há uma seleção, entre as possibilidades de observação, de uma das opções de articulação entre diferentes estruturas (numérico-espacial). Apresenta-se o estabelecimento de uma escolha de semelhanças e diferenças entre os termos que compõem o padrão analisado. Ademais, os alunos fixam sua atenção em um determinado conjunto de traços e, a partir destes, constituem sua generalização (RADFORD, 2013).

Pode-se dizer que há uma seleção dessas duas estruturas. Elas geram articulações e significações, além de fornecerem os subsídios necessários para elaborar a generalização buscada.

Diante da representação enunciada pelas alunas, identifico a ocorrência de um processo de abdução. Nele, características comuns aos termos são evidenciadas e, posteriormente, servirão de base para a construção de hipóteses de generalização.

Questiono as alunas (T04) sobre uma forma de “explicarmos” a quantidade de bolinhas que compõe todas as figuras da sequência. Em resposta a tal pergunta (do T05 ao T09), Jade apresenta uma solução que, novamente, revela a articulação entre a estrutura numérica e a espacial notadas na sequência. Assim, vejo que a aluna é capaz de mobilizar e coordenar diversos aspectos de diferentes campos de análise, o que resulta em uma comparação refinada entre eles, processo denominado *contração semiótica* (RADFORD, 2008).

Já no T10, pergunto às alunas sobre como poderiam elaborar uma fórmula para representar a generalização apresentada por elas, ou seja, solicito que transcrevam o que foi expresso na língua materna para a linguagem matemática. Nesse momento (T11), Alessandra apresenta, prontamente, a solução $P + P - 2$, ou seja, indica que, para calcularmos o número total de bolinhas que compõe cada figura da sequência, teríamos que somar a posição (P) com a mesma posição (P) e, ao fim, subtrair dois da quantidade obtida.

Baseado nessa observação, levanto a hipótese de que essa resposta foi produzida por meio da elaboração de uma fórmula genérica (que não é baseada em comunalidades), utilizando um processo puramente arbitrário[54]; logo, tem-se que a aluna não aplicou os elementos destacados anteriormente para compor a expressão apresentada. Portanto, essa fórmula terá um caminho de validação por ensaio e erro, porquanto não tem por base uma dedução, mas sim apenas uma tentativa, pois, embora a aluna mobilize conhecimentos complexos no campo numérico, ainda não consegue usá-los diante da necessidade da transcrição em linguagem algébrica. Tal situação de construção do pensamento algébrico funcional pode ocorrer a partir de um repertório de ferramentas e estratégias de resolução já consolidado pelos alunos, atingindo a possibilidade do desenvolvimento de um raciocínio mais sofisticado, mas ainda sem se consolidar como uma dedução das comunalidades notadas (RADFORD, 2013).

[54] Conforme o dicionário Aulete (ARBITRÁRIO, 2004), assumo o significado de arbitrário como algo que depende do arbítrio ou da vontade de quem decide, que não tem regras estabelecidas (medidas arbitrárias).

Posso dizer que há grandes indícios da construção do pensamento algébrico. Porém, ainda ocorrem fortes referências, puramente aritméticas, à generalização.

No T12, por meio de uma intervenção, busco levar as alunas a refletirem sobre o significado da fórmula elaborada por elas. Logo, Jade (T13) aponta que tal construção é um erro, identificando a necessidade de utilizar as características conferidas na sequência para a elaboração da fórmula. A aluna estabelece uma relação entre os procedimentos aritméticos adotados e o pensamento algébrico, necessário para solucionar a tarefa solicitada. Nessa situação, assumo o importante papel de mediador entre o objeto do conhecimento trabalhado e os alunos por meio de aspectos semióticos, tais como o gesto, a palavra e a escrita. Esses fatores aproximam aluno e conhecimento, por meio da gesticulação e de outros recursos dêiticos linguísticos, os quais, a partir da intencionalidade, buscam se constituir como formas eficientes e evoluídas para construir a generalização matemática (RADFORD, 2012).

A partir de minha intervenção, a percepção das alunas dos aspectos selecionados para a generalização se modifica. Elas cotam que essa contagem pode se transformar em um pensamento funcional, relacionando o número da figura com a quantidade de bolinhas. Por meio desse processo, a atenção das alunas foi direcionada para as características tidas como promissoras para a elaboração da generalização (RADFORD, 2012).

No T14 e no T15, Alessandra explicita a ocorrência de um valor constante em todos os termos da sequência quando faz referência ao fato de termos que somar 4 unidades a todas as quantidades, expondo mais uma característica importante para a elaboração de generalização algébrica. No T19, a mesma aluna propõe que a fórmula para o cálculo de um termo genérico da sequência deveria ser $P + 4$, isso é um indício de conexões realizadas entre a estrutura numérica e a espacial. Para justificar sua produção, a estudante se refere a um exemplo concreto de cálculo, utilizando o papel e o lápis como forma de apoio à concretude de seu pensamento.

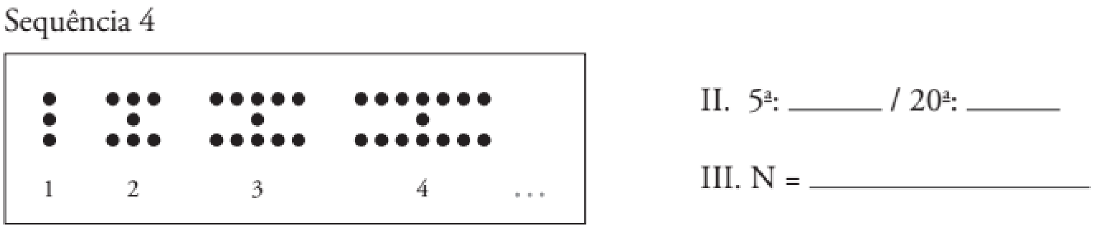
Já na parte final do episódio, ao terminar a elaboração da escrita algébrica, a qual explicita a generalização elaborada pelo grupo, Gisele propõe a expressão $P + 4 = P$. Em seguida, questiono sobre o significado dessa escrita (T23). Logo, Jade (T24) percebe que a expressão em questão não poderia ser verdadeira, pois $P + 4$ era o cálculo da quantidade de bolinhas de cada figura e P representa a posição de cada figura; sendo assim, conforme a mesma aluna propõe, o correto seria $P + 4 = N$, de modo que N é a quantidade de bolinhas de cada figura.

Identifico, nessa parte final do episódio, a importância das mediações realizadas. Por meio delas, busco aproximar o objeto do conhecimento dos alunos, ativando a zona de desenvolvimento proximal.

5.6 Episódio 6: a "iconicidade", relações que vão se construindo

Este episódio foi retirado das investigações realizadas no dia 29 de novembro de 2017 como parte integrante da resolução da nona tarefa. É importante destacar que tal tarefa já estava sendo executada há três dias, sendo que o evento aqui descrito ocorreu no último dia de seu desenvolvimento. Os alunos analisavam a quarta sequência e estavam na fase de *exploração* do trabalho.

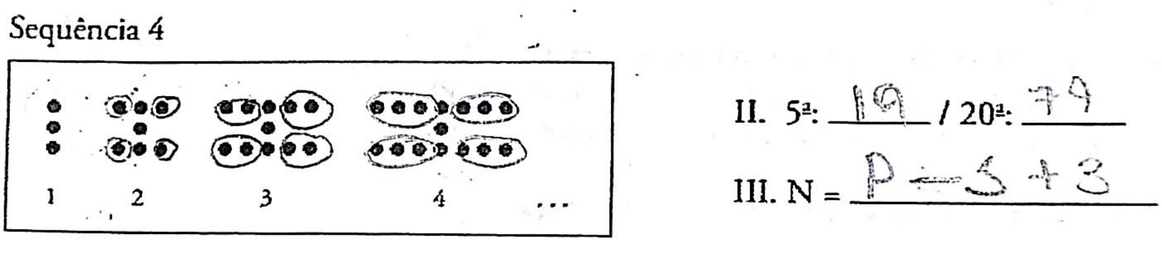
Figura 27 – Sequência 4, contida na nona tarefa proposta



Fonte: São Paulo (2014a, p. 58)

T 01 P: *Contem para mim o que vocês estão fazendo.*
T 02 Eliana: *Estamos resolvendo a sequência 4.*
T 03 Mateus: *Como a Eliana disse, se tirar esse do meio, fica número par* [faz referência às bolinhas situadas no centro de cada figura].
T 04 Eliana: *É, se somarmos as partes* [menciona as bolinhas contidas na linha superior e na linha inferior de cada figura e circula-as, sendo que elas dividem-se em 4 grupos, conforme ilustra a Figura 28]

Figura 28 – Registro realizado pelos alunos



Fonte: Acervo do pesquisador

T 05 P: *Então vocês estão me falando que, em cada lado da figura, ficariam* [aponta para linha superior] *1 e 1* [referencia a Figura 2 da sequência], *2 e 2* [indica a Figura 3 da sequência], *3 e 3* [trata da Figura 4 da sequência]*?*
T 06 Mateus: *E o meio sempre é igual.*
T 07 P: *Legal, mas aí como podemos fazer para encontrar a figura 20?*

T 08 Eliana: *Nós fizemos 20 vezes 4.*
T 09 P: *Então vocês fizeram a posição vezes 4?*
T 10 Eliana: *Sim, aí daria 80.*
T 11 P: *Antes de utilizarmos o pensamento que vocês elaboraram, como podemos verificar se ele está correto?*
T 12 Gabriele: *Podemos realizar um teste.*
T 13 P: *E como seria este teste?*
T 14 Gabriele: *Hum, poderíamos pegar uma figura que já sabemos quantas* [bolinhas] *tem.*
T 15 Eliana: *Vamos pegar a Figura 3 então.*
T 16 P: *Pode ser. Como foi o pensamento de vocês mesmo?*
T 17 Mateus: *Vezes 4* [a posição].
T 18 Eliana: *Aí ficaria 3 vezes 4, que dá 12.*
T 19 Mateus: *Ih, na terceira não tem 12, tem 11.*
T 20 P: *E se tentarmos criar uma relação entre a quantidade de bolinhas em cada ponta da figura* [referindo-se à separação em grupos de bolinhas realizadas na figura] *com a posição da figura?*
T 21 Gabriele: *Oh, professor, vê se tá certo: na primeira figura, não tinha nenhuma bolinha; na segunda, tinha 1; na terceira, tinha 2; na quarta, tinha 3.*
T 22 P: *Pode ser interessante isso.*
T 23 Mateus: *No anterior* [fala da sequência 1 da mesma atividade] *estava imitando a posição da figura*, [relaciona a variável *posição da figura* com a quantidade de bolinhas], *mas aqui não é isso. É uma a menos.*
T 24 Eliana: *É, então na 20 tem* [que] *ser uma a menos, 19.*
T 25 Mateus: *Aí fica 19 aqui, 19 aqui, 19 aqui, 19 aqui* [fala de cada uma das pontas destacadas na sequência].
T 26 Gabriele: *Aí fica 4 vezes 19.*
T 27 Eliana: *Vai ficar faltando as 3 do meio* [discorre sobre a parte constante observada].
T 28 Mateus: *Então fica 79.*
T 29 P: *Acho que temos uma boa resposta.*

No início do episódio, no T01, questiono o grupo de alunos sobre o que estavam resolvendo no momento. De prontidão, um dos estudantes me diz que o grupo está resolvendo a sequência 4 da tarefa proposta.

No T03, Mateus começa sua explicação sobre os pensamentos e as observações que estão sendo desenvolvidos pelo grupo em torno da sequência observada. Percebo, durante sua fala, que ele parte de estratégias já utilizadas em outras atividades, como a observação de características da disposição espacial das bolinhas que formam as figuras das sequências. Tal constatação pode ser reafirmada com base na fala de Eliana (T04) quando ela apresenta sua constatação, fundamentando-a na divisão das bolinhas da figura em grupos iguais. Também é relevante destacar que a aluna usa a representação figural da sequência, realizando agrupamentos de bolinhas, conforme indicado na Figura 23.

Em continuidade ao diálogo, busco consolidar a estratégia dos alunos para a divisão das figuras em partes. Chamo a atenção para a ocorrência de simetria entre os grupos circulados pelos alunos, conforme visto na Figura 28.

Já no T06, Mateus apresenta sua observação em torno da ocorrência de uma parte constante em todas as figuras apresentadas na sequência. Assim, deixa pistas de que nesse momento usa um repertório de soluções aplicadas em situações anteriores.

Quando pergunto (T07) aos alunos como poderiam encontrar a quantidade de bolinhas da 20.ª figura da sequência, quase que instantaneamente Eliana aponta como solução a multiplicação *20 vezes 4*. Todavia, não atenta à questão levantada por *Mateus* sobre a parte constante de todas as figuras.

Respondendo a tal produção, após os estudantes confirmarem a intenção de multiplicar a posição da figura buscada pelo número 4, sugiro a eles que busquem uma forma de validação do pensamento desenvolvido, de modo a comprovar a validade da sentença elaborada. Para isso, no T12 e no T14, Gabriele propõe que eles desenvolvam um teste baseado em uma figura acessível da sequência para que, assim, calculem sua quantidade de bolinhas, confrontando esse resultado com a quantidade real observada. Assim, ela incorpora à estratégia de resolução procedimentos já usados em tarefas anteriores.

Utilizando os resultados desse teste (T19), Mateus conclui que a hipótese de generalização, elaborada pelo grupo, não é válida, pois, conforme Eliana sugere (T15), se aplicássemos essa fórmula à 3.ª figura da sequência, teríamos a quantidade $4.3 = 12$, sendo que, na imagem em questão, podemos encontrar apenas 11 bolinhas. Isso leva o grupo à rejeição da conjectura levantada.

Continuando as mediações, proponho (T20) que seja feita uma tentativa de criar uma relação entre a posição da figura e a quantidade de bolinhas que a compõe. Logo em seguida, Gabriele observa e destaca uma possível relação entre a quantidade de bolinhas de cada conjunto circulado, conforme indica a Figura 28, e a posição da figura na sequência. Em T23, Mateus faz referência à sequência anterior (sequência 1 dessa mesma tarefa), apontando que nela havia uma “imitação” da posição da figura pela quantidade de bolinhas observada em certa parte de cada figura. Criando uma comparação entre a situação anterior e a presente sequência, ele afirma que “*é menos uma*”, mencionando a conexão entre a quantidade de bolinhas em cada grupo circulado e a posição de cada figura.

Do T24 ao T26, Eliana, Mateus e Gabriele concluem que a 20.ª figura terá 19 bolinhas em cada um dos quatro grupos, totalizando assim $4.19 = 76$. Tal relato explicita que os alunos apresentam indícios do desenvolvimento de um pensamento funcional.

Já no fim do episódio, Eliana (T27) chama a atenção para a necessidade de acrescentarmos a quantidade constante observada em todas as figuras. Ou seja, ao cálculo realizado anteriormente, deveríamos adicionar 3, chegando, assim, ao resultado final: 79 bolinhas para a 20.ª figura.

Destaco, nas interpretações aqui apresentadas, a importância do trabalho colaborativo desenvolvido pelos alunos, não sendo raros os momentos em que a produção de um indivíduo colabora com a produção que realizada por outro. Segundo argumentos de Vigotski (1991), as atividades em grupo são grandes potencializadoras do ensino e da aprendizagem, pois todo o processo de pensamento (intrapessoal) é mediado pelas relações que se estabelece com outros sujeitos (fator interpessoal). O autor enfatiza a importância da atividade de imitação[55], a qual é imprescindível à aprendizagem, pois promove a internalização do conceito investigado.

Durante o percurso descrito anteriormente, não foram raros os momentos em que os alunos usaram recursos trabalhados em situações anteriores para, assim, desenharem sua estratégia de resolução para a tarefa estudada. Tais referências se formam pela experimentação individual dos grupos, por minhas sugestões e pela socialização de estratégias realizadas entre os grupos.

O que observo no presente episódio é que o conhecimento objetificado nesta pesquisa, a elaboração de generalizações algébricas, apresenta-se em níveis diferentes. Elas precisam do estabelecimento de inter-relações para se construir e da consequente consolidação do pensamento funcional. Diante de tal necessidade, criar referências para as situações experienciadas se faz uma importante estratégia na busca pelo objeto do saber, situação em que ocorre o fenômeno da iconicidade (RADFORD, 2008).

Quando os alunos realizam comparações entre situações já trabalhadas em outros momentos, buscam possíveis relações de comunalidade ou não entre o objeto que está sendo investigado e esse repertório de experiências. Nessa procura pelo que é semelhante ou diferente, os estudantes podem construir suas hipóteses, utilizando, para isso, a abdução, na qual características comuns são apresentadas por meio de hipóteses.

Como também pode ser observado no episódio, um processo pautado no conceito de *iconicidade*, muito provavelmente, não se dá de forma linear, sendo uma característica observável a ocorrência de idas e vindas, em que hipóteses são levantadas e, em seguida, refutadas, com base em outras percepções e relações estabelecidas. Nesse movimento, o diálogo

---

[55] Segundo Vigotski (1991), compreende-se como imitação o processo de reconstrução interna das operações externas, na qual o sujeito desempenha um papel ativo, tendo a possibilidade de desenvolver um novo conceito.

é fundamental para uma cultura social de aula de matemática. A análise e a refutação das hipóteses possibilitam reflexões de todo o grupo.

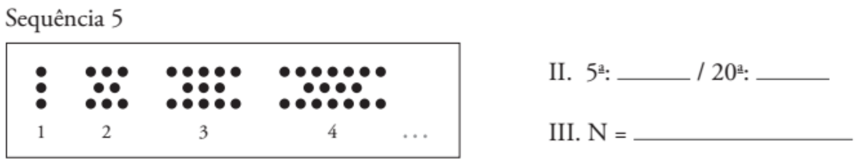
Por fim, destaco que, mais do que a simples utilização de estratégias de raciocínio já aplicadas, tal movimento permite, por meio das novas inter-relações construídas entre os níveis do objeto do conhecimento, o surgimento de uma nova forma conceitual, ou seja, a elaboração de um novo conceito. Essa circunstância se manifesta neste episódio quando os alunos se referem a estratégias já utilizadas em outros momentos e, a partir destas, constroem uma nova, elaborando, assim, uma generalização.

5.7 Episódio 7: o algébrico e o aritmético se misturam

O episódio aqui descrito foi retirado dos registros realizados em 29 de novembro de 2017 durante a execução da nona tarefa. As interações aqui relatadas ocorreram durante a produção em grupo, na fase de *exploração* proposta pela tarefa. São expostos diálogos entre os integrantes de um dos grupos e a mediação não só do professor, mas também dos integrantes do mesmo grupo (mediação entre pares).

A tarefa proposta foi entregue aos alunos em folha impressa, a qual foi por mim recolhida para posterior análise. Tais discussões tinham por objetivo analisar a quarta sequência numérica da referida tarefa.

Figura 29 – Sequência 5, contida na nona tarefa



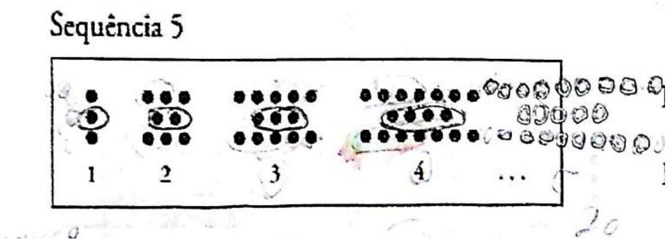
Fonte: São Paulo (2014a, p. 58)

T 01 P: *Fala aí pessoal. E aí, como está nossa tarefa?*

T 02 Willian: *Estamos resolvendo a 5* [sequência]. [aponta para a sequência na folha impressa, na qual já consta um desenho da quinta figura realizado pelo grupo].

T 03 Gisele: *Professor, nós percebemos que no meio* [sinaliza a linha central de cada uma das figuras da sequência] *está aumentando de um em um. Na parte de cima e na parte debaixo, está aumentado uma de cada lado, uma aqui uma aqui* [indica as laterais de cada uma das linhas superior e inferior de cada figura, as quais se encontram com os registros expressos na Figura 30].

Figura 30 – Registro realizado pelo grupo de alunos



Fonte: Acervo do pesquisador

T 04 P: *Isso, vocês estão comparando uma figura com outra?*

T 05 Gisele: *É, tipo daqui para aqui aumenta um* [aponta para a figura 1 e 2 da sequência]. [Pausa]. *Acho que percebi mais alguma coisa. Aqui no meio tem 3 bolinhas e a posição é 3* [sinaliza para a terceira figura da sequência]. *Na linha de cima, tem 3 no meio e uma em cada ponta. Embaixo é igual a de cima. Se fosse a posição 20, teria 20 no meio e uma em cada ponta, em cima e embaixo, né?*

T 06 P: *Hum, mas você testou esse raciocínio para outras figuras que já temos prontas?*

T 07 Gisele: *Ainda não.*

T 08 Willian: *Oh, Gisele, acho que não vai dar certo. Na segunda* [figura], *na parte de cima, tem uma bolinha só no meio, mais as duas da ponta. Teria que ter duas no meio.*

T 09 Gisele: *É professor?*

T 10 P: *O que vocês acham?*

T 11 Willian: *Aí, professor, na figura 20, teria 20 bolinhas no meio, mais 2, 1 em cada ponta. Isso em cima e embaixo. Aí seriam 22 em cima e 22 embaixo.*

T 12 Gisele: *Deixa ver.* [olha atentamente para a sequência]. *Na* [figura] *4, tinha que ter 4 bolinhas no meio* [aponta para a linha superior da figura] *mais uma em cada ponta, só que tem 5 bolinhas.*

T 13 P: *E agora?*

T 14 Willian: *É verdade, tá errado. Não tá batendo.*

T 15 P: *Tentem criar uma relação entre a posição da figura e a quantidade de bolinhas na linha de cima e na linha de baixo.*

T 16 Willian: *Na primeira figura, tem 1 bolinha, na segunda tem 3, na terceira tem 5 e na quarta tem 7.* [conta a quantidade de bolinhas da linha superior e inferior de cada figura da sequência].

T 17 Gisele: *Tá aumentando de 2 em 2.*

T 18 Willian: *Professor, podia ser a posição vezes 2?*

T 19 P: *Testa para ver se bate.*

T 20 Willian: *Na primeira, ficaria 1 vezes 2. Hum, dá errado, tinha que ser 1 e vai dar 2.*

T 21 P: *E na segunda, como ficaria?*

T 22 Willian: *Ficaria 2 vezes 2, que dá 4, mas tinha que dar 3.*

T 23 Gisele: *Tá dando sempre um a mais. É só tirar um então.*

T 24 P: *Isso dá certo para todas as figuras?*

T 25 Gisele: *Dá sim professor, olha a* [figura] *4. Fica 2 vezes 4, que dá 8, aí tira 1, fica 7.*

T 26 P: *E na linha de baixo, como fica?*

T 27 Gisele: *Fica igual, é igual.*

T 28 P: *Beleza, e como podemos fazer para calcular a quantidade de bolinhas da 20.ª figura?*

T 29 Willian: *Vai ter 20 no meio, 39 em cima e 39 em baixo.*

T 30 Gisele: *Aí dá* [pausa para realizar os cálculos] *98 bolinhas.*

T 31 P: *Acho que é uma boa resposta. E como podemos escrever uma fórmula para encontrarmos a quantidade* [de bolinhas] *de qualquer figura?*

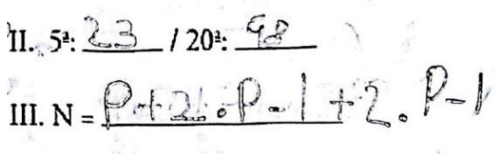
T 32 Willian: *No meio pode ser* P.

T 33 P: *Por que* P*?*

T 34 Willian: *Porque é sempre igual a posição* [escreve no papel P].

T 35 Gisele: *Em cima, é 2 vezes P, e tira 1* [registra no papel como $2.P-1$]. *E embaixo é igual* [grafa, novamente, no papel como $2.P-1$, formando, assim, a expressão $P+2.P-1+2.P-1$, concluindo o registro contido na Figura 31]

Figura 31 – Registro criado pelo grupo de alunos



Fonte: Acervo do pesquisador

T 36 P: *Muito legal, acho que temos uma boa solução.*

No início deste episódio, pergunto a um dos alunos do grupo sobre o andamento da tarefa proposta. Em resposta, o grupo comunica que estão trabalhando na sequência 5.

No T03, Willian inicia me explicando o caminho percorrido pelo grupo, na busca pela generalização da sequência observada. Durante suas explicações, aparecem referências espaciais da formação das figuras da sequência, ocorrendo expressões como: “na parte de cima” e “na parte de baixo”. Isso mostra que esses aspectos são utilizados e relacionados às observações do campo aritmético a partir da contagem de bolinhas em cada parte da figura observada.

Também noto, conforme ilustra a Figura 30, que, logo no início, os alunos em questão já haviam desenhado a quinta figura da sequência, indicando, portanto, que dominaram a estratégia de sua formação no âmbito espacial e aritmético, pois foram capazes de desenhar uma figura, a princípio, inacessível da sequência, mantendo o padrão de formação espacial e aritmético. O que ocorreu nesse momento é que os alunos conseguiram constatar uma regularidade nesses aspectos. Embora tal compreensão deva fazer parte da generalização, apenas essa produção não é capaz de levar à obtenção do objetivo final da tarefa.

Em continuidade ao diálogo, Gisele (T03) conta sobre seu pensamento, fazendo referências espaciais ao tratar das figuras da sequência, dividindo-as em três linhas — superior, central e inferior. A aluna destaca o que acontece a cada nova figura: na linha central, é acrescentada uma nova bolinha; e nas linhas superior e inferior, são adicionadas duas bolinhas, uma de cada lado, marcando esta última expressão tanto pelo discurso apresentado como pelos gestos de apontamento. Identifico a construção de um pensamento aritmético, pois, embora haja elementos generalizadores presentes em seu discurso, tais como a observação do padrão espacial e aritmético de formação da sequência, não há elementos do pensamento algébrico explicitados em sua fala. Há uma generalização parcial do processo, por conseguinte, é visível que, por meio da estratégia traçada pelo grupo, pode-se chegar ao pensamento algébrico.

Após a exposição de *Gisele*, verifico com os alunos o fato de estarem comparando as figuras que formam a sequência, e Gisele (T05) confirma a utilização de uma estratégia recursal, ou seja, aponta que eles atentam para as questões de relação apenas entre as figuras, deixando de lado a variável *posição da figura*. Por meio de minha mediação semiótica, a qual utiliza de figuras e da palavra, a mesma aluna leva em conta a correspondência entre a *posição da figura* e a quantidade de bolinhas observadas na linha central das figuras.

A aluna, no T05, construiu a hipótese: "*Aqui no meio tem 3 bolinhas e a posição é 3* [aponta para a terceira figura da sequência]. *Na linha de cima, tem 3 no meio e 1 em cada ponta. Embaixo é igual a de cima. Se fosse a posição 20, teria 20 no meio e uma em cada ponta, em cima e embaixo, né?*". A estudante revela indícios de um pensamento com características funcionais, caminhando para uma generalização por indução. Contudo, ao tentar descrever funcionalmente o que ocorre na linha superior e na inferior das figuras, faz uma indução ingênua, conforme definido por Radford (2008), pois, embora utilize argumentos/observações plausíveis para a elaboração de uma hipótese de generalização, não usa comunalidades suficientes para a sustentação da hipótese criada. Constata apenas a figura para a qual aponta, ou seja, a terceira figura da sequência.

Pergunto a esses alunos se já testaram o raciocínio criado para outras figuras (T06), e Gisele (T07) responde: "*Ainda não*". Como uma possível reflexão da mediação realizada, no T08, Willian (T08) dialoga com Gisele sobre a validade da hipótese criada pelo grupo, destacando que a segunda figura possui apenas uma bolinha no meio da linha superior e não duas, conforme a hipótese levantada sugere. Para isso, o aluno utiliza de gestos que demarcam as regiões destacadas na Figura 32. Repito o trecho do diálogo para facilitar a análise:

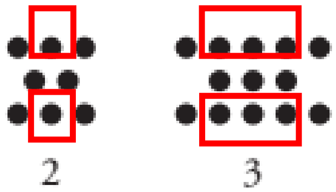
T 08 Willian: *Oh, Gisele, acho que não vai dar certo. Na segunda* [figura]*, na parte de cima, tem uma bolinha só no meio, mais as duas da ponta. Teria que ter duas no meio.*

T 09 Gisele: *É professor?*

T 10 P: *O que vocês acham?*

T 11 Willian: *Aí, professor, na figura 20, teria 20 bolinhas no meio, mais 2, 1 em cada ponta. Isso em cima e embaixo. Aí seriam 22 em cima e 22 embaixo.*

Figura 32 – Representação da fala de Willian, no T08



Fonte: Acervo do pesquisador

Nos turnos seguintes (T09 a T11), alunos e professor dialogam sobre a validade da hipótese. Chegam à conclusão de que esta é falha na descrição da quantidade de bolinhas presentes nas linhas superior e inferior de cada figura.

Já no T12, Gisele aponta um argumento para consolidar a rejeição da hipótese formulada, fazendo com que o grupo se volte novamente para as observações iniciais da sequência. Ela chama a atenção (T17) para o aumento da quantidade de bolinhas das linhas superior e inferior das figuras de 2 em 2, o que leva Willian (T18) a expressar a hipótese de que essa quantidade poderia ser representada pela "*posição vezes dois*". Nesse momento, a ação de Gisele se caracteriza como uma mediação semiótica, por meio da observação das figuras e da palavra, entre pares. Novamente o professor sugere que testem a hipótese levantada. Embora a criação da afirmação "*posição vezes dois*", potencialmente esteja relacionada às características da sequência apresentadas pelo grupo, ainda não há como afirmar que está se desenvolvendo uma generalização algébrica que deixe de lado a indução ingênua.

Ao testar a afirmação elaborada (T22 e T23), Willian e Gisele chegam à conclusão de que a generalização apresentada produz sempre uma quantidade maior em uma unidade da que realmente consta nas figuras da sequência. Assim, elaboram uma nova afirmação sobre a situação, e Gisele assinala que se deve retirar uma unidade da "*posição vezes dois*".

No T24, quando pergunto sobre a validade da sentença elaborada, Gisele logo apresenta outra figura para validar sua fala. Dessa forma, aplica um maior número de exemplos para fundamentar a hipótese levantada.

Do T28 ao T30, quando faço perguntas, os alunos conseguem encontrar a quantidade de bolinhas contidas na 20.ª figura da sequência. Com isso, demonstram a aplicação de um pensamento funcional, na qual relacionam as variáveis *posição da figura* e *quantidade de bolinhas*. Nesse momento, embora ainda não tenha sido aplicada nenhuma linguagem alfanumérica com o objetivo de representar a regularidade observada, o que temos em mãos é uma fórmula capaz de calcular a quantidade de bolinhas de qualquer termo da sequência. Portanto, constitui-se uma operação baseada em uma ação corporificada[56], conforme Radford (2009) intitula, dessa forma, é possível classificar a expressão criada pelos alunos neste episódio como uma *fórmula em ação*[57].

Na parte final do diálogo, pergunto sobre como poderíamos formular uma sentença matemática para representar a generalização encontrada. Willian (T34) sugere que a linha central seja representada por P, pois a quantidade de bolinhas desta é sempre igual à posição. Para concluir, em T35, Gisele afirma que as linhas superior e inferior devem ser representadas por "*2 vezes P e tira 1*", registrando no papel esta expressão: $2.P - 1 + 2.P - 1$. Faz referência à igualdade entre as linhas superior e inferior, concluindo a fórmula como $N = P + 2.P - 1 + 2.P - 1$, como também pode ser observado na Figura 31.

Certamente, o pensamento que se desenvolve neste episódio contém características algébricas, uma vez que cria relações funcionais entre variáveis. Por mais de uma vez, os alunos usaram a indução ingênua, embora estivessem sempre constatando comunalidades presentes entre as figuras da sequência estudada. Essas ocorrências ainda podem ser destacadas pela necessidade da realização de testes sobre as hipóteses elaboradas, mostrando que a abdução não se concretizava em uma hipótese livre de questionamentos ou testes.

Observando os elementos do pensamento algébrico aqui definido, podemos caracterizá-lo como pensamento algébrico factual. Isso porque, embora esteja sendo definida uma situação de indeterminação, ou seja, de variável, o conceito ainda não chega ao nível do discurso, ocorrendo, de forma implícita, o que Radford (2009) sugere como pensamento algébrico factual.

O que identificamos neste episódio é a utilização de variáveis sempre representadas por valores contidos em exemplos particulares. Em momento algum, os alunos mencionaram-nas de forma indeterminada, consideravam apenas sua representação como um espaço vazio a ser preenchido por algum valor averiguado em um caso particular.

Tais produções estão intimamente ligadas a números específicos, mantendo-se em uma camada de generalidade inicial, na qual a indeterminação não aparece de forma explícita, e em

---

[56] Palavra com tradução minha; termo original, em inglês: *embodied action*.
[57] Palavra com tradução minha; termo original, em inglês: *in-action-formula*.

uma situação que não ultrapassa o universo de números específicos. Apesar disso, não podem ser classificadas como uma forma mais simples ou menos evoluída de generalização algébrica, pois, no desenvolvimento do pensamento algébrico factual, operamos com diversas representações semióticas, tais como símbolos, palavras, gestos, os quais são captados por meio da observação, chegando, assim, à utilização da indeterminação de valores e da correlação em as variáveis notadas (RADFORD, 2009). Portanto, para o estudo do pensamento algébrico, no que se refere ao processo de generalização de sequências, é preciso atentar à não linearidade e às diferentes formas pelas quais o pensamento pode se constituir, sem partir de uma relação de superioridade ou inferioridade entre elas.

Com essas observações, encerro as análises aqui expostas. Apresento, a seguir, o último capítulo desta pesquisa. Nele, destaco as contribuições desta investigação, assim como aponto caminhos para novos estudos.

6 OS CAMINHOS TRILHADOS ATÉ AQUI

Este é o momento de finalizar este relatório, embora saiba que, como todo texto, ele está inconcluso e é passível de novas complementações. Apesar disso, uma etapa se conclui. Para este momento de apresentação dos principais resultados, reflexões e conclusões, elenco três eixos: o primeiro relaciona-se ao processo de análise; o segundo, ao desenvolvimento do pensamento algébrico; e o terceiro, a minhas ponderações sobre o processo vivido.

6.1 Os resultados da pesquisa emergentes da análise dos dados

Em meio às diversas possibilidades de investigação, escolhi a busca por indícios de significações ligadas à produção de generalizações a partir de sequências figurativas e/ou numéricas. Trago, assim, elementos da generalização aritmética e da algébrica identificados no movimento ocorrido em sala de aula.

Destaco a natureza das tarefas que propiciaram a investigação de sequências, objetivando a criação de generalizações. Esse tipo de prática se fez fundamental para a promover o pensamento algébrico, constituindo-se como elemento indispensável a esse componente do raciocínio matemático.

Nas análises realizadas, identifiquei a ocorrência de significativos componentes da perspectiva histórico-cultural. Logo que as iniciei, deparei-me com a importância de usar os diversos meios semióticos e ferramentas pedagógicas para a externalização dos pensamentos. Não foram raros os momentos em que os alunos fizeram uso de múltiplas linguagens, tais como a fala, a escrita, o gesto e o desenho. É a partir da complementariedade dessas representações que o pensamento é expresso, daí a grande importância que se atribui à análise microgenética, a qual considera cada uma das minúcias presentes na constituição desses registros.

Essas diversas representações se fizeram presentes nos episódios aqui retratados quando gestos (destaco os episódios 1 e 2 do capítulo anterior), palavras e representações escritas eram essenciais para a elaboração conceitual desenvolvida. Estabeleceu-se, assim, um ambiente de mediação entre os sujeitos participantes, no qual essas representações eram imprescindíveis para a produção de significação.

Em meio a essas formas de expressão, compostas por múltiplas linguagens, as quais exteriorizam o pensamento, constituem-se as relações sociais que se estabelecem entre os sujeitos participantes dos processos de ensino e aprendizagem. Dessa forma, o outro assume importante papel para a formação dos conceitos que levarão à (re)construção de significações.

Esse fenômeno parte dos estudos histórico-culturais e da teoria da objetificação do conhecimento exposta por Radford (2012), a qual considera que o pensamento se forma em uma relação entre o sujeito pensante e as formas culturais de pensamento em que o indivíduo se insere. Ele mostra sua representatividade nas situações abordadas por esta pesquisa.

Nos episódios analisados, constato a importância das relações sociais para a elaboração conceitual e a produção de significações. Isso é visível, sobretudo, nos episódios 2 e 3, nos quais ocorrem interações entre os sujeitos envolvidos que os levam a construir os conceitos-objeto da investigação. É por meio da relação com o outro que se tece a trama de conclusões que pode levar à produção do conhecimento, neste caso, à produção de uma generalização.

Durante tal produção, no momento em que os alunos são capazes de não somente observar certa característica comum aos elementos acessíveis de uma dada sequência, mas também aplicá-la a outros elementos não acessíveis, há a abstração. É por meio desta que chegamos à generalização da sequência analisada.

Nos dados analisados (destaco o episódio 2), concluo que, progressivamente, foram construindo-se inter-relações entre as sequências que estavam sendo estudadas. Assim, possibilitou-se que a abstração criada para uma delas fosse generalizada para outra posterior. Nesse sentido, ressalto a potencialidade da sequência de tarefas possibilitando as conexões entre elas (HIEBERT *et al.*, 1997).

Nesta dinâmica, convém atentar à possibilidade da apresentação de uma falsa generalização. Esta se forma por um processo de não consciência das comunalidades que devem compor os argumentos necessários para a indução de uma generalização algébrica, assim como apresentam Mason e Drury (2007).

Ao observar os resultados obtidos com as tarefas propostas, as mediações do professor são de grande relevância para a construção dos conceitos apresentados, as quais, possibilitaram avanços nessa construção. A intervenção intencional e bem planejada do educador durante a atividade dos alunos se exprime como ação potencializadora da significação que está a se desenvolver. Embora essa ação manifeste sua alta capacidade, caso não seja desempenhada com a devida intencionalidade, pode apresentar diferentes reflexos sobre a ação a ser desempenhada pelos alunos, como afirmam Mason e Drury (2007). Assim, podem auxiliar o aluno na construção dos significados necessários à aprendizagem, mas também podem induzi-lo à construção de falsas verdades ou mesmo à cristalização de um processo de aprendizagem.

Nos episódios analisados (destaco o episódio 3), constato a importância da mediação consciente e intencional do professor para a dinamização do processo em movimento. Por meio dessas intervenções, o docente atua na zona de desenvolvimento proximal do aluno, auxiliando-o na produção de significações (VIGOTSKI, 1991).

Essas mediações devem considerar os indícios do nível de desenvolvimento real em que o estudante se encontra e objetivar, assim, o nível de desenvolvimento potencial buscado pela tarefa proposta, chegando à zona de desenvolvimento proximal. Como afirmam Blanton e Kaput (2011), para que se possa promover a estruturação do pensamento matemático, em especial do raciocínio algébrico, é necessário que o aluno adquira as ferramentas de investigação e representação de seu pensamento, objetos esses que ainda não fazem parte das vivências do sujeito, mas que, a partir das mediações realizadas pelo professor e da interação com seus pares, podem ser apropriados pelos discentes, tornando-se instrumentos da pesquisa em curso.

Constatei a importância da aquisição dessas ferramentas matemáticas, bem como da mediação entre os sujeitos participantes, principalmente, no episódio 4. Nele, a partir desses elementos, a elaboração do pensamento algébrico e da generalização estrutura-se.

Nas produções apresentadas pelos alunos, pude também observar o que Radford (2008) denomina de indução ingênua. Tal ocorrência se forma a partir de uma generalização construída sem a utilização das comunalidades observadas nos termos da sequência. Nesse caso, embora as comunalidades possam ser observadas, não são integradas à generalização, como destaquei no episódio 4.

Por meio das ferramentas matemáticas (HIEBERT *et al.*, 1997) que o aluno adquire em suas investigações, assim como das relações que vai estabelecendo entre as diversas situações observadas, ele produz um repertório de possíveis soluções. A partir deste, cria generalizações que possibilitam a definição de estratégias de resolução mais diretas e focadas em certos aspectos da sequência observada. Nesse sentido, relembro o que argumenta Radford (2013), quando chama a atenção para as possiblidades de ponto focal, sendo que estas podem centrar-se, por exemplo, na forma dos termos, no número da figura, na cor, no espaço entre as figuras, entre outras características que podem ser notadas em uma sequência. Um exemplo dessa ocorrência está no episódio 5, quando os alunos participantes decidem atentar para os aspectos numéricos e espaciais componentes da sequência investigada.

À medida que os alunos constroem um repertório de possíveis estratégias de resolução, ocorre também o surgimento de inter-relações entre esses caminhos de pesquisa. Ao procurar uma generalização, em uma nova sequência, esse sujeito recorrerá às experiências anteriores, projetando a estratégia anteriormente utilizada para a nova situação analisada. Radford (2008) chama esse processo de iconicidade, ressaltando que essa ocorrência não se fundamenta apenas no contraste entre duas formas conceituais, mas também na identificação de similaridades e/ou divergências no objeto observado. Um exemplo de tal ocorrência pode ser observado no episódio 6, quando os alunos envolvidos utilizam, para fundamentar sua estratégia de generalização, argumentos já usados em outras sequências, fazendo referências a elas.

A utilização de uma linguagem matemática formal, certamente, deve fazer parte do desenvolvimento do pensamento algébrico, mas não é determinante para a ocorrência de aspectos algébricos nem para o surgimento da generalização algébrica. Radford (2009) argumenta que podemos elaborar uma generalização algébrica contendo todos os elementos necessários para a constituição do pensamento algébrico funcional sem que seja usado um sistema alfanumérico formal para a representação da generalização proposta. O autor intitula esse processo de *ação corporificada*, denominando a *fórmula de cálculo* que se elabora de *fórmula em ação*.

Em meio a essa elaboração do pensamento algébrico funcional, algumas características constituintes dessa forma de pensar podem se encontrar em fase de desenvolvimento. Como exemplo disso, há a aparição da chamada *indeterminação*, componente fundamental para a caracterização do pensamento algébrico. Tal traço pode ser implicitamente considerado, mas, de forma evidente, pode não aparecer no discurso, o que Radford (2009) denomina de *pensamento algébrico factual*. É importante destacar que a chamada indeterminação pode se fazer presente pela utilização de diversos exemplos durante o discurso, evidenciando a possibilidade de variação dos valores apresentados e levando à ocorrência de um valor indeterminado/variável. Identifico tal ocorrência no episódio 7, quando, durante as falas dos alunos, percebi fatores constituintes do pensamento algébrico, embora a indeterminação não aparecesse de modo explícito, mas sim de forma subentendida.

A inter-relação entre os fenômenos presentes na produção de significações, perante o desenvolvimento do pensamento algébrico, mostra a grande potencialidade das investigações voltadas a tal âmbito. Verifiquei a partir dessas construções que essas ocorrências não se dão de forma isolada, mas sim acontecem em meio a uma teia de produções, que constituem a complexibilidade do estudo de processos significativos de ensino e aprendizagem.

Em meio às interações aqui descritas, embora tenha sido destacada a emergência de conceitos relacionados à produção de significações a partir da elaboração do pensamento algébrico, o que se apresenta é apenas uma possibilidade de análise. Isso porque, em cada um dos episódios retratados, é possível identificar a ocorrência de outros conceitos, os quais se revelam como uma potencialidade para análise.

6.2 Os aspectos relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico

Com relação às contribuições desta pesquisa para o desenvolvimento do pensamento algébrico, percebo que são muitos os conceitos que emergiram das discussões feitas durante a realização deste estudo. Para efeitos de organização, eles serão elencados a partir da ordem em que surgiram ao longo da construção do cenário aqui descrito.

As tarefas apresentadas tinham como objetivo investigar a elaboração da generalização algébrica por meio da adoção da observação de padrões. Tais padrões se apresentam a partir de diferentes representações semióticas, as quais se mostraram, não por acaso, potencialmente favoráveis à evolução do pensamento algébrico.

Ao partir de padrões de repetição que utilizavam representações figuradas para caracterizar o padrão que se instaurava, foi criado um ambiente de comunicação mais próximo ao aluno. Nessa situação, não se fazia necessária a utilização de linguagem matemática formal, possibilitando, assim, que a linguagem materna fosse usada para a representação do padrão que era observado.

Nessa conjuntura, posso apontar a importância da diversidade de representações semióticas na elaboração do pensamento algébrico, pois, por meio dessa estratégia, é possível agir na zona de desenvolvimento proximal que se instaura entre aluno e objeto de investigação. Assim, as tarefas precisam ter um sequenciamento que privilegie essas diferentes representações.

Em meio a essas representações diversas, foram propostos, de forma progressiva, padrões que exigiam, para sua generalização, estratégias mais elaboradas. Embora a generalização a partir da observação de um padrão recursivo (que aqui chamo de generalização aritmética) seja importante para a elaboração do pensamento algébrico, quando devemos criar uma generalização de longo alcance, fica claro o caráter fundamental da construção de táticas capazes de indicar determinado termo de uma sequência de forma direta, sem, necessariamente, passar por todos os seus antecessores. A partir dessa necessidade, partimos para o que chamamos de generalização algébrica, por meio da qual se instaura a manifestação do pensamento algébrico funcional.

Observo que a generalização aritmética contribui para a algébrica, pois, a partir da primeira, é possível o desenvolvimento da capacidade de constatar comunalidades presentes nos termos de uma sequência, estabelecendo uma relação entre esses dois processos. Também é importante destacar que, no decorrer das atividades, à medida que os alunos avançavam num repertório de estratégias de resolução, a generalização aritmética, progressivamente, tornava-se mais implícita, dando lugar a situações mais voltadas às características da generalização algébrica.

Essa habilidade de observação se apresentou como fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesse movimento, a mediação semiótica e o fenômeno da iconicidade (o qual estabelece relações entre estratégias utilizadas em outras situações com a circunstância investigada) foram potencializadores desse desenvolvimento.

Esse percurso decorreu do sequenciamento de tarefas que consta do material da rede pública paulista, o que me permite afirmar que ele foi bem planejado e se aproxima das recomendações da literatura aqui tomada como referência. No entanto, de nada adianta uma sequência bem elaborada se o professor não souber explorar suas potencialidades e criar um ambiente propício à aprendizagem em sala de aula, no qual, principalmente, haja a discussão e o compartilhamento de ideias entre os alunos.

Após esta pesquisa, posso afirmar que um bom sequenciamento de tarefas é aquele que:

- utiliza, inicialmente, sequências repetitivas, que possibilitam a compreensão do que é um padrão de repetição e a criação de leis de formação, sendo as sequências figurativas potencializadoras dessa compreensão;
- usa sequências recursivas para que os alunos se apropriem da ideia de recursividade e sejam capazes de pensar progressivamente;
- possibilita que as estratégias utilizadas numa tarefa sejam aplicadas em tarefas posteriores;
- exige, a princípio, generalizações aritméticas para, progressivamente, permitir que os alunos construam generalizações algébricas mais elaboradas;
- permite que as múltiplas linguagens se articulem na compreensão e na elaboração das leis de formação;
- fornece ao professor pistas da importância desse sequenciamento e do modo como os objetivos das tarefas se imbricam e se tecem para possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Ao iniciar a pesquisa, numa primeira avaliação do material a ser utilizado, vislumbrei que ele tinha potencial, mas, somente no desenvolvimento desta investigação, por meio dos estudos teóricos e da análise, suas potencialidades ficaram mais evidentes. No entanto, como destacado em diferentes momentos, a apropriação dos modos de condução de uma aula, na perspectiva histórico-cultural, foi o diferencial para que essas tarefas atingissem os objetivos propostos.

Destaco a importância da tomada de consciência, por parte dos professores, dessas características de formação do pensamento algébrico. A partir desse conhecimento, o docente poderá elaborar tarefas que promovam o desenvolvimento das situações necessárias para a elaboração de generalizações algébricas e a produção de significação relacionada ao objeto observado.

6.3 O que ficou da experiência com a pesquisa

Neste momento final de reflexão, ao direcionar o olhar para todo o percurso aqui descrito, pondero sobre a desafiadora prática da pesquisa desenvolvida dentro dos âmbitos educacionais.

Essa atividade nos leva à possibilidade de nos (trans)formarmos enquanto docentes, nesse processo de constante aprendizagem. Após traçar as trilhas que aqui se apresentaram, vejo o quão fundamental se mostra a prática investigativa para a formação docente, em especial, o estudo sobre a própria forma de lecionar. Somente por meio dessa investigação, o professor pode se tornar consciente de suas práticas, tornando suas ações pedagógicas mais assertivas quanto aos objetivos traçados.

O que se apresenta por meio da produção deste relatório é o percurso de um professor que buscou, e continua buscando, respostas para seus questionamentos sobre as possibilidades da construção de uma escola capaz de promover um ambiente em que se possa, verdadeiramente, construir conhecimento por meio de significações e garantir a acessibilidade ao saber matemático por todos os alunos (HIEBERT *et al.*, 1997). É a partir dessas possibilidades que surgem as inquietações que deram origem a estas investigações.

Por se caracterizar como uma pesquisa qualitativa, o objeto de investigação assim como a abordagem metodológica para tal foram se formando ao longo do percurso. Posso afirmar que, inicialmente, visualizava tal situação como muito desafiadora, pois essa instabilidade demanda uma grande gama de conhecimento para que se visualize as potencialidades do cenário de pesquisa.

Ao rememorar todo este percurso, vejo quão desafiador ele se fez. Desenvolver a prática da pesquisa, somada com todas as outras atribuições que um professor, em nossos dias já possui, não é nada fácil. Não estou falando de apenas algumas horas de dedicação à pesquisa, mas sim de muitas horas de entrega, pois não descrevo aqui um processo linear — com começo, meio e fim —, mas uma dinâmica de idas e vindas, pelas quais se traçou o caminho aqui descrito. O conhecimento que parecia construído e acabado, após alguns novos textos ou algumas reflexões, já não se apresenta da mesma forma. Quando apreendemos algo novo, não somos mais os mesmos, e, consequentemente, nossa visão também não.

Em todo o trajeto, vejo o quão significante se faz a representação semiótica da palavra, o discurso. A palavra pode construir ou desconstruir, estabilizar ou desestabilizar, concordar ou discordar, responder ou perguntar, entre diversos outros contrapontos possíveis durante a elaboração conceitual presente nesta prática investigativa.

É fato que essa palavra que modifica, que constrói e descontrói, só é possível por meio do outro indivíduo. É por meio do discurso produzido pelo outro que constituímos nossas significações, as quais nos levam à construção e à apropriação do conhecimento. Durante todas as atividades aqui desempenhadas, em praticamente todos os momentos, a mediação se fez presente. Ela marcou desde a produção dos dados, quando a mediação entre os sujeitos era fundamental para compor significações, até o desenvolvimento dos estudos relacionados a toda a dinâmica desta pesquisa. Nas conversas com minha orientadora, com outros pesquisadores, com outros professores, com os membros da banca de qualificação havia, conscientemente ou não, um processo de mediação. É a partir dessas relações de alteridade que o conhecimento que aqui se apresenta se formou e ainda continua se formando.

Embora, inicialmente, achasse que o objeto de pesquisa se constituía apenas nas significações produzidas pelos alunos que participariam desta investigação, hoje, vejo que minhas significações se encontram aqui presentes tanto quanto. O movimento das atividades investigativas acaba por formar essas significações, as quais estão impressas nestes escritos. Elas fazem parte de uma corrente, constituindo-se como um elo, não sendo nem o primeiro nem o último discurso sobre o assunto, mas apenas um dos possíveis discursos que se forma a partir de outros e acabará por fundamentar outras produções.

A pesquisa voltada à sala de aula se faz importante, pois, além de esse momento se caracterizar como uma prática reflexiva, é nessa situação que o professor pode relacionar os estudos teóricos com sua prática. É por meio da teoria que os pequenos detalhes dos processos de ensino e aprendizagem são amplificados para serem analisados. É a teoria que nos auxilia na identificação dessas minúcias que dão origem a nossos estudos, possibilitando a produção de significações tanto para a prática quanto para a própria teoria.

A escolha das tarefas basilares para a produção destes dados se deu de forma intencional, integrando nosso objeto de pesquisa. A adoção do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, *São Paulo Faz Escola*, proveu um promissor momento de reflexão sobre as potencialidades apresentadas ou não por essas publicações.

Inicialmente, essa escolha se deu a partir das intensas críticas apresentadas por parte dos docentes da rede estadual paulista. O que se visualizava era um grande descontentamento com o formato e o conteúdo desse material curricular. A partir desse questionamento sobre sua qualidade ou não, iniciei este estudo, buscando outras pesquisas sobre a temática, especificamente direcionadas ao segmento dos anos finais do Ensino Fundamental na disciplina de matemática. Concluí que, embora a discussão sobre o tema fosse feita quase todos os dias nas escolas, no recorte aqui apresentado, havia poucas pesquisas sobre esse eixo. Em todas as publicações sobre o tema aqui apresentadas, encontrei queixas de professores da rede estadual sobre a elaboração e a implementação do material curricular (ocorridas a partir do ano 2008). Entre essas queixas, estavam questões sobre a metodologia de ensino, o excesso de prescrições e a falta de clareza nessas prescrições. Essas investigações também destacam que, devido à não participação de docentes na elaboração do material, há certa resistência desses professores em adotá-lo.

Em minha pesquisa, observei que, especificamente para o recorte temático aqui definido, existe sim potencialidade para a produção de significações relacionadas ao tema *álgebra*, sobretudo no estudo de generalizações de sequências. As tarefas aqui utilizadas se apresentaram como capazes de promover situações que levem à elaboração do pensamento algébrico.

Destaco que, ao observar as prescrições expostas pelo material quanto ao desenvolvimento dessas tarefas, identifico lacunas importantes para a definição de metodologia de aula ideal para a produção de significações. Embora as tarefas se apresentem como favoráveis à situação proposta neste estudo, a metodologia de aula aqui aplicada não consta no material curricular, foi construída a partir do referencial teórico assumido por esta pesquisa. Dessa forma, no material em questão, não encontrei explicações ou mesmos sugestões aos professores para uma organização de aula que priorize a interação entre os sujeitos, tampouco achei especificações claras de que o objetivo da organização de tarefa apresentada é a produção de significações a partir do processo investigativo. Assim, construí uma cultura social de aula de matemática pautada no diálogo, na comunicação e na interação entre todos os envolvidos.

As relações estabelecidas com o referencial teórico sobre a teoria histórico-cultural, bem como com outros aportes aqui defendidos, deram-se a partir dos estudos aqui desenvolvidos. Ou seja, em momento algum o material da rede estadual define uma perspectiva de formação do conhecimento.

Visto que não há uma definição das perspectivas educacionais assumidas por esse material curricular, a relação teórica aqui estabelecida só foi possível por meio dos estudos aqui apresentados. Classifico tal situação como preocupante, pois, em um cenário de indefinição sobre os reais objetivos traçados, não há como garantir a compreensão dos docentes, que desenvolvem diariamente suas atividades nas diversas realidades escolares, quanto à metodologia e ao desenvolvimento de práticas realmente alinhadas com a proposta de tarefa do material. Acrescentam-se a isso as condições de trabalho dos professores, que inviabilizam possibilidades de realizar pesquisa em suas práticas e parcerias, até mesmo na própria escola, que poderiam tirar o professor de seu isolamento profissional e levá-lo a compartilhar suas práticas com os pares.

Apesar desses obstáculos, a partir dos dados produzidos para esta pesquisa, notei um aspecto interessante do material. Adotando a metodologia de aula aqui proposta, as sugestões de tarefas das publicações em questão se apresentam de forma positiva perante os objetivos definidos pelo próprio material.

Além disso, analisei o estudo dos modos de produção de significação do pensamento algébrico. No cenário desta pesquisa, apresento algumas ponderações sobre o assunto, o qual se apresentou como um grande terreno fértil para esta investigação, assim como para outras futuras.

Constato que a elaboração conceitual, inserida em uma perspectiva de construção do pensamento algébrico, dá-se a partir das inter-relações que se estabelecem entre os participantes do ambiente de sala de aula. A ocorrência da mediação entre o estudante que produz suas significações e o objeto do conhecimento investigado foi fundamental para que uma dinâmica de construção real do conhecimento se instaurasse.

Para que essa mediação ocorra de forma satisfatória e direcionada ao objetivo traçado, é fundamental que a atividade, quando parte do professor, seja construída de maneira consciente e estruturada. As intervenções e as mediações realizadas pelo professor devem se apresentar estrategicamente, para se caracterizar como fator potencializador das discussões desenvolvidas, com avanços de aprendizagens.

Outro ponto que emergiu na análise dos dados foi a possibilidade da mediação entre os pares em sala de aula. Não é somente o professor que pode mediar as relações entre conhecimento e aprendiz, mas também os próprios alunos podem fazê-lo. Esse fenômeno mostrou um grande potencial para o desenvolvimento do saber tido como objeto, permitindo conclusões que apontam para o estabelecimento de uma assertividade sobre a conexão entre a construção de uma sala de aula que possibilite a produção de discursos, carregados de significado, por todos os participantes dessa dinâmica e a valorização dessas produções.

Quando essas mediações ocorrem, há o desenvolvimento de uma ação em torno da zona de desenvolvimento proximal do indivíduo. Não foram raros os momentos em que me deparei com situações que me levaram a utilizar tal conceito. A compreensão desse fenômeno, por parte do professor, é fundamental para que este possa orquestrar de forma potencializadora as discussões em sala de aula. É por meio dessa consciência que é possível direcionar as atividades para o conteúdo estudado.

Nessa tomada de consciência das possíveis mediações que possibilitam a ação sobre a zona de desenvolvimento proximal, surgem as diversas representações semióticas possíveis. Não é só a palavra falada ou escrita que age como fator de comunicação para a produção de significação, mas também os gestos, as representações figuradas, a entonação de voz, o ritmo da fala, entre outros recursos, constroem um cenário de comunicação repleto de detalhes, os quais produzem o discurso.

O planejamento foi imprescindível para a execução das tarefas aqui propostas. O trabalho não se resumiu a uma simples aplicação das tarefas contidas no material adotado, mas houve um planejamento intencional, de modo a criar uma cultura de sala de aula compatível com os objetivos de pesquisa. A tentativa de antecipar os possíveis caminhos de solução de uma dada tarefa, ou mesmo de estruturar previamente as possíveis intervenções a serem realizadas durante o desenvolvimento das tarefas, foi de grande valia para a apresentação de um maior contingente de mediações que auxiliassem na elaboração conceitual em movimento. Igualmente importantes foram os momentos de monitoramento e de síntese, nos quais pude acompanhar mais de perto os grupos trabalhando, e estes, a partir das questões por mim selecionadas no acompanhamento do trabalho, socializaram e compartilharam suas estratégias de resolução das tarefas.

Tratando de questões mais específicas do pensamento algébrico, alguns conceitos emergiram de forma constante nos episódios analisados. Como trato da elaboração da generalização a partir do pensamento algébrico, esse processo apresenta sua construção de forma gradativa, construindo-se a partir de significações que se inter-relacionam. Daí a importância do cuidado com a natureza das tarefas; elas precisam possibilitar esse encadeamento de ideias necessárias à construção conceitual.

Inicialmente, observei que a construção de generalizações aritméticas se fazia muito presente nas produções apresentadas pelos alunos. Eles partiam de estratégias de solução recursivas e não apresentavam, assim, características fundamentais para elaborar uma generalização algébrica, tal como a indeterminação de valores e a correlação entre as variáveis envolvidas na situação.

Com o avanço dos trabalhos, percebi que, gradativamente, essas características da generalização algébrica tomam forma no discurso e nas produções apresentadas. A partir dessa dinâmica, novas significações se constroem nesse processo de elaboração conceitual e, assim, formam-se as (re)significações capazes de levar ao pensamento algébrico.

Durante toda essa elaboração, o aprendiz cria um repertório de possíveis estratégias de solução a serem aplicadas às sequências observadas, bem como reúne possíveis ferramentas de análise a serem utilizadas. A partir dessa progressiva construção, o conhecimento (re)constrói-se, (re)significa-se. Esse repertório de estratégias e ferramentas matemáticas possibilita a ampliação do pensamento algébrico, levando ao estabelecimento de uma maior proximidade entre aprendiz e níveis mais elevados de elaboração do pensamento algébrico.

A partir desse repertório, não raras vezes foram expostas estratégias que faziam referência a outras situações observadas anteriormente. Isso revela indícios de que ocorreu uma abstração da estratégia utilizada e de que aconteceu sua posterior generalização para além do cenário inicialmente observado.

Em meio a essa dinâmica, notei que situações que, em um primeiro momento, poderiam se apresentar como uma generalização algébrica, posteriormente passaram a se caracterizar de outra forma, pois não tinham a analiticidade necessária para a fundamentação e a construção do processo objetivado. Relaciono tal situação à tomada de consciência do conceito que está a se elaborar, na teoria histórico-cultural, e à elaboração de generalização por indução ingênua, na qual não há a observância de características das variáveis analisadas, sendo que a estratégia de solução apresentada se baseia apenas na atribuição de uma fórmula de ação arbitrária.

Destaco que, por meio do processo aqui descrito, foi possível a elaboração de generalizações pautadas no desenvolvimento do pensamento algébrico funcional. Constatei que houve as características de edificação conceitual, como a indeterminação, o tratamento e a operação de valores desconhecidos/indefinidos como se fossem conhecidos/definidos e a construção de um pensamento analítico, que possibilita o avanço da indução, a qual, por sua vez, leva à generalização algébrica.

O que se apresenta nesse cenário é a caracterização de um ambiente de investigação muito promissor para a pesquisa. A temática da produção de significações, a partir da elaboração do pensamento algébrico, é uma área de grande potencial para a produção de conhecimento. Com ela, é possível desenvolver práticas de ensino que possam, realmente, promover aprendizagens e construção do conhecimento.

As interações entre os participantes desses processos são mais do que fundamentais para a instauração desta dinâmica. É por meio dessas interações que as significações são construídas.

Devido a isso, afirmo que a sala de aula deve se caracterizar como um espaço onde os discursos produzidos sejam ouvidos e valorizados, pois é mediante essa tecelagem de discursos que o saber se significa e se constrói. Deve ficar claro que o estabelecimento do cenário aqui descrito só é possível devido a alguns fatores.

Primeiro, destaco a importância de o professor estudar e conhecer a teoria pedagógica e didática. É por meio dela que ele poderá compreender, de forma analítica, as situações ocorridas em suas aulas. Com esses estudos, é possível obter lentes de aumento para as minúcias que dão origem a todo o processo que se instala em uma sala de aula. Infelizmente, vejo, em nosso cenário educacional, que, cada vez menos, o professor tem acesso a momentos em que possa se engajar em tal atividade tão importante para sua formação profissional e para o consequente desenvolvimento de suas práticas pedagógicas.

Em segundo, apresento que o engajamento dos alunos participantes foi fundamental para o sucesso desta pesquisa. É necessária a implementação de uma cultura direcionada à investigação na sala de aula. Para isso, devemos estabelecer objetivos claros, os quais sejam compreendidos por todos e, acima de tudo, permitam que todos se sintam motivados a desenvolver a investigação proposta. É necessária a intencionalidade do professor para sua ação pedagógica.

Em terceiro, afirmo que não há como construir um ambiente educacional voltado a tais perspectivas sem afetividade. É por meio desta que alunos e professores se motivam a realizar suas atividades, transformando, verdadeiramente, uma simples tarefa, que é estática, em atividade, que se caracteriza pela dinamicidade e pela potencial capacidade de produção de conhecimento. Asseguro que a motivação dos alunos participantes desta pesquisa em muito esteve relacionada à afetividade entre aluno e professor. Com ela, todos que participaram desta investigação se comprometeram com o que estava a se construir, por isso asseguro: esta pesquisa não foi construída apenas pelo pesquisador que aqui se apresenta, mas sim por todos que integraram estes momentos.

Acredito que consegui responder a minha questão de investigação, pois analisei como as significações são produzidas pelos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental na realização de tarefas relativas ao pensamento algébrico. Ademais, atingi aos objetivos propostos para esta pesquisa.

Acredito que esta pesquisa não esgota o assunto em pauta, mas apenas apresenta possíveis conclusões, proporcionando novos questionamentos: de que forma a afetividade interfere nas interações entre os indivíduos e, consequentemente, na produção de significação do conhecimento? Quais os reflexos ocasionados pela implementação de um sistema de ensino que adota um único material curricular? Como a prescrição, ou não, de uma metodologia de aula impacta na atividade real do professor? Ficam aqui essas perguntas como sugestões para futuros estudos.

Outro viés de investigação que surge nos questionamentos apontados por esta pesquisa se consubstancia no processo de formação docente. Em meio às demandas aqui descritas, conclui-se que há a necessidade de um professor que tenha a capacidade de problematizar suas aulas e realizar as devidas mediações perante as interações que se instauram durante a aula, promovendo avanços nas aprendizagens discentes. A atividade docente é repleta de complexibilidade, a qual nos direciona para estas questões: de que forma um professor (trans)forma seus saberes profissionais? Como o professor, a partir de um material como o utilizado neste estudo, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos? Que modelos de formação continuada podem ser favoráveis para que isso ocorra?

No que diz respeito à formação docente, destaco a importância da tomada de consciência, por parte dos professores, das características de formação do pensamento algébrico, pois, a partir desse conhecimento, ele poderá elaborar tarefas que promovam o desenvolvimento das situações necessárias para constituir as generalizações algébricas e a produção de significação relacionada ao objeto observado.

Por fim, penso que a educação é ainda muito carente da produção de conhecimento. Mais do que isso, em minha visão, esse conhecimento é pouco disseminado onde realmente pode ter efeito prático: na escola. Vejo que a pesquisa voltada à ciência *Educação* deve ser cada vez mais direcionada à escola. Esta, muitas vezes, caracteriza-se como objeto de pesquisa, mas nem sempre como beneficiária direta das produções realizadas. Além disso, os professores não são protagonistas do desenvolvimento dos currículos e de suas práticas, pois suas necessidades não são ouvidas.

Portanto, esta pesquisa buscou apresentar uma possibilidade de investigação, em meio a um universo de possibilidades. Acredito que o conhecimento que aqui apresento não é único nem estático, muito menos absoluto. Ele integra um universo de saberes. Embora esta escrita se encerre aqui, as discussões não, os discursos produzidos não, e assim vamos construindo, a várias mãos, a edificação do conhecimento, que se faz e se refaz a partir de cada significação produzida no contexto da sala de aula.

Avalio, ainda, que esta pesquisa, trouxe novas nuances ao que já havia sido produzido, no campo do desenvolvimento do pensamento algébrico, quando fiz o mapeamento da produção. Com suas características singulares: apoio na perspectiva histórico-cultural (tanto para análise dos dados como para organização da sala de aula para o desenvolvimento do trabalho) e pesquisa realizada na própria prática do professor, a partir de um material que vem prescrito da Secretaria Estadual de Educação, este trabalho traz evidências de o quanto os alunos podem ser protagonistas de sua aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AKKAN, Yasar. Comparison of 6th-8th graders' efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 703-732, dez. 2013. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X 2013000400002&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 13 dez. 2018.

ALVES, Beatriz Aparecida Silva. **A álgebra na perspectiva histórico-cultural**: uma proposta de ensino para o trabalho com equações de 1° grau. 2016. 160 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

ARBITRÁRIO. *In*: AULETE digital. Rio de Janeiro: Lexikon, 2004. Disponível em: http://www.aulete.com.br/arbitr%C3%A1rio. Acesso em: 2 jul. 2018.

BLANTON, Maria L. **Algebra and the elementary classroom**: transforming thinking, transforming practice. 1. ed. Portsmouth, NH; Heinemann, 2008.

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Functional Thinking as a route into algebra in the elementary grades. *In*: CAI, Jinfa; KNUTH, Eric. **Early algebraization**: a global dialogue from multiple perspectives. 1. ed. Berlin: Springer, 2011. p. 5-23

BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu; DIONÍSIO, Fátima Aparecida Queiroz; SCHEIFER, C. A importância da função discursiva de designações de relações algébricas para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, p. 182-198, 2018.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Brasília, DF: Presidência da República, [2018]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm. Acesso em: 13 dez. 2018.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: 2017.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. 1. ed. Porto: Porto Editora, 1994.

CALLEJO, María Luz; ZAPATERA, Alberto. Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 64-88, abr. 2014. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo .php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2014000100005&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 13 dez. 2018.

CARPENTER, Thomas P.; LEVI, Linda; FRANKE, Megan Loef; ZERINGUE, Julie Koehler. Algebra in elementary school: developing relational thinking. **ZDM**, Dordrecht, v. 37, n. 1, p. 53-59, fev. 2005. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF02655897. Acesso em: 13 dez. 2018.

CARRAHER, David W.; MARTINEZ, Mara V.; SCHLIEMANN, Analúcia D. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM**, Dordrecht, v. 40, n. 1, p. 3-22, nov. 2007. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007 /s11858-007-0067-7. Acesso em: 13 dez. 2018.

CATANZARO, Fabiana Olivieri. **O Programa São Paulo Faz Escola e suas apropriações no cotidiano de uma escola de ensino médio**. 2012. 132p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

CEDRO, Wellington Lima; MOURA, Manoel Oriosvaldo de. Uma perspectiva histórico-cultural para o ensino de álgebra: o Clube de Matemática como Espaço de Aprendizagem . **Zetetike**, Campinas, v. 15, n. 1, p.37-56, jan. 2007. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8647015/13916. Acesso em: 13 dez. 2018.

CERQUEIRA, Teresa Cristina Siqueira. O professor em sala de aula: reflexão sobre os estilos de aprendizagem e a escuta sensível. **Psic**, São Paulo, v. 7, n. 1, p. 29-38, jun. 2006. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1676-73142006000100005&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 16 jan. 2018.

CIVINSKI, Daiana Dallagnoli. **Introdução ao estudo da aritmética e da álgebra no ensino fundamental**. 2015. 155 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, Santa Catarina.

CONNELLY, M.; CLANDININ, J. Relatos de experiencia e investigación narrativa. *In*: LARROSA, Jorge. **Déjame que te cuente**: ensayos sobre narrativa y educación. 1. ed. Barcelona: Laertes, 1995. p. 11-59

CORTÉS, José Carlos; HITT, Fernando; SABOYA, Mireille. Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un Ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 240-264, abr. 2016. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2016000100240&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 13 dez. 2018

COSTA, Eveline Vieira; SANTA-CLARA, Angela. Apropriação como produção coletiva na atividade e internalização como resultado desta atividade: um exemplo de álgebra elementar na sala de aula. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 349-368, abr. 2015. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2015000100019&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 13 dez. 2018.

CYRINO, Márcia de C. Trindade; OLIVEIRA, Hélia Margarida de. Pensamento algébrico ao longo do Ensino básico em Portugal. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, abr. 2011. Disponível em: http://ojs-teste.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4598/3704. Acesso em: 13 dez. 2018.

FONTANA, Roseli; CRUZ, Nazaré. **Psicologia e trabalho pedagógico**. São Paulo: Atual, 1997.

FREITAS, Ana Paula; NACARATO, Adair Mendes; MOREIRA, Kátia Gabriela. A elaboração do conceito geométrico nos anos iniciais: refletindo sobre o papel da palavra e da imaginação. *In*: MASCIA, Márcia A. Amador; ANJOS, Daniela Dias dos; SMOLKA, Ana Luiza B.. (org.). **Leituras de Vigotski**. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2017. p. 69-88.

FREITAS, Dayse Stefanie de Lima; SOUZA JÚNIOR, Arlindo José de. Importância do memorial de formação enquanto estratégia de formação profissional no projeto Veredas. **Olhares e Trilhas**, Uberlândia, v. 5, n. 1, p. 1-10, jan./dez. 2004. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/olharesetrilhas/article/view/3460/13589. Acesso em: 16 jan. 2018.

FREITAS, Luciana Pinto. **Atividades algébricas no 6o ano do ensino fundamental com materiais manipuláveis**. 2014. 75 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, 2014.

FREITAS, Maria Teresa de Assunção. A perspectiva da abordagem histórico-cultural: um espaço educativo de constituição de sujeitos. **Teias**, Rio de Janeiro,v. 10, n. 19, p. 1-12, 2009.

FRIEDRICH, Janette. **Lev Vigotski**: mediação, aprendizagem e desenvolvimento. Uma leitura filosófica e epistemológica. 1. ed. Tradução de Anna Rachel Machado e Eliane Gouvêa Lousada. Apresentação de Ana Luiza B. Smolka. Campinas: Mercado de Letras, 2012.

FUNDAÇÃO VANZOLINI. **A Vanzolini**. São Paulo, [20--]. Disponível em: https://vanzolini.org.br/institucional/quem-somos/. Acesso em: 13 dez. 2018

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Caderno Cedes**, Campinas, ano XX, n. 50, p. 9-25, abr. 2000.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de; CRUZ, Maria Nazaré. Sentido, significado e conceito: notas sobre as contribuições de Lev Vygotsky. **Pro-posições**, Campinas, v. 17, n. 3, p. 31-45, 2006.

HIEBERT, James; CARPENTER, Thomas P.; FENNEMA, Elizabeth; FUSON, Karen; WEARNE, Diane; MURRAY, Hanlie. **Making sense**: teaching and learning mathematics with understanding. 1. ed. Portsmouth: Heinemann, 1997.

IBGE. **Pinhalzinho**. Brasília: 2017. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/sp/pinhalzinho/panorama. Acesso em: 17 jan. 2018.

LEITE, Lidiane Camilo Sossolote. **A leitura dos enunciados dos problemas matemáticos e as estratégias para a resolução por alunos do 9° ano do ensino fundamental**. 2014. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília, 2014.

LIMA, Claudia Neves do Monte Freitas de; NACARATO, Adair Mendes. A investigação da própria prática: mobilização e apropriação de saberes profissionais em Matemática. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v. 25, n. 2, p. 241-265, ago. 2009. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-46982009000200011&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 19 nov. 2018.

MAGALHÃES, Ayrton Goés de. **Construção de conceitos algébricos com alunos do 7° ano**. 2016. 143 p. Dissertação (Mestrado Profissional em ensino de ciências exatas) – Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social , Lajeado, 2016.

MASON, Jason; DRURY, Helen Studies in the zone proximal awareness. *In*: ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA, 30., 2007, Hobart. **Proceedings** […]. Adelaide: Merga, 2007. p. 42-58. v. 1. 2007

MOREIRA, Kátia Gabriela. **A sala de aula de Matemática de um 1° ano do Ensino Fundamental**: contexto de problematização e produção de significados. 2015. 151p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

PINO, Angel. **As marcas do humano:** às origens da constituição cultural da criança na perspectiva de Lev. S. Vigotski. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

PONTE, João Pedro. Investigar a nossa própria prática. *In*: GRUPO DE TRABALHO SOBRE INVESTIGAÇÃO (ed.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. 1. ed. Lisboa: APM, 2002. p. 5-28.

PONTE, João Pedro; AMADO, Nélia; NOBRE, Sandra. A resolução de problemas com a folha de cálculo na aprendizagem de métodos formais algébricos. **Quadrante**, Lisboa, v. 24, n. 2, p. 85-110, 2015. Disponível em: http://www.apm.pt/portal/quadrante.php?id=219854&rid=219838. Acesso em: 13 dez. 2018.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. **A escrita e o pensamento matemático**: interações e potencialidades. 1. ed. Campinas: Papirus, 2006. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática. SBEM).

PROUNI. **O programa**. Brasília: MEC, [2018]. Disponível em: http://prouniportal.mec.gov.br/o-programa. Acesso em: 18 jan. 2018.

RADFORD, Luis. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2006, Bergen. **Proceedings** […]. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, 2006. p. 2-21, v. 1.

______. En torno de tres problemas de la generalización. In: RICO, Luiz; CANADAS, Maria C.; GUTIÉRREZ; José; MOLINA, Marta; SEGOVIA, Isidoro (ed.). **Investigación en didáctica de la matemática**. 1. ed. Granada: Comares, 2013. p. 3-12.

______. Grade 2 students non-symbolic algebraic thinking. *In*: CAI, Jinfa; KNUTH, Eric (org.). **Early algebraization**: a global dialogue from multiple perspectives. 1. ed. Berlin: Springer, 2011. p. 117-133.

______. Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. **ZDM**, Dordrecht, v. 40, n. 1, p. 83-96, 2008.

______. On the development of early algebric thining. *In*: **of que 35th** CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 35., 2011, Ankara. **Proceedings** […]. Ankara: Middle East Technical University, 2012. p. 117-133. v. 4.

______. **Signs, gestures, meanings**: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Ontário: 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net /publication/

266372328_CERME_6_-_PLENARY_1_ Signs_gestures_meanings_Algebraic_thinking_from_a_cultural_semiotic_perspective/download. Acesso em: 13 dez. 2018.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. A álgebra, seu ensino e sua aprendizagem. In:______. **Álgebra para a formação do professor**: explorando os conceitos de equação e de função. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. p. 11-27.

SANTOS, João Ricardo Viola dos; BURIASCO, Regina Luzia Cório. Uma análise do pensamento e da linguagem algébrica expressos na produção escrita de alunos da escola básica. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 54, p. 11-32, 2009.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do aluno**: 6ª série/7° ano - Matemática. São Paulo, 2014a

______. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática. São Paulo, 2011

______. Secretaria da Educação. **Caderno do professor**: 6ª série/7° ano - Matemática. São Paulo, 2014b.

SILVA, Ana Lúcia Nunes Urtado. **Apropriação dos cadernos de matemática do programa São Paulo faz escola pelos professores dos anos finais do ensino fundamental**. 2014. Dissertação (Mestrado em Gestão e Práticas Educacionais) – Universidade Nove de Julho, São Paulo, 2014.

SILVA, Antônia Zulmira. **Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental: uma contribuição para o Caderno do Professor de Matemática do oitavo ano.** 2012. 105 p. Dissertação (Metrado profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2012.

SILVA, Edilaine Pereira da. **Aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano em um experimento de ensino**. 2013. 147 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SMITH, Erick. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In: KAPUT, James J.; CARRAHER, David William; BLANTON, Maria L. (Ed.). **Algebra in the early years**. 1 ed. New York: Lawrence Erlbaum Associates: National Council of Teachers of Mathematics, 2008, p. 133-159.

SMITH, Margaret S; STEIN, Mary Kay. **5 practices for orchestrating productive mathematics discussions**. 1. ed. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 2012

SMOLKA, Ana Luiza Bustamante. Ensinar e significar: as relações de ensino em questão ou das (não)coincidências nas relações de ensino. In: SMOLKA, Ana Luiza Bustamente; NOGUEIRA, Ana Lúcia Horta (org.). **Questões de desenvolvimento humano:** práticas e sentidos. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2010. p. 107-128.

______. Sobre significação e sentido: uma contribuição à proposta de rede de significações. In: FERREIRA, Maria Clotilde Rosseti; AMORIM, Kátia de Souza; SILVA, Ana Paulo Soares; CARVALHO, Ana Maria de Almeida (org.). **A rede de significações e o estudo do desenvolvimento humano**. 1. ed. São Paulo: Penso, 2004, p. 42-59

SPERAFICO, Yasmini Lais Spindler; DORNELES, Beatriz Vargas; GOLBERT, Clarissa Seligman. Análise de erros na resolução de problemas com equações algébricas do 1º grau: um estudo com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 62, n. 2, p. 77-90, 2013.

TREVISANI, Fernando de Melo. **Estratégias de generalização de padrões matemáticos**. 2013. 113 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2013.

VAN DE WALLE. J. **Matemática do ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Tradução de Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIGOTSKI, Lev Semenovitch. **A construção do pensamento e da linguagem**. 1. ed. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001a

______. **A formação social da mente**. 4. ed. Tradução de José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

______. **Obras Escogidas**: fundamentos de defectología. 1. ed. Tradução de Julio Guillermo Blank. Madrid: Visor, 1997. v. 5.

______. **Psicologia pedagógica**. 2. ed. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001b.

______. **Imaginação e criação na infância**. 1. ed. Tradução de Zoia Prestes. São Paulo: Ática, 2009

APÊNDICES

APÊNDICE A – TAREFA 1

Sequência extraída do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Objetivos: realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras. Investigar sequências de figuras com a finalidade de identificar padrões e representá-los por meio da linguagem escrita.

1. Observe com atenção a sequência a seguir:

Qual é o próximo símbolo que deve ser colocado na sequência para que seja mantido seu padrão?

I.  II.  III.  IV.  V. 

a) O símbolo I.
b) O símbolo II.
c) Os símbolos II ou III.
d) Os símbolos I ou IV.
e) Os símbolos II ou IV.

2. É possível escolher mais de um símbolo para continuar o padrão da sequência? Justifique.

3. Desenhe uma sequência usando como padrão o símbolo da figura **III**, apresentado na atividade 1.

4. Desenhe os 7 primeiros símbolos da sequência apresentada na atividade 1, numerando-os conforme sua posição.

a) Qual símbolo deve ser colocado na 20ª posição da sequência? E na posição 573?

b) Escreva uma regra que permita identificar exatamente o símbolo correspondente a cada uma das posições da sequência.

B. Após a finalização das discussões em grupo, será realizada uma socialização dos resultados obtidos, sendo solicitado a cada grupo que exponha suas conclusões para os demais na lousa. Durante esta *tarefa*, os grupos serão estimulados a questionar as soluções apresentadas.

APÊNDICE B – TAREFA 2

Sequência extraída do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

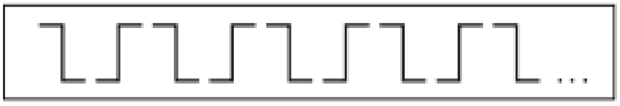
Objetivo: realizar generalizações com linguagem escrita e com expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

A) Os grupos discutirão e proporão uma solução para cada uma das tarefas descritas abaixo, registrando suas conclusões no material curricular utilizado.

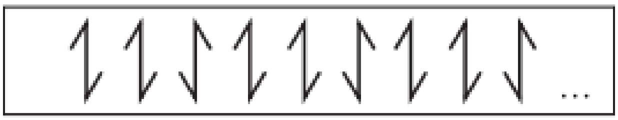
5. Escreva uma regra de identificação dos símbolos para cada uma das sequências a seguir.

a) Sequência 1

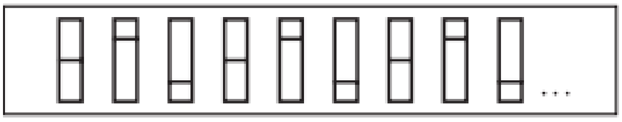
b) Sequência 2



c) Sequência 3



d) Sequência 4



B) Após a finalização das discussões em grupo, será realizada uma socialização dos resultados obtidos, sendo solicitado a cada grupo que exponha suas conclusões para os demais na lousa. Durante esta tarefa, os grupos serão estimulados a questionar as soluções apresentadas.

APÊNDICE C – TAREFA 3

Sequência extraída do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Objetivo: realizar generalizações com linguagem escrita e com expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

A) Os grupos discutirão e proporão uma solução para cada uma das atividades descritas abaixo, registrando suas conclusões no material curricular utilizado.

6. Tendo como base as sequências apresentas na atividade anterior, desenhe:

a) a figura que ocupa a 20ª posição na Sequência 1;

b) a figura que ocupa a 73ª posição na Sequência 2;

c) a figura que ocupa a 123ª posição na Sequência 3;

d) a figura que ocupa a 344ª posição na Sequência 4.

C) Após a finalização das discussões em grupo, será realizada uma socialização dos resultados obtidos, sendo solicitado a cada grupo que exponha suas conclusões para os demais na lousa. Durante esta tarefa, os grupos serão estimulados a questionar as soluções apresentadas.

APÊNDICE D – TAREFA 4

Sequência extraída do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Objetivo: realizar generalizações utilizando a linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

A) Os grupos irão discutir e propor uma solução para cada um dos itens descritos abaixo, registrando suas conclusões no material curricular utilizado;

7. Observe a sequência a seguir e responda às perguntas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
♣	♦	♥	♠	♣	♦	♥	♠	♣	♦	♥	♠	...

a) Qual é a próxima figura da sequência? __________

b) Como podemos descrever com palavras as posições em que encontramos a figura ♠?

c) Como podemos descrever em palavras as posições onde encontramos as figuras ♦, ♥ e ♣?

d) Qual é a figura que ocupa a posição 263 dessa sequência? __________

B) Após a finalização das discussões em grupo, será realizada uma socialização dos resultados obtidos, sendo solicitado a cada grupo que exponha suas conclusões para os demais na lousa. Durante esta tarefa, os grupos serão estimulados a questionar as soluções apresentadas.

APÊNDICE E – TAREFA 5

Sequência extraída do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Objetivo: realizar generalizações com linguagem escrita e com expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

A) Os grupos discutirão e proporão uma solução para cada um dos itens descritos abaixo, registrando suas conclusões no material curricular utilizado.

8. Para fazer entregas de gás na cidade de São Paulo, uma distribuidora dividiu a cidade em 180 regiões e estabeleceu o seguinte calendário de entrega:

2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feira	Sábado
Região 1	Região 2	Região 3	Região 4	Região 5	Região 6
Região 7	Região 8	Região 9	Região 10	Região 11	Região 12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

a) Cite cinco regiões da cidade que recebem gás às sextas-feiras.

___

b) Que regiões da cidade recebem gás aos sábados?

___

c) Em que dia da semana a região 180 tem entrega de gás? E a região 129?

___

___

___

d) Como podemos descrever, em palavras, as regiões nas quais a entrega de gás acontece às quintas-feiras?

___

___

___

B) Após a finalização das discussões em grupo, será realizada uma socialização dos resultados obtidos, sendo solicitado a cada grupo que exponha suas conclusões para os demais na lousa. Durante esta tarefa, os grupos serão estimulados a questionar as soluções apresentadas. (15 min)

APÊNDICE F – TAREFA 6

Sequência extraída do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Objetivo: realizar generalizações com linguagem escrita e com expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

A) Os grupos discutirão e proporão uma solução para cada um dos itens descritos abaixo, registrando suas conclusões no material curricular utilizado.

9. Complete a sequência das potências de 7 até conseguir identificar o padrão de repetição algarismo das unidades e, em seguida, responda às perguntas.

7^0	7^1	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6	7^7
1	7						

a) Quais são os algarismos que se repetem na casa das unidades? Em que ordem?

b) Explique por que esse padrão acontece.

c) Para quais expoentes da potência de 7 os resultados serão números terminados em 1?

d) Para quais expoentes da potência de 7 os resultados serão números terminados em 7?

e) Qual é o algarismo da unidade do resultado da potência 7^{179}?

B) Após a finalização das discussões em grupo, será realizada uma socialização dos resultados obtidos, sendo solicitado a cada grupo que exponha suas conclusões para os demais na lousa. Durante esta tarefa, os grupos serão estimulados a questionar as soluções apresentadas.

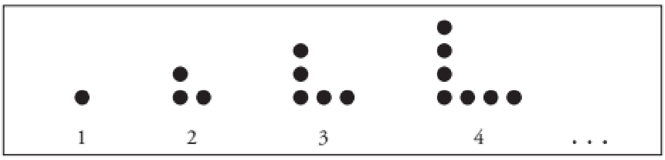
APÊNDICE G – TAREFA 7

Sequência extraída do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Objetivo: realizar generalizações com linguagem escrita e com expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

A) Os grupos discutirão e proporão uma solução para cada um dos itens descritos abaixo, registrando suas conclusões no material curricular utilizado. (15 min.)

11. Observe a sequência de bolinhas e responda às perguntas.



a) Desenhe as bolinhas que devem ocupar as posições 5 e 6.

b) Preencha a tabela, associando o número de bolinhas com a posição da figura.

Posição	1	2	3	4	5	6
Número de bolinhas						

c) Quantas bolinhas terá a figura que ocupa a 10ª posição?

____

d) E a figura que ocupa a 45ª posição?

____

e) Descreva, em palavras, o padrão de formação dessa sequência.

____

____

____

B) Após a finalização das discussões em grupo, será realizada uma socialização dos resultados obtidos, sendo solicitado a cada grupo que exponha suas conclusões para os demais na lousa. Durante esta tarefa, os grupos serão estimulados a questionar as soluções apresentadas. Na socialização, é preciso levantar argumentos que diferenciem as representações recursivas das não recursivas. Para demonstrar a importância do desenvolvimento do pensamento não recursivo, solicite que encontrem um valor que ocupe uma posição muito distante do início da sequência. (15 min.)

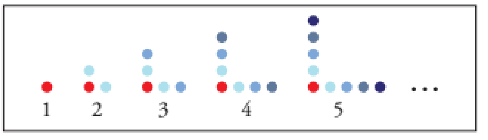
APÊNDICE H – TAREFA 8

Sequência extraída do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Objetivo: realizar generalizações com linguagem escrita e com expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

A) Os grupos discutirão e proporão uma solução para cada um dos itens descritos abaixo, registrando suas conclusões no material curricular utilizado.

12. Considere, agora, a mesma sequência da atividade anterior representada por bolinhas coloridas.



a) Que lógica foi utilizada para colorir as bolinhas?

b) Qual é a única bolinha que não forma par e está presente em todas as figuras?

c) Quantos pares de bolinhas da mesma cor contém a figura 4? E a figura 5?

d) Quantos pares de bolinhas da mesma cor haverá na figura 18? E na figura 31?

e) Qual é a figura da sequência que possui 25 pares de bolinhas da mesma cor? Quantas bolinhas essa figura possui no total?

f) Utilizando a letra **P** para identificar a posição da figura, escreva uma fórmula que determine o número **N** de bolinhas de cada figura.

B) Após a finalização das discussões em grupo, será realizada uma socialização dos resultados obtidos, sendo solicitado a cada grupo que exponha suas conclusões para os demais na lousa. Durante esta tarefa, os grupos serão estimulados a questionar as soluções apresentadas. Na exposição das fórmulas elaboradas pelos alunos, se necessário, discuta e apresente melhores formas de representar as ideias sistematizadas a partir de uma notação mais clara.

APÊNDICE I – TAREFA 9

Sequência extraída do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Objetivos: realizar generalizações com linguagem escrita e com expressões matemáticas que envolvem o uso de letras. Investigar sequências numéricas para aprimorar a percepção indutiva de regularidades e iniciar um trabalho com o uso de letras, a fim de representar o padrão identificado.

A) Os grupos discutirão e proporão uma solução para cada um dos itens descritos abaixo, registrando suas conclusões no material curricular utilizado.

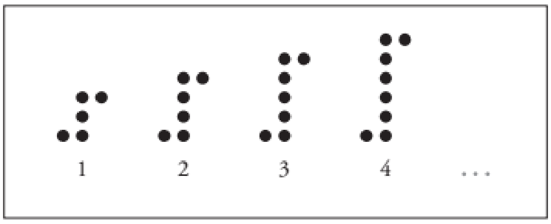
13. Em cada uma das sequências a seguir, faça o que se pede.

I. Desenhe a próxima figura da sequência.

II. Calcule o número de bolinhas das figuras que ocupam a 5ª e a 20ª posição.

III. Escreva uma fórmula que relacione o número **N** de bolinhas com a posição **P** que ocu
figura na sequência.

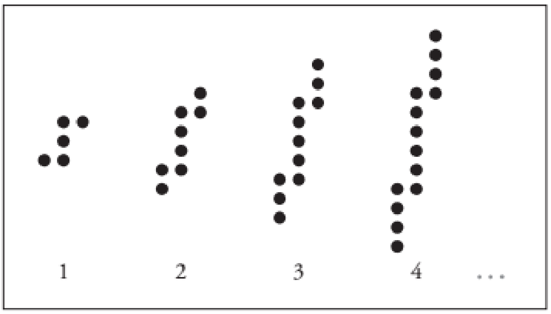
Sequência 1



II. 5ª: ______ / 20ª: ______

III. N = ________________

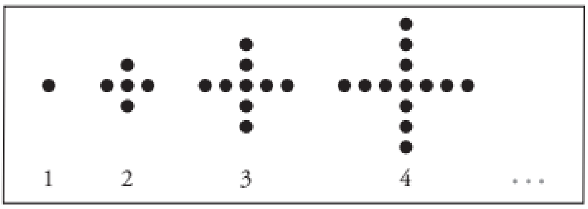
Sequência 2



II. 5ª: ______ / 20ª: ______

III. N = ________________

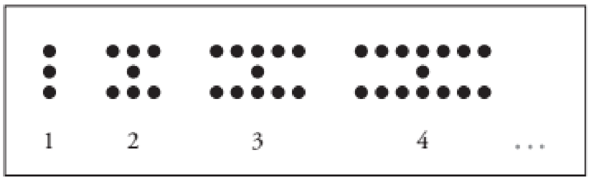
Sequência 3



II. 5ª: ______ / 20ª: ______

III. N = ________________

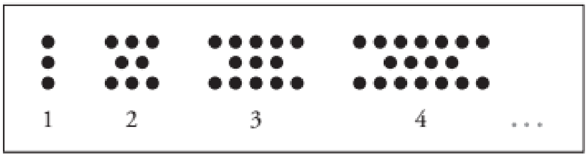
Sequência 4



II. 5ª: ______ / 20ª: ______

III. N = ________________

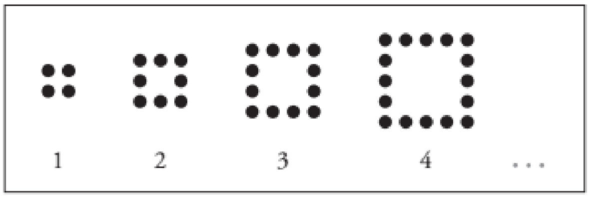
Sequência 5



II. 5ª: ______ / 20ª: ______

III. N = ________________

Sequência 6



II. 5ª: ______ / 20ª: ______

III. N = ________________

B) Após a finalização das discussões em grupo, será realizada uma socialização dos resultados obtidos, sendo solicitado a cada grupo que exponha suas conclusões para os demais na lousa. Durante esta tarefa, os grupos serão estimulados a questionar as soluções apresentadas. Na socialização, levantar argumentos que diferenciem as representações recursivas das não recursivas. Para demonstrar a importância do desenvolvimento do pensamento não recursivo, solicite que encontrem um valor que ocupe uma posição muito distante do início da sequência.